

< 논문 >

개량된 등가비열법을 이용한 상변화 열전달의 수치해석

목진호*

(2004년 12월 20일 접수, 2005년 6월 16일 심사완료)

Application of the Modified Equivalent Specific Method to the Phase Change Heat Transfer

Jinho Mok

Key Words : Equivalent Specific Heat(등가비열), Latent Heat(잠열), Phase Change Heat Transfer(상변화열전달), Solidification(응고)

Abstract

The phase change heat transfer has been applied to the processes of machines as well as of manufacturing. The cycle in a heat exchanger includes the phase change phenomena of coolant for air conditioning, the solidification in casting process makes use of the characteristics of phase change of metal, and the welding also proceeds with melting and solidification. To predict the phase change processes, the experimental and numerical approaches are available. In the case of numerical analysis, the Enthalpy method is most widely applied to the phase change problem, comparing to the other numerical methods, i.e. the Equivalent Specific Heat method and the Temperature Recovery method. It's because that the Enthalpy method is accurate and straightforward. The Enthalpy method does not include any correction step while the correction of final temperature field is inevitable in the Equivalent Specific Heat method and the Temperature Recovery method. When the temperature field is to be used in the calculation, however, there must be converting process from enthalpy to temperature in the calculation scheme of Enthalpy method. In this study, an improved method for the Equivalent Specific Heat method is introduced whose method dose not include the correction steps and takes temperature as an independent variable so that the converting between enthalpy and temperature does not need any more. The improved method is applied to the solidification process of pure metal to see the differences of conventional and improved methods.

기호설명

a : 이산화방정식의 계수
 B : 생성항
 c_p : 비열
 f : 체적분율
 ΔH : 잠열에너지
 κ : 투과율
 L : 잠열
 ρ : 밀도
 t : 시간
 T : 온도
 u, V : 속도

하첨자

E : 등가비열
 E, W, N, S, T, B : 이산화식 참조점
 i : 좌표방향
 l : 액상
 m : 고-액혼합상
 NB : 이웃
 s, S : 상, 금형

상첨자

$*$: 수정전
 old : 이전시간단계

1. 서론

상변화 현상은 고상-액상, 액상-기상, 혹은 기상-고상 간에 나타날 수 있으며, 이는 제조공정이

* 책임저자, 회원, Nano Cast Korea
 E-mail : mokjinho@yonsei.ac.kr
 TEL : (02)2123-2837 FAX : (02)3147-2641

나 열전달 현상에 있어 매우 중요한 요인이 되기도 한다. 고상과 액상간의 상변화의 경우, 액상과 기상간의 상변화와는 다른 특징을 보인다. 순수금속의 고상-액상간의 상변화 현상, 혹은 액상-기상간의 상변화 현상에서는 각 상간에 뚜렷한 경계면이 존재는 반면, 합금과 같은 경우 이러한 경계면 대신이 고-액공존역(mushy zone)이 존재한다. 홍준표 등^(1,2)은 온도회복법을 이용하여 금속의 상변화 현상을 해석하였다. 이 방법은 에너지방정식상에서 잠열에 대한 고려를 배제시키고 최종 온도분포가 얻어지고 나서 그 온도장을 잠열 효과를 고려하여 수정하는 방법이다. 계산시간이 다른 방법에 비하여 월등히 빠르지만, 상변화 열전달에 대한 처리가 에너지방정식 상에서 분리되는 관계로 정확도는 다소 떨어진다. 이진호 등^(3,4)은 잠열의 영향을 비열의 증가로 평가하는 등가비열법을 주조공정에 적용하였다. 온도회복법과 달리, 잠열의 영향이 에너지방정식 상에 생성항으로 나타나며, 온도가 고상선 혹은 액상선을 지나며 변하는 경우 수정해주어야 한다. 엔탈피법은 앞선 두 가지 방법과 달리 어떠한 보정과정도 포함되지 않으나 온도 값이 필요한 경우 엔탈피와 온도간의 관계를 이용하여 엔탈피를 온도로 환산시켜주어야 한다. 합금의 응고 혹은 용융과정은 액상과 고상의 물성치가 모두 온도 혹은 액상율이나 고상율에 의존하기 때문에 이 과정은 반드시 포함되어야 한다. Voller⁽⁵⁾는 엔탈피법을 상변화 문제에 적용시켰을 때 계산시간을 단축시킬 수 있는 방법을 제시하였다. 각 방법은 나름대로의 장단점을 가지고 있으나, 온도-엔탈피 간의 환산과정이 필요함에도 불구하고 계산의 정확도로 인해서 상변화 열전달의 해법으로 엔탈피법이 가장 널리 적용되고 있다.⁽⁶⁻⁸⁾

