

< 논문 >

3 차원 설계 영역에서의 요소 연결 매개법을 이용한 위상 최적 설계

정영수[†] · 윤길호* · 김윤영**

(2005년 1월 21일 접수, 2005년 3월 29일 심사완료)

Topology Optimization Using the Element Connectivity Parameterization Method in Three Dimensional Design Domain

Joung Young Soo, Yoon Gil Ho, Kim Yoon Young

Key Words : Topology Optimization(위상최적화), Element Connectivity (요소 연결법), Geometrical Nonlinear(기하 비선형)

Abstract

The objective of this paper is to present the element connectivity parameterization (ECP) for three dimensional problems. In the ECP method, a continuum structure is viewed as discretized finite elements connected by zero-length elastic links whose stiffness values control the degree of inter-element connectivity. The ECP method can effectively avoid the formation of the low-density unstable elements. These elements appear when the standard element density method is used for geometrical nonlinear problems. In this paper, this ECP method developed for two-dimensional problems is expanded to the design of three-dimensional geometrical nonlinear structures. Among others, the automatic procedure converting standard finite element models to the models suitable for the ECP approach is developed and applied for optimization problems defined on general three-dimensional design domains.

기호 설명

- v_e : e 번째 유한요소의 볼륨
- V^* : 재료 구속 조건
- NE : 유한 요소의 개수
- NL : 링크 요소의 개수
- L : 힘을 준 부분에는 1 이고 나머지 0 인 벡터
- n : SIMP 방법과 요소연결매개법의 벌칙 계수
- l_0 : 링크 강성의 상한 값
- W : 목적함수
- H : 구속 조건

1. 서 론

위상최적화 기법은 유한요소에 정의된 설계 변수를 통해 구속조건을 만족시키고 성능을 최대화 하는 위상을 찾는 방법이다.^(1,2) 위상 최적 설계는 80 년대 개발된 이후 계속 발전되어 왔으며 현재 복합 물리계 시스템 (Multiphysics system)설계, 비선형 구조물 설계, 전자기장에서의 최적 설계 등 적용 분야가 점차 넓어지고 있다.⁽³⁻⁶⁾ 반면 이 기법은 주로 선형 구조물의 최적설계를 위해 개발되어 왔기 때문에 비선형 구조물을 최적설계하고자 할 때 여러 가지 문제점이 발생되고 있다.⁽⁷⁻⁹⁾ 대표적인 문제로는 기하 비선형 구조물의 최적설계 때 발생하는 불안정 요소이다.⁽⁷⁻⁹⁾ 이것은 구조물의 대변형(Large displacement)으로 인하여 유한 요소가 과도하게 찌그러져서 뉴턴 랩슨 반복(Newton-Raphson Iteration)에서 수렴이 불안정해지는 문제가 이 불안정 요소를 해결하기 위해서 밀도법에 기반한 일련의 연구가 수행되어왔지만 문제의 근본이 해결되지 못했다.⁽⁷⁻⁹⁾

[†] 서울대학교 대학원 기계항공공학부

* 서울대학교 정밀기계설계공동연구소

** 서울대학교 기계항공공학부 교수

Email : yykim@snu.ac.kr,

TEL : (02)880-7154 FAX : (02)883-1513

최근 이 불안정 요소문제를 해결하기 위하여 요소 연결 매개법(Element Connectivity Parameterization Method, ECP Method)이라는 새로운 위상최적화 정식화 방안이 제안되었다.⁽¹⁰⁾ 이 방법에서는 유한 요소의 밀도가 설계 변수로 사용되는 것이 아니라, 설계 영역을 분할할 때 사용된 유한요소들이 길이가 0 인 일차원 탄성링크(Elastic link)로 연결되었다고 보고, 그 링크의 강성을 변화시켜 최적의 위상을 찾는다. 지금까지 이 방법은 2 차원 문제에만 국한되어 적용된 바, 본 논문에서는 이 방법이 3 차원 기하학적 비선형 문제에도 잘 적용되는지를 살펴보고, 또 발생하는 문제점이 무엇인지를 조사하여 향후 후속 연구의 방향을 제시하고자 한다. 특히, 전통적인 유한요소 모델을 요소 연결 매개법을 적용하기 위한, 링크로 연결된 새로운 모델로 변환하는 방법을 제시하고자 한다.

2. 밀도법을 이용한 위상최적화와 불안정 요소 문제

기하 비선형 구조물에 대한 위상 최적화문제를 밀도법으로 정식화하면 다음과 같다.⁽¹⁰⁾

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\rho} W(\rho) &= \mathbf{L}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}(\rho) \\ \text{Subject to } H &= \sum_{e=1}^{NE} \rho_e v_e \leq V^* \\ \mathfrak{R}({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

식 (1)에서 W 는 목적함수로 여기서는 컴플라이언스를 나타낸다. 그리고, ρ 는 밀도 벡터, \mathbf{U} 는 변위, $\mathfrak{R}({}^{t+\Delta t} \mathbf{U})$ 은 이산화를 통해 얻어진 평형방정식의 오차를 나타내는 벡터이며, ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}$ 는 평형방정식을 만족시키는 구조물의 응답을 나타낸다⁽¹¹⁾ (부록참조). 기존의 밀도법에서는 위의 최적화 문제를 풀기 위해 e 번째 요소의 탄성계수(C_{ijkl}^e)를 다음과 같이, 밀도(ρ_e)에 관한 함수로 모델링 한다.

$$C_{ijkl}^e(\rho_e) = C_{ijkl} \times (\rho_e)^n \quad (2)$$

이 밀도법은 선형 구조물을 최적화하는데 성공적이었지만, 기하학적 비선형 등으로 대변형을 고려

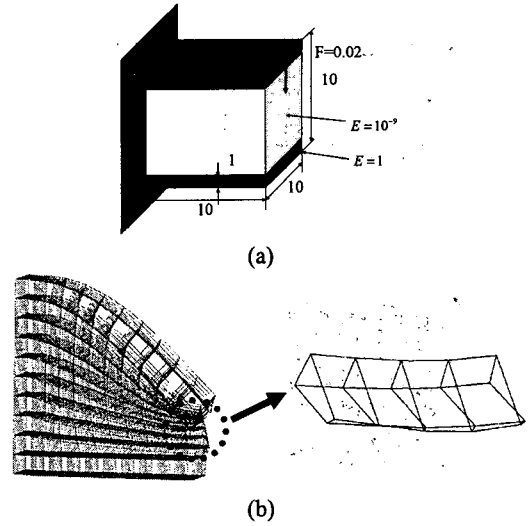


Fig. 1 Unstable element in a 3dimensional design domain (a) a structure (Young's modulus=1, Poisson ratio=0.3, discretized using 10×10×10 meshes), (b) deformed shapes of unstable elements

해야 하는 설계 문제에서는 낮은 밀도의 요소에서 수치적 문제를 일으킨다. Fig. 1에 예시되어 있는 것처럼, 낮은 밀도의 요소에 대변형이 발생할 때 요소의 부피가 음이 되는 불안정 현상이 발생하게 된다.^(7,8) 이러한 불안정 요소가 발생하게 되면, 뉴턴 랩슨 반복해석 시 특별한 수치적 처리를 하지 않으면 그 요소에서는 해가 수렴하지 않는 현상이 발생한다.^(8,9) 더욱이 이런 불안정성은 위상 최적화 전체과정의 수렴성에 문제를 일으키기도 한다.⁽⁷⁻⁹⁾

3. 요소연결매개법을 이용한 위상최적화

3.1 요소연결매개법의 기본개념

앞 절에서 언급한 불안정 요소를 해결하기 위해 최근에 요소 연결 매개법이 제안되었다.⁽¹⁰⁾ 요소 연결 매개법(ECP Method)과 기존의 위상 최적 설계 방법에서 가장 큰 차이점은 설계 변수가 제어하는 대상을 요소 자체가 아닌 요소를 연결시켜 주는 길이가 0 인 링크(Link)로 옮긴 것이다. 이 방법의 특징은 Fig. 2(b)에서와 같이 요소 내의 밀도를 변화시켜 원하는 위상을 표현하는 것이 아니라, Fig. 2(c)에서처럼 링크의 강성 값을 변화시켜 원하는 위상을 표현한다는 것이다.

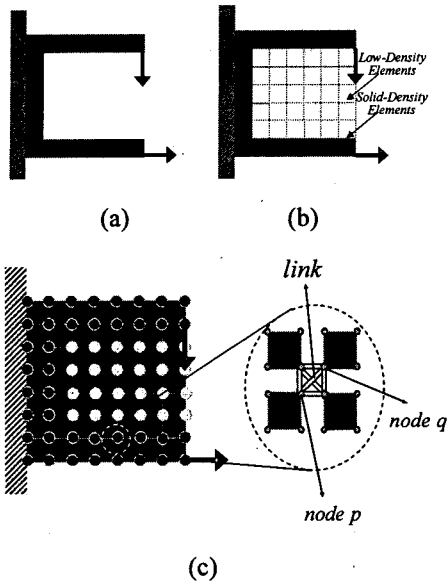


Fig. 2 Layout representations. (a) A structure to be modeled, (b) the representation by the standard density based method, (c) the representation by the ECP method