본 연구에서는 개정된 등가비열법 (MESH method: Modified Equivalent Specific Heat methods)를 개발하여 온도를 종속변수로 하는 에너지방정식을 온도수정과정 없이 풀 수 있도록 함으로써 등가비열법과 엔탈피법의 장점을 모두 살릴 수 있도록 하였다. 새로운 방법을 반무한 응고시스템에 적용하여 엄밀해⁽⁹⁾와 비교하였다.

2. 이론

2.1 기본방정식

고상과 액상간의 상변화는 복잡한 유동현상 및 열전달 현상을 수반한다. 그러나 상변화를 수반하는 유동현상 즉 고-액공존역에서의 유동현상은 본 연구의 범위를 벗어나는 관계로 유동에 관한 한은 기본방정식의 소개에 국한시키고자 한다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho_m u_{mi}) + \nabla(\rho_m V_m \cdot u_{mi}) \\ &= \nabla \left(\mu_l \frac{\rho_m}{\rho_l} \nabla u_{mi} \right) - \frac{\partial P}{\partial x_i} \\ &+ \rho_m B_i - \frac{\mu_l}{\kappa} \frac{\rho_m}{\rho_l} (u_m - V_s) \end{aligned} \quad (1)$$

$$u_m = f_l u_l + f_s u_s, \quad f: \text{mass fraction}$$

$$\begin{aligned} \nabla(\rho_m V_m \cdot u_{mi}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\rho_m u_m \cdot u_{mi}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}(\rho_m v_m \cdot u_{mi}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_m w_m \cdot u_{mi}) \end{aligned}$$

이 방정식이 Incropera 등^(10,11)이 제안한 연속체 모델이론에 의해 제 구성된 운동량방정식이다. 하첨자 $m, l, s,$ 과 i 은 고-액혼합상, 액상, 고상과 좌표방향을 나타낸다. B 는 생성항을, V_s 는 금형속도를, 그리고 κ 는 투과율을 의미한다.

상변화를 고려한 에너지방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho_m h) + \nabla(\rho_m V_m \cdot h) \\ &= \nabla(k_m \nabla T) \\ &- \frac{\partial}{\partial t}(\rho_m \Delta H) - \nabla(\rho_m (V_m - V_s) \Delta H) \end{aligned} \quad (2)$$

제 1, 2 그리고 3 항은 일반적인 에너지방정식과 같은 의미를 갖는다. 제 4, 5 항은 잠열에 관련된 항으로서 잠열에너지에 대한 비정상항과 대류항을 각각 나타낸다. 제 1, 2, 3 항에 대한 이산화과정은 매우 잘 알려져 있으므로 여기서는 생략하고, 제 4, 5 항에 대한 이산화과정을 집중적으로 논의하도록 한다. 여기에 2.1 절의 내용을 입력한다.