그리고, Fig. 3에서와 같이 절점 p 와 q 을 연결하는 링크의 강성을 식 (3)과 같이 벌칙화하되, 이러한 링크에 정의되는 설계변수 γ^{pq} 를 식 (4)와 같이 정규화한다.

$$k_e^{link} = l_0 (\gamma_e^{pq})^n k_{nominal}^{link} \tag{3}$$

$$0.01 \leq \gamma_e^{pq} \leq 1 \tag{4}$$

실제 계산을 용이하게 하기 위해, Fig. 2(c)에 있는 6 개의 링크를 따로 모델링하는 것이 아니라, 하나의 변수 γ_e 로 모델링하였으며, 체커보드를 없애기 위해 필터링을 사용한다.⁽¹⁰⁾ 전통적인 유한요소법에서는 절점 p 와 q 는 같은 전체 절점(Global node)를 가리키지만, 요소 연결 매개법에서는 서로 다른 자유도를 갖는 독립된 절점으로 취급하게 된다. 한편 요소 연결 매개법에서는 유한요소가 연결되는 절점에 설계 변수를 두기 때문에, 요소 자체에 설계변수를 두는 전통적인 방법에 비해 전체 설계 변수의 수가 약간 늘어나게 된다.

식 (3)에 정의된 $k_{nominal}^{link}$ 은 다음과 같이 6×6 행렬로 정의되는데 이것은 각 절점 p 와 q 가 각

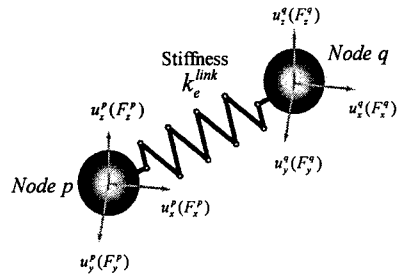


Fig. 3 Link element connecting nodes p and q at connection e

$$k_{nominal}^{link} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

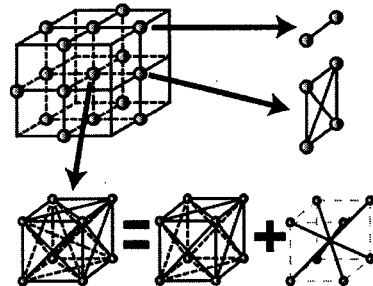


Fig. 4 Three dimensional ECP model

절점에서 3 개의 자유도를 갖는 3 차원 링크에 대한 무차원 강성행렬의 의미를 나타낸다.

3.2 요소 연결 매개법 모델과 일반 유한 요소 모델과의 비교

요소 연결 매개법에서는 유한 요소들이 강결합되어 있는 것이 아니라 일차원 탄성 링크로 연결된다. 따라서 링크 강성 값 l_0 가 수치 해석 결과의 정밀도에 미치는 영향을 평가해 볼 필요가 있다. Fig. 5는 l_0 의 값을 변화시켜 가면서 10 개의 요소로 이루어져 있는 외팔보에 대해 비선형 해석을 수행해 본 결과를 보여주고 있다. 이 결과에서 알 수 있듯이 링크의 강성이 요소의 평균 축강성(\approx

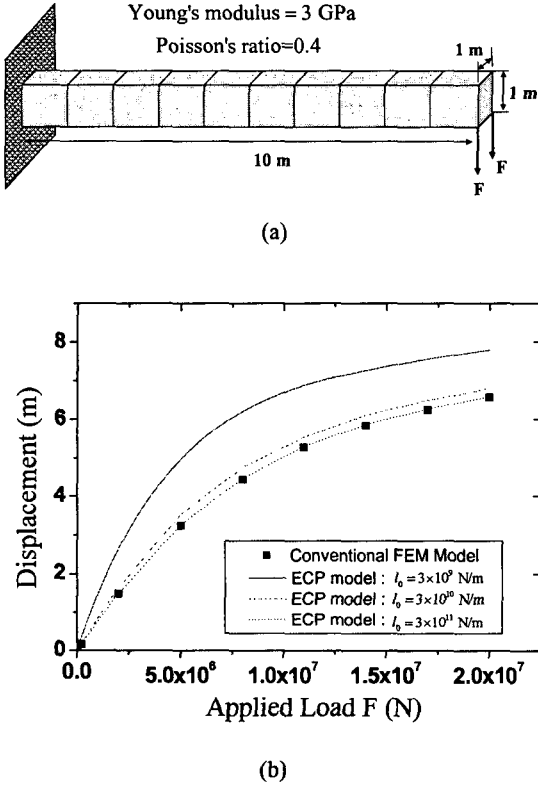


Fig. 5 Non-linear behavior of cantilever beam with conventional FEM model and ECP model, (a) problem definition, (b) load-deflection curve

종탄성계수 \times 요소의 길이)의 100 배 이상이 되면, 링크를 사용한 해석 결과가 링크를 사용하지 않고 강결합된 유한 요소 해석 결과와 거의 일치한다. 본 연구에서는 이 결과를 기초로 요소 연결 매개법에 사용되는 I_0 값을 결정하였다.