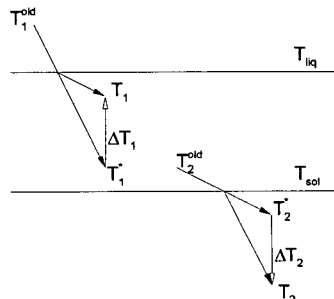


Fig. 1 Schematics for temperature correction in the convective Equivalent Specific Heat method

2.2 이산화방정식

식 (2)의 제 4 항은 온도회복법, 등가비열법, 및 엔탈피법에 의하여 풀 수 있다. 앞서 언급한 바와 같이, 온도회복법은 제 4, 5 항을 방정식상에서 고려하지 않고 제 1, 2, 3 항만을 풀 후 온도장을 수정해준다. 등가비열법에 의한 이산화 과정은 평형 응고 $\left(f_l = \frac{T - T_s}{T_l - T_s}\right)$ 를 가정한다면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \dots = \dots - \frac{\partial}{\partial t}(\rho \Delta H) \\ & c_p \frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \dots \\ & = \dots - \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial}{\partial T}(\rho \Delta H) \quad \text{by} \quad \left(c_p = \frac{dh}{dT}\right) \\ & = \dots - \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial}{\partial T}(\rho L f_l) \quad \text{by} \quad \left(f_l = \frac{T - T_s}{T_l - T_s}\right) \\ & = \dots - \frac{\rho L}{T_l - T_s} \frac{\partial T}{\partial t} \\ & \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + c_p T \frac{\partial \rho}{\partial t} + \dots = \dots - \frac{\rho L}{T_l - T_s} \frac{\partial T}{\partial t} \\ & \rho \left(c_p + f_c(T, T^{old}) \frac{L}{T_l - T_s} \right) \frac{\partial T}{\partial t} + \dots = \dots \quad (3) \end{aligned}$$

함수 $f_c(T, T^{old})$ 는 T, T^{old} 가 모두 상변화영역 밖일 때 0, 그렇지 않으면 1 이다. 대류항인 제 5 항이 없다면 본 식은 상변화를 수반하지 않는 일반적인 에너지방정식과 동일한 형태를 갖는다.

단 원래의 비열 c_p 대신 $c_E = \left(c_p + \frac{L}{T_l - T_s} \right)$ 가 사용된다. 새롭게 계산된 비열 c_E 는 고-액공존 구간에서 원래의 비열 c_p 대신 적용된다. 즉, 잠열의 방출 혹은 흡수가 비열의 변화로서 평가된다. 온도가 고상선 혹은 액상선을 지나며 변할 때 온도장은 반드시 수정되어야 하며, 수정과정을 거치지 않는 경우 심각한 오차가 누적될 수 있다. Fig. 1 은 등가비열법에서 적용되고 있는 온도수정의 개념을 도식적으로 보여준다.

$$\begin{aligned} T_1 &= T_1^* + \Delta T_1 \\ T_2 &= T_2^* - \Delta T_2 \end{aligned} \quad (5)$$

식 (5)에 의해서 수정된 온도 T_1 과 T_2 는 다음과 같은 과정에 의해 계산된다.⁽⁹⁾

$$\int_{T^{old}}^{T_1^*} \rho c_p dT = \int_{T^{old}}^{T_1} \rho c_p dT + \int_{T_1}^{T_1^*} \rho c_E dT \quad (6)$$

$$T_1 = \frac{c_p}{c_E} (T_1^* - T_l) + T_l$$

$$\int_{T^{old}}^{T_2^*} \rho c_E dT = \int_{T^{old}}^{T_s} \rho c_E dT + \int_{T_s}^{T_2^*} \rho c_p dT \quad (7)$$

$$T_2 = \frac{c_E}{c_p} (T_2^* - T_s) + T_s$$

온도회복법에서는 고-액공존역에서 계산된 모든 온도장이 수정되어야 하는 반면, 등가비열법에서는 고상선 혹은 액상선을 통과하는 온도만이 수정된다. 또한 잠열이 에너지방정식상에서 고려되므로 등가비열법은 온도회복법에 비하여 정확도가 크게 개선되었다.