3.3 요소 연결 매개법을 이용한 위상최적화

요소 연결 매개법을 이용하는 경우에는, 강성최대화를 위한 위상최적화 문제를 아래와 같이 정식화 한다.

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\gamma} W(\gamma) &= \mathbf{L}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}(\gamma) \\ \text{Subject to } H &= \sum_{e=1}^{NL} \rho_e(\gamma) v_e \leq V^* \quad (6) \\ \mathfrak{R}({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}) &= 0 \end{aligned}$$

여기서 γ 는 γ_e 로 구성되는 설계 변수 벡터이다. 식 (6)으로 정의된 문제의 특징을 강조한다면 밀도법과 달리 설계 영역을 이산화하는데 사용된 요소의 밀도나 탄성 계수가 원 물질의 값을 갖도록 한다는 점이다. 이러한 특징으로 인하여 대변형 해석 때 저밀도(저강성) 요소에 발생할 수 있는 수치적 불안전성이 원천적으로 봉쇄될 수 있다.

민감도 계산을 위해 이 논문에서는 외력이 설계 변수에 독립적이라 가정하여 보조 변수 매개법 (Adjoint Variable Method)을 이용하였다. 그 해석 과정은 다음과 같다.

$$W^* = \mathbf{L}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} + {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\lambda} \times \mathfrak{R}({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}) \quad (7)$$

$$\frac{dW^*}{d\gamma_i} = \mathbf{L}^T \times \frac{d{}^{t+\Delta t} \mathbf{U}}{d\gamma_i} + {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\lambda}^T \times \frac{d\mathfrak{R}}{d\gamma_i} \quad (8)$$

$$\frac{d\mathfrak{R}}{d\gamma_i} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \gamma_i} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_T^{-1} \frac{d{}^{t+\Delta t} \mathbf{U}}{d\gamma_i} \quad (9)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_T^{-1} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{L} \quad (10)$$

$$\frac{\partial W^*}{\partial \gamma_i} = - {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\lambda}_j^T \frac{d\mathbf{k}_j^{\text{link}}}{d\gamma_i} {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_j \quad (11)$$

보조 변수 ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\lambda}$ 을 이용하여 목적 함수를 식 (7)과 같이 W^* 로 변환시킨 후 설계 변수 γ_i 에 대해서 미분하여 최종적으로 식 (11)과 같은 민감도식을 얻는다. 식 (10)에서 ${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_T$ 는 \mathfrak{R} 을 변위에 대해 미분한 탄젠트 행렬(Tangent Matrix)이다.

3차원 요소 연결 매개법으로 최적화된 링크의 강성을 나타내는 표현법으로 이 논문에서는 점방식 표현법(Raster Image Representation)을 사용하였다. 실제 최적설계 과정에는 3 차원 요소의 밀도가 변하지 않지만 결과를 그림으로 표현할 때에는 식 (12)와 같이 3 차원 요소 외부에 있는 링크의 변수 값의 평균을 이용하여 요소의 유무를 표현한다. 이렇게 함으로써 기존의 밀도법에 의한 결과와 유사한 결과를 얻을 수 있기 때문에, 결과의 분석도 용이하다.

$$\rho_{\text{raster}} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \gamma_i \quad (12)$$

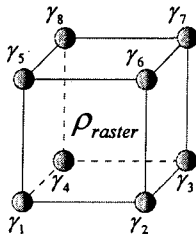


Fig. 6 An element for Eq. (12) in the raster image representation method

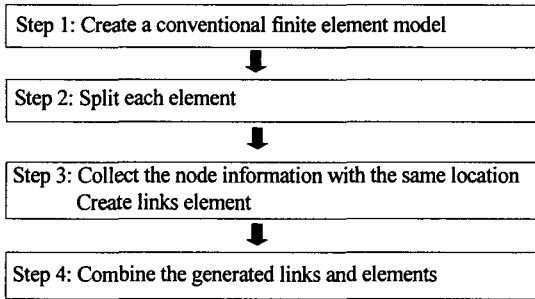
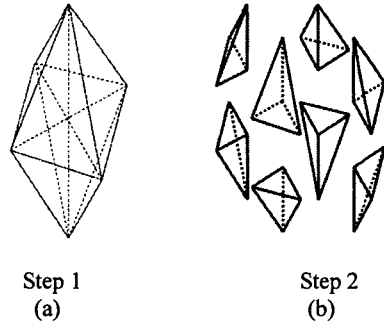