엔탈피법은 엔탈피를 종속변수로 두고 에너지방정식을 이산화시킨다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \dots = \dots - \frac{\partial}{\partial t}(\rho \Delta H) + \dots \\ & = \dots - \frac{\partial}{\partial t}(\rho L f_l) + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho h - \rho^{old} h^{old}}{\Delta t} + \dots \\ & = \dots - \frac{L}{\Delta t} (\rho f_l - \rho^{old} f_l^{old}) + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{이때 } f_l = \frac{T - T_s}{T_l - T_s} \text{ 이고 } f_l^{old} = \frac{T^{old} - T_s}{T_l - T_s} \text{ 이다}$$

엔탈피법은 잠열의 영향을 아무런 수정과정 없이 계산해낸다. 엔탈피법이 가장 정확한 방법으로 알려진 반면, 엔탈피장은 온도장이 고려되는 계산을 위하여 온도장으로 환산되어야 한다.

만약에 등가비열법의 수정과정이 생략될 수 있다면 온도를 종속변수로 하는 수정과정 없는 잠열 해석방법이 될 것이다. 이러한 관점에서 다음의 이산화 과정을 살펴보자.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \dots = \dots - \frac{\partial}{\partial t}(\rho \Delta H) + \dots \quad (10)$$

Table 1 Property values used for phase front tracking

	Pure Iron	Pure Tin (liquid/solid)
Conductivity (J/m sec K)	41.9	51/62
Specific Heat (J/kg K)	627.9	249/243
Density (kg/m ³)	7000	7000
Fusion Temperature (K)	1753	505
Latent Heat (J/kg)	272093	59020
Contact Heat Transfer Coefficient (J/m ² sec K)	2093.0	-
Thermal Expansion Coefficient (K ⁻¹)	-	1.09E-4

$$\begin{aligned}
 c_p \frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \dots &= \dots - \frac{\partial}{\partial t}(\rho L f_l) + \dots \\
 &\text{by } \left(c_p = \frac{dh}{dT}, \Delta H = L f_l \right) \\
 &= \dots - \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\rho L}{T_l - T_s} + \dots \\
 &\text{by } \left(f_l = \frac{T - T_s}{T_l - T_s} \right) \\
 \rho c_p \frac{T - T^{old}}{\Delta t} + \frac{\rho L}{T_l - T_s} \frac{f(T, T^{old})}{\Delta t} + \dots &= (11)
 \end{aligned}$$

형태는 기존의 등가비열법과 유사하지만, 온도함수 항 $\frac{f(T, T^{old})}{\Delta t}$ 이 $\frac{T - T^{old}}{\Delta t}$ 항을 대신하고 있다. 온도함수 항의 $f(T, T^{old})$ 는 다음과 같이 정의되는 함수이다.

$$f(T, T^{old}) = \begin{cases} T - T_l & : T < T_l \text{ and } T^{old} > T_l \\ T - T^{old} & : T_s < T, T^{old} < T_l \\ T_s - T^{old} & : T < T_s \text{ and } T^{old} > T_s \end{cases} \quad (12)$$

함수 $f(T, T^{old})$ 는 온도가 고상선 혹은 액상선을 통과하며 변할 때 잠열이 과다 혹은 과소평가되는

mold of constant temperature (T _c = 293K)	semi-Infinite cast of pure iron (T ₀ = 1753K)
--	---

Fig. 2 Semi-infinite solidification model for validation and application

것을 방지해 준다. 즉 액상율 f_l 이 $0 \leq f_l \leq 1$ 의 범위 내에 들도록 통제하는 역할을 하게 되며, 최종 이산화식은 다음과 같이 나타난다.

$$\left(\rho c_p + \frac{\rho L}{T_l - T_s} \frac{f(T, T^{old})}{T - T^{old}} \right) \frac{T - T^{old}}{\Delta t} + \dots = (13)$$

잠열의 대류항은 금형의 속도가 0 인 경우 풍상차분도식(Upwind scheme)에 의하여 다음과 같이 이산화될 수 있다.

$$\begin{aligned}
 &\nabla(\rho V_m \cdot \Delta H) \\
 &= \nabla(\rho V_m \cdot L f_l) \quad (14) \\
 &= L \left(\sum a_{NB} f_{l,NB} \right) - f_{l,P} \sum a_{NB} \\
 &\sum a_{NB} = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B \\
 &a_E = \max[-\rho_e u_e \Delta A_e, 0] \\
 &a_W = \max[\rho_w u_w \Delta A_w, 0] \quad \dots
 \end{aligned}$$

하첨자 NB 는 제어체적 P 의 주변 제어체적을 의미한다. 해석하고자 하는 물질이 순수 금속인 경우, 식 (2)의 제 5 항은 나타나지 않는다.

3. 수치해석 모델 및 결과

개발등가비열법(MESH method)의 검증을 위하여 Fig. 2 와 같은 반무한 응고시스템⁽⁹⁾에 본 방법을 적용한다. 본 모델에 대한 엄밀해는 식 (15)에 의하여 구해진다.

$$\begin{aligned}
 x &= -2a_s \alpha \phi^2 + 2\phi \sqrt{a_s^2 \alpha^2 \phi^2 + a_s t} \\
 \alpha &= \frac{\rho_s c_{ps}}{\sqrt{\pi} \phi \exp(\phi) [M + \text{erf}(\phi^2)] h} \quad (15)
 \end{aligned}$$

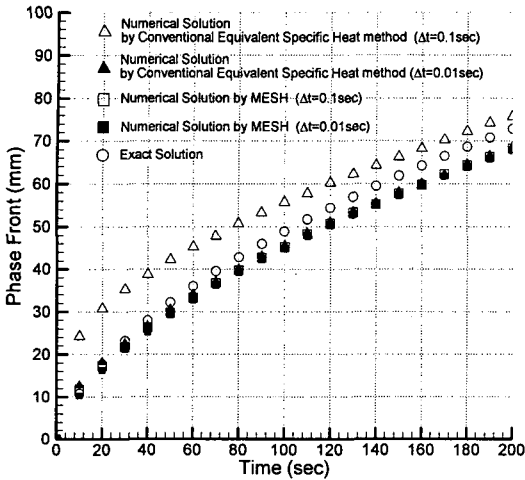


Fig. 3 Comparison of solutions from each method in a semi-infinite unidirectional solidification system

$$\frac{\exp(-\phi^2)}{M + \operatorname{erf}(\phi)}$$

$$= \frac{m(T_p - T_f) \exp(-n^2\phi^2)}{(T_f - T_{m0}) [1 - \operatorname{erf}(n\phi)]}$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi} L \phi}{c_{ps} (T_f - T_{m0})}$$

$$M = \left(\frac{k_s \rho_s c_{ps}}{k_m \rho_m c_{pm}} \right)^{1/2},$$

$$m = \left(\frac{k_s \rho_s c_{ps}}{k_l \rho_l c_{pl}} \right)^{1/2}, \quad n = \left(\frac{a_s}{a_l} \right)^{1/2}$$

이때 열확산계수 $a = k / \rho c_p$ 이고, T_{m0} 는 금형의 온도, L 은 물질의 잠열, h 는 금형과 주물간의 열전달계수, T_p 는 초기온도, 그리고 T_f 는 상변화면에서의 온도(융점)이다. 엄밀해를 위한 계산은 본 연구에서는 생략하고 문헌에 주어진 결과만을 참조하여 Fig. 3 에 도시하였다.⁹⁾ 수치 해석에서는 주물 측에 300 개의 제어체적을 적용시켰으며, 금형과 인접한 영역에 더 많은 제어체적이 배치될 수 있도록 하였다. 주물 측의 반무한 길이를 나타내기 위하여 전체 주물의 길이를 1m 로 두고, 금형과 접한 면의 반대쪽 면은 단열이라고 가정하였다.

응고율의 진행을 Fig. 3 에 나타내었으며, x 축과 y 축은 각각 시간과 상변화면의 위치를 나타낸다.