Fig. 7 Flow chart converting a conventional FEM model to an ECP model

3.4 기존 유한 요소 모델의 요소 연결 매개법 모델로의 변환

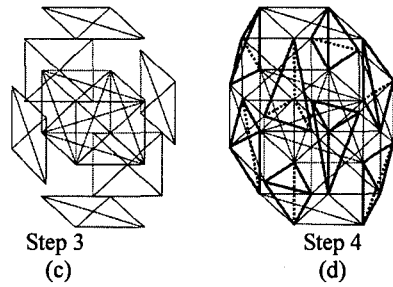
기존의 유한 요소 모델링과는 다르게 요소 연결 매개법은 각 요소가 링크로 연결되어 있다. 따라서 이러한 요소간의 연결상태를 일일이 모델링하는 것은 매우 번거로운 작업이 될 수 있다. 이를 효과적으로 모델링하기 위해서 Fig. 7과 Fig. 8에 기술된 방법을 제안하고자 한다. 이 방법의 특징은 기존의 요소망 구성 결과를 바로 이용할 수 있게 해 준다는 것이다.

Fig. 7과 Fig. 8에 제시된 모델링 방법을 간단히 설명하면 다음과 같다. 제일 먼저 상용 프로그램을 이용하여 일반적인 유한 요소 모델을 생성시킨다. 이제 그 모델을 토대로 Fig. 8(b)에 표시된 것처럼 각 요소를 분리하는 작업을 수행한다. 그 다음 같은 위치에 있는 절점들을 찾아, 그 절점들 사이에 링크 요소를 Fig. 8(c)에서처럼 생성시킨다. 상용프로그램을 이용하여 요소 연결 매개법을 수행하는 경우 링크 요소는 스프링 요소를 사용한다. 같은 위치에 있는 절점의 개수와 링크의 개수는 식 (4)와 같은 조합(Combination)의 관계가 있다.



Step 1 (a)

Step 2 (b)



Step 3 (c)

Step 4 (d)

Fig. 8 The process to convert a conventional FEM model to an ECP model in Fig. 7. (a) Step 1, (b) Step 2, (c) Step 3, (d) Step 4

$$\text{링크의 개수} = \frac{n \times (n-1)}{2} \quad (13)$$

(n: 같은 위치에 놓여져 있는 절점 수)

예를 들어 Fig. 4의 경우를 보면, 모델 내부에서는 28 개의 링크, 표면에서는 6 개의 링크, 모서리에서는 1 개의 링크가 각각 생성된다. Fig. 8에서는 삼각뿔(Tetrahedral) 요소를 사용한 경우에 대한 예시이다. 마지막으로 생성된 링크요소와 3 차원 요소를 합쳐서 요소 매개 연결법에서 사용할 수 있는 모델로 저장한다.

4. 삼차원 기하비선형 위상최적화

이 논문에서 다루고자 하는 문제는 기하 비선형이 고려된 3 차원 위상 최적 설계 문제이다. 최적화 알고리즘으로는 최적화 조건법(Optimality Criterion Method)을 사용하였고 최적화 진행 흐름도는 Fig. 9에 제시하였다.

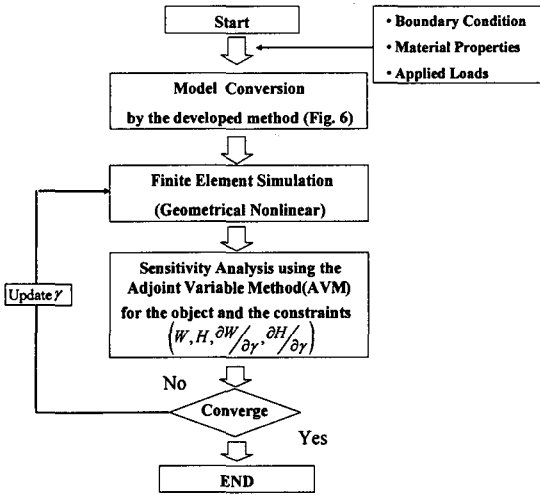


Fig. 9 The flow chart of topology optimization using the element connectivity parameterization method

첫번째 예제: 옆면이 고정된 상자형 구조물
 첫번째 예제로 Fig. 10(a)에 정의되어 있는 문제를 고려하였다. 4 개의 측면을 모두 고정시킨 후 기하학적 비선형을 고려하여 최적화를 수행하였다. Fig. 10(b)는 선형 변형을 고려하여 얻은 결과이고 Fig. 10(c)는 비선형을 고려하여 얻은 결과이다(수치해석 과정에서 요소의 불안정성과 같은 수치적 문제는 발생하지 않는 것을 확인하였음). Fig. 11은 외력을 증가시켰을 때 얻을 수 있는 변위 그래프이다. 이 그림에서 알 수 있듯이 비선형 해석을 통해 얻은 최적의 위상이 선형 해석을 통해 얻은 위상보다 넓은 하중 범위에 대해 효율적인 구조임을 알 수 있다.