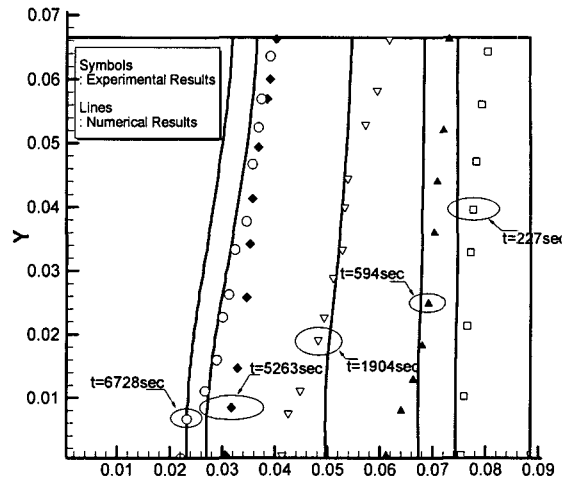


Fig. 4 Phase interface tracking under the effect of natural convection flow in a rectangular mold

두 개의 다른 시간간격을 적용하여 기존의 등가비열법과 개량된 등가비열법을 이용하여 해를 구하였다. 속이 빈 도형은 상대적으로 큰 시간간격($\Delta t=0.1$)을 적용한 결과를, 검은색 도형은 상대적으로 작은 시간간격($\Delta t=0.01$)을 적용한 결과를 보여준다. 또한, 삼각형은 기존의 등가비열법에 의한 결과를, 사각형은 개량된 등가비열법에 의한 결과를 각각 나타낸다. 작은 시간간격을 적용할 경우 기존의 등가비열법에 의한 해석결과가 엄밀해와 비교하여 매우 정확한 해를 구하였으나, 시간간격이 큰 경우 그 오차가 증가하였다. 반면, 개량된 등가비열법을 적용하는 경우 시간간격에 무관하게 엄밀해와 잘 일치하는 해석결과를 얻을 수 있었다. 이는 개량된 등가비열법이 기존의 등가비열법에 비하여 어떻게 개선되었는가를 잘 보여주고 있으며, 개량된 등가비열법의 적용가치를 단적으로 보여준다.

Fig. 4 는 개량된 등가비열법에 의한 또 다른 계산결과를 실험결과와 비교하여 보여준다. 사각형 형상의 주물(0.089m by 0.067m) 의 왼쪽 벽면이 오른쪽 벽면보다 높은 온도로 유지되며 상하면은 단열로 유지되고, 따라서 응고는 일방향으로 일어난다. 주물의 초기온도는 506K 로 이는 왼쪽 벽면의 온도와 동일한 온도이다. 냉각벽면인 오른쪽 벽면의 온도는 502K 로 유지된다. 주물내부의 온도 차로 인하여 자연대류가 발생하고 그 영향하에서 응고가 진행된다. 227 초가 경과한 후의 응고계면은 수치해석 결과에서 실험보다 많이 진행되어 있음을 볼 수 있다. 594 초에서 수치해석에 의해 계산된 응고계면은 227 초의 계면에 비하여 기울기(y 변화량/x 변화량)가 작아졌으나, 실험결과에서 얻어진

기울기는 계산결과에 비하여 더 작게 나타났다. 1904 초, 5263 초 및 6728 초에서의 응고계면의 위치 및 기울기는 수치해석 결과와 실험 결과가 대체로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 상변화면의 기울기 측면에서 고찰할 때 실험결과와 수치해석 결과가 정확히 일치하지 않는 것은 앞서 살펴본 엄밀해의 비교와는 달리 실험의 경우 경계조건이 이상적인 형태로 적용되기 어렵기 때문이다. 즉 초기온도 및 경계온도를 고정시키는 것이 수치해석을 실시하거나 엄밀해를 구하는데 있어 매우 간단한 문제이지만, 실험에서는 많은 노력을 필요로 하고, 역으로 엄밀해를 구하는 과정이나 수치해석 과정에 실험조건을 정확히 대입시키는 것은 매우 어려운 일이다. 이런 한 이유로 실험결과와 수치해석 결과간에 다소간의 차이가 나타나게 된다. 액상영역에서의 유동현상을 고려한 일방향응고의 수치해석에서 적용된 시간간격은 상황에 따라 변화하도록 설정되었지만 매 20 초 마다 데이터를 받도록 설정하였기 때문에 최고 10 초로 제한하였으며, 이는 개량된 등가비열법을 적용할 경우 상황에 따라 수백 초까지도 증가시킬 수 있으나 기존의 등가비열법에는 적용하기 어려운 시간간격이다.

4. 결 론

등가비열법에 기초하여 상변화 열전달 해석을 위한 새로운 방법(MESH method: Modified Equivalent Specific Heat method)을 개발하였으며, 이 방법은 계산과정 중에 어떠한 수정과정도 포함하지 않으므로 기존의 등가비열법에서의 온도수정 및 엔탈피법에서의 온도환산을 위한 과정은 불필요하다. 개량된 등가비열법을 각기 다른 일방향 응고모델에 적용하여 엄밀해(반무한 응고시스템) 및 실험결과(사각용기내 응고)와 비교하였다. 기존의 등가비열법을 반무한 응고시스템에 적용하여 개량된 등가비열법과 비교한 결과, 새로운 방법에 의한 상변화 열전달 해석은 기존의 방법에 비하여 시간간격의 제약을 받지 않고 정확한 계산을 수행할 수 있었으며, 시간간격이 커지는 경우 기존의 등가비열법은 오차의 폭이 커지는 것을 알 수 있었다. 또한 사각용기내의 응고과정에 개량된 등가비열법을 적용한 결과 액상영역에서의 유동현상이 고려되는 경우에도 개발된 새로운 방법이 매우 타당한 결과를 이끌어 낼 수 있음을 보였다.

참고문헌

- (1) Hong, C.P., Umeda, T. and Kimura, Y., 1984, "Numerical Models for Casting Solidification: Part I. The Coupling of the Boundary Element Method and Finite Different Method for Solidification Problems," *Metallurgical Materials Transactions B*, Vol. 15, No. 91, pp. 91~100.
- (2) Hong, C.P., Umeda, T. and Kimura, Y., 1984, "Numerical Models for Casting Solidification: Part II. Application of the Boundary Element Method to Solidification Problems," *Metallurgical Materials Transactions B*, Vol. 15, No. 91, pp. 101~107.
- (3) Lee, J., Mok, J. and Hong, C.P., 1999, "Straight-forward Numerical Analysis of Casting Process in a Rectangular Mold: From Filling to Solidification," *ISIJ International*, Vol. 39, No. 12, pp. 1252~1261.
- (4) Lee, K., Mok, J. and Lee, J., 2001, "The Effect of Thermosolutal Convection on Macro-segregation During Alloy Solidification," *Transactions of the KSME(B)*, Vol. 25, No. 10, pp. 1337~1345.
- (5) Voller, V., 1990, "Fast Implicit Finite Difference Method for the Analysis of Phase Change Problems," *Numerical Heat Transfer B*, Vol. 17, pp. 155~169.
- (6) Lee, J. and Hwang, K., 1995, "Effects of Density Change and Cooling Rate on Heat Transfer and Thermal Stress During Vertical Solidification Processes," *Transactions of the KSME(B)*, Vol. 19, No. 4, pp. 1095~1101.
- (7) Beckermann, C. and Viskanta, R., 1993, "Mathematical Modeling of Transport Phenomena During Alloy Solidification," *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 46, No. 1, pp. 1~27.
- (8) Vreeman, J. and Incropera, F., 2000, "The Effect of Free Floating Dendrites and Convection on Macro-segregation in Direct Chill Cast Aluminum Alloys Part II: Prediction for Al-Cu and Al-Mg Alloys," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 687~704.
- (9) Ohnaka, I., 1984, *Computational Heat Transfer and Solidification - Application to Casting Processes*, 丸善 Cooperation, Japan
- (10) Bennon, W. and Incropera, F., 1987, "A Continuum Model for Momentum, Heat and Species Transport in Binary Solid-Liquid Phase Change System: I. Model Formulation," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 30, No. 10, pp. 2161~2170.
- (11) Bennon, W. and Incropera, F., 1987, "A Continuum Model for Momentum, Heat and Species Transport in Binary Solid-Liquid Phase Change System: II. Application to Solidification in a Rectangular Cavity," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 30, No. 10, pp. 2171~2187.