두번째 예제: 끝 단이 고정된 후크(Hook) 구조물
 이 문제는 일반적인 형상을 갖는 설계 영역에도 요소 연결 매개법이 잘 적용되는지를 확인해보기 위해 고려한 문제이다. Fig. 12(a)는 구조 컴플라이언스 최소화 문제를 정의한 그림이다. 이 문제에 대해 선형 및 비선형 해석을 사용하여 얻은 최적화 위상은 각각 Fig. 12(b)와 Fig. 12(c)에 나타나 있다. 앞의 예제에서 살펴보았듯이 같은 하중 하에서 비선형을 고려하여 얻은 구조가 선형해석만 고려하여 얻은 구조보다 넓은 범위의 하중 영역에 대해서 큰 강성을 갖는다는 사실을 알 수 있다. (약 21% 향상된 결과)

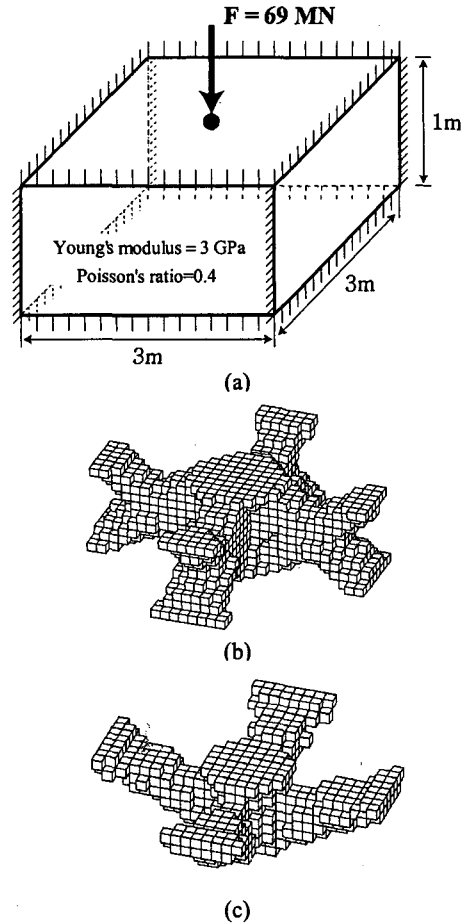


Fig. 10 Compliance minimization of a structure with fixed sides (a) problem definition (mass constraint ratio=25%), (b) an optimized result with linear analysis ($W_{Nonlinear} = 65.206 \times 10^6 J$), (c) an optimized result with nonlinear analysis ($W_{Nonlinear} = 33.229 \times 10^6 J$)

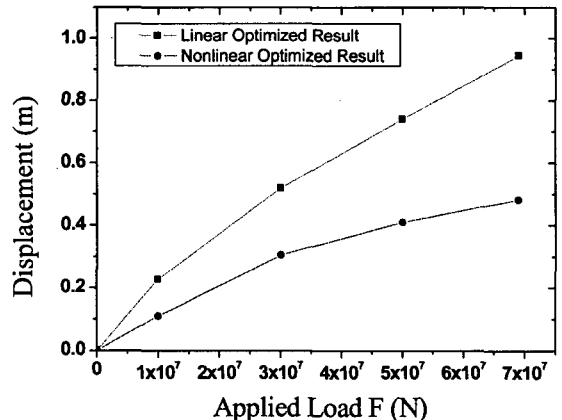


Fig. 11 Load-deflection curve for the results for the problem defined in Fig. 10

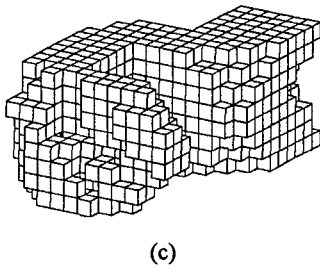
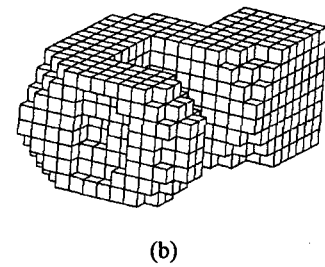
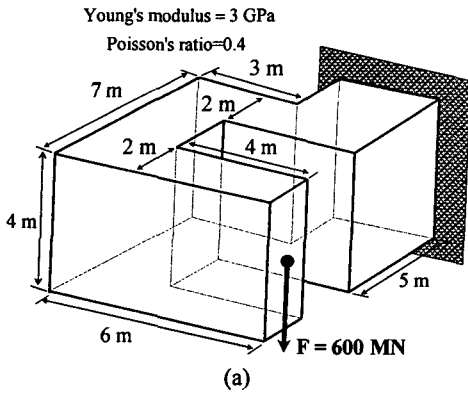


Fig. 12 Compliance minimization of a hook structure (a) problem definition (mass constraint ratio=70%), (b) a optimized result with linear analysis ($W_{Nonlinear} = 53.436 \times 10^8 \text{ J}$), (c) a optimized result with nonlinear analysis ($W_{Nonlinear} = 42.184 \times 10^8 \text{ J}$)

5. 고찰

이 논문에서는 요소 연결 매개법(ECP Method)을 3 차원 기하학적 비선형 구조 위상 최적화에 확장해보았다. 단순한 3 차원 직육면체 설계 영역에서는 물론, 일반 형상의 3 차원 설계 영역에서도 요소 연결 매개법이 잘 적용되었다. 요소의 불안정성 같은 수치적 문제 없이 물리적으로 타당한 해석결과를 얻을 수 있었다. 요소 연결 매개법에서는 요소간을 1 차원 탄성 링크로 연결해야 하기 때문에, 요소 연결 매개법 기반 위상최적 설계 해석 모델의 구축에 약간의 번거로움이 따를 수 있

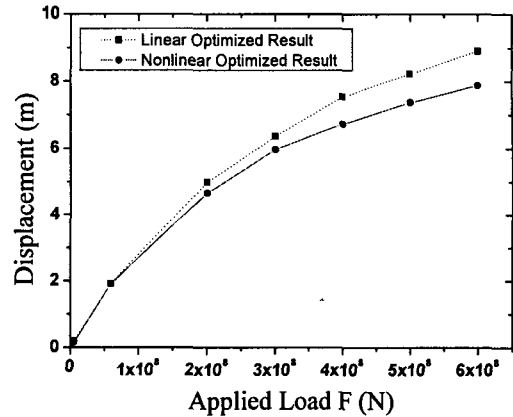


Fig. 13 Load-deflection curve for the results for the problem defined in Fig. 12

다. 이를 해결하기 위해, 기존의 요소망 구성을 기반으로 요소 연결 매개법 해석 모델을 구축할 수 있는 방안을 제시하였다. 하지만 본 연구에서 나타난 요소 연결 매개법의 단점으로는, 해석에 필요한 자유도가 크게 증가하여 유한요소 해석에 필요한 시스템 강성 행렬 크기가 크게 증가한다는 것이다. 예를 들어, 절점 수 $N_x \times N_y \times N_z$ 로 나누어진 3 차원 정육면체 설계 영역의 경우, 기존의 밀도법에는 $N_x \times N_y \times N_z \times 3$ (여기서 3은 절점당 3 자유도를 의미함)의 자유도에 해당하는 전체 강성 행렬을 사용하는 반면, 요소 연결 매개법에서는 $(N_x - 1) \times (N_y - 1) \times (N_z - 1) \times 3 \times 8$ 의 자유도를 갖는 전체 강성 행렬을 사용해야만 한다. 물론 제안된 요소 연결 매개법을 사용하면 전통적인 요소법에서 발생하는 수치 안정성 문제가 없어진다는 장점이 있다. 그렇지만, 전체 강성행렬을 크게 증가시키지 않으면서, 만족스런 결과를 얻을 수 있도록 요소 연결 매개법을 보완하는 연구가 필요하며, 현재 이를 위한 후속 연구가 진행 중이다.

참고문헌

- (1) Bendsøe, M.P. and Kikuchi, N., 1988, "Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 20, pp. 197-224.
- (2) Bendsøe, M.P. and Sigmund, O., 2003, *Topology Optimization*, Springer, New York.
- (3) Yoo, J.H., 2001, "Topology Optimization of a Structure under Harmonic Excitation caused by Magnetic Fields," *Trans. Of KSME(A)*, Vol. 25, No. 10, pp. 1613-1620.
- (4) Park, K.S., Chang, S.Y., Lee, E.S. and Youn, S.K., 2002, "Topology Optimization of the Primary Mirror of

- a Multi-Spectral Camera," *Trans. Of KSME(A)*, Vol. 26, No. 6, pp. 1194~1202.
- (5) Yoo, J.H., 2004, "A Study on the Topology Optimization in Magnetic Fields - Comparisons Between the Density Method and the Homogenization Design Method," *Trans. of KSME(A)*, Vol. 28, No. 4, pp. 370~377.
- (6) Chae, J.S. and Min, S.J., 2004, "Structural Design of Piezoelectric Microactuator Using Topology Optimization," *Trans. of KSME(A)*, Vol. 28, No. 2, pp. 206~213.
- (7) Cho, S.H. and Jung, H.S., 2003, "Design Sensitivity Analysis and Topology Optimization of Displacement-loaded Nonlinear Structures," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, pp. 2539~2553.
- (8) Bruns, T.E. and Tortorelli, D.A., 2003, "An element removal and reintroduction strategy for the topology optimization of structures and compliant mechanisms," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 57, pp. 1413~1430.
- (9) Buhl, T., Petersen, C.W. and Sigmund, O., 2000, "Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 19(2), pp. 93~104.
- (10) Yoon, G.H. and Kim, Y.Y., 2005, "Element connectivity parameterization for topology optimization of geometrically nonlinear structures," *International Journal of Solid and Structures*, Vol. 42(7), pp. 1983~2009.
- (11) Bathe, K.J., 1996, *Finite element procedures*, Prentice hall, New Jersey.

부 록

구조물이 가해진 외력으로 인하여 대변형(Large Displacement)이 생길 경우 이를 고려하여 정확한 응답을 구하기 위해서 기하 비선형(Geometrical Nonlinearity)을 고려한다. 기하 비선형을 고려하기 위해서 그린-라그랑지안 변형율(Green-Lagrangian Strain)과 제 2 차 피올라 키르호프 응력(Second Piolar-Kirchoff Stress)을 고려한 유한요소 정식화를 수행한 후, 뉴턴 랩슨법(Newton-Raphson Method)으로 수치 해석을 할 수 있다. 본 논문에서는 Bathe⁽¹¹⁾ 에서 사용된 기호를 사용하였다.

시간이 t 인 곳에서의 위치와 변위를 각각 $'x_i, 'u_i$ 로 u_i 를 시간 t 에서 $t + \Delta t$ 사이의 변위의 변형량으로 하면 다음과 같은 증분형을

(Incremental Form) 얻는다.

$$'x_i = {}^0x_i + 'u_i, {}^{t+\Delta t}u_i = 'u_i + u_i (i=1,2,3) \quad (A.1)$$

이 논문에서 그린-라그랑지안 변형율(${}^{t+\Delta t}{}_0\varepsilon_{ij}$)과 제 2 차 피올라 키르호프 응력(${}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij}$)과의 관계를 식 (A.3)과 같이 선형으로 모델링하였다.

$${}^{t+\Delta t}{}_0\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial {}^{t+\Delta t}u_i}{\partial {}^0x_j} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t}u_j}{\partial {}^0x_i} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t}u_k}{\partial {}^0x_i} \frac{\partial {}^{t+\Delta t}u_k}{\partial {}^0x_j} \right) \quad (A.2)$$

$${}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij} = C_{ijkl} {}^{t+\Delta t}{}_0\varepsilon_{kl} \quad (A.3)$$

위 식에서 비선형식을 선형화하기 위해 다음 식 (A.4), (A.5), (A.6) 식과 같이 변형율 증분량 ${}_0\varepsilon_{ij}$ 을 선형인 항 ${}_0e_{ij}$ 와 비선형 항인 ${}_0\eta_{ij}$ 으로 표현하였다.

$${}^{t+\Delta t}{}_0\varepsilon_{ij} = 'e_{ij} + {}_0\varepsilon_{ij}, \quad {}_0\varepsilon_{ij} = {}_0e_{ij} + {}_0\eta_{ij} \quad (A.4)$$

$${}_0\eta_{ij} = \frac{1}{2} ({}_0'u_{k,i} {}_0'u_{k,j}) \quad (A.5)$$

$${}_0e_{ij} = \frac{1}{2} ({}_0u_{i,j} + {}_0u_{j,i} + {}_0'u_{k,i} {}_0'u_{k,j} + {}_0'u_{k,i} {}_0'u_{k,j}) \quad (A.6)$$

이를 이용하여 외력 ${}^{t+\Delta t}R$ 에 대하여 초기 해석 영역 0V 에 대해서 가상일의 원리를 선형화하면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$\int_{{}^0V} C_{ijrs} {}_0e_{rs} \delta {}_0e_{ij} d{}^0V + \int_{{}^0V} 'S_{ij} \delta {}_0\eta_{ij} d{}^0V = {}^{t+\Delta t}R - \int_{{}^0V} 'S_{ij} \delta {}_0e_{ij} d{}^0V \quad (A.7)$$

식 (A.7)을 유한요소 해석 절차에 따른 이산화를 통해 시스템 행렬식을 구할 수 있다. 이렇게 얻어진 식에 대해 뉴턴 랩슨법(Newton-Raphson Iteration)을 이용하여 평형방정식을 만족할 때까지 반복 해석을 하여 $t + \Delta t$ 단계에서의 절점변위 벡터 ${}^{t+\Delta t}U$ 를 구한다.