韓國經營科學會誌
第30권 第2號
2005年 6月


# 비대칭 외판원문제에서 Out-of-Kilter 호를 이용한 Perturbation

권 상 호*

# Perturbation Using Out-of-Kilter Arc of the Asymmetric Traveling Salesman Problem

Sang Ho Kwon*

■ Abstract ■

This paper presents a new perturbation technique for developing efficient iterated local search procedures for the asymmetric traveling salesman problem(ATSP). This perturbation technique uses global information on ATSP instances to speed-up computation and to improve the quality of the tours found by heuristic method. The main idea is to escape from a local optima by introducing perturbations on the out-of-kilter arcs in the problem instance. For a local search heuristic, we use the Kwon which finds optimum or near-optimum solutions by applying the out-of-kilter algorithm to the ATSP. The performance of our algorithm has been tested and compared with known method perturbing on randomly chosen arcs. A number of experiments has been executed both on the well-known TSPLIB instances for which the optimal tour length is known, and on randomly generated instances. For 27 TSPLIB instances, the presented algorithm has found optimal tours on all instances. And it has effectively found tours near AP lower bound on randomly generated instances.

Keyword : Out-of-Kilter, Iterated Local Search, Asymmetric Traveling Salesman

논문접수일 : 2004년 11월 15일　논문게재확정일 : 2005년 5월 20일
* 한신대학교 교양학부

# 1. 서 론

외판원문제(TSP: traveling salesman problem)는 고전적인 최적화문제이며 NP문제로 알려져 있다. 외판원문제는 고객이 위치한 교점집합 $N=\{1,2,\cdots,n\}$, 교점을 연결하는 호 집합 $A=\{(i,j): i\neq j, \forall i,j \in N\}$, 호 $(i,j)$의 비용이 $c_{ij}$인 네트워크 $G(N,A)$에서 시작교점을 출발하여 $n$개의 모든 교점을 반드시 한 번만 방문하고 시작교점으로 돌아오는 최소비용의 해밀턴순환로(Hamiltonian cycle)를 찾는 문제이다. 외판원문제는 모든 교점 $i$와 $j$에 대해 비용이 대칭인(즉, $c_{ij}=c_{ji}$) 대칭 외판원문제(STSP : symmetric TSP)와 그렇지 않은 비대칭 외판원문제(ATSP : asymmetric TSP)로 구분된다. 외판원문제는 차량의 경로결정문제, 기계작동을 위한 일정계획문제, 집적회로의 삽입문제, 네트워크 설계문제, 선행제약이 있는 공정순서결정문제 등 그 응용범위가 매우 폭넓다. 그리고 외판원 문제는 문제가 단순함에도 불구하고 NP-hard로 증명된 최적화문제 중 하나이다[6]. 따라서 최적해를 보장하는 최적화 해법보다는 최적해에 근사한 해를 빠르게 구하는 발견적 해법(heuristic)에 대한 많은 연구가 이루어져 왔다[11, 12].

외판원문제를 위한 최적화 해법은 최적해를 보장하는 해법으로 분지한계법(branch & bound method)과 동적계획법(dynamic programming) 등이 있지만, 최악의 경우에는 계산량(complexity)이 지수적이다. 반면 발견적 해법은 최적해는 보장하지 못하지만, 빠른 시간 내에 최적해에 근사한 해를 구한다. 발견적 해법은 크게 경로구성(tour-construction)방법과 경로개선(tour-improvement)방법으로 구분할 수 있다. 경로구성방법은 하나의 해밀턴순환로를 구성하는 방법으로, 그 해법에는 최근거리인접점(nearest neighbor), 삽입(insertion), Christofides, Savings, 연결(patching) 등이 있다[12]. 경로구성방법은 빠르게 해를 구하지만 경로개선방법에 비해 좋은 해를 구하지 못한다. 따라서 최적해 또는 최적해에 근사한 해를 구하기 위해서는 일반적으로 경로개선방법을 이용한다. 경로개선방법은 초기 해밀턴순환로를 구성한 상태에서 일정한 규칙에 따라 해를 지속적으로 개선하다가 종료조건에 따라 해법을 끝내는 방법이다. 대칭 외판원문제를 위한 경로개선방법들 중 대표적인 해법으로는 고전적인 Lin-Kernighan[13]과 그 변형된 해법들[8] 그리고 최근에 개발된 Zhang[16], Helsgaun [7] 등이 있다. 또한 비대칭 외판원문제에 대해서는 최근에 개발된 Kwon[10]이 좋은 해를 효율적으로 구하는 해법으로 알려져 있다[8].

본 연구의 목적은 비대칭 외판원문제에 대해 국지해(local solution)를 탈출하는 효과적인 방법을 개발하여 기존에 좋은 해법이 찾지 못한 최적해를 효율적으로 찾는 것이다. 본 논문에서는 비대칭 외판원문제에서 효율적으로 좋은 해를 찾는 Kwon 해법을 이용하며, 최적해를 찾기 위해 이를 반복 수행한다. Kwon 해법은 최소비용유량문제에서 최적해를 찾는 Out-of-Kilter 해법[4]을 비대칭 외판원문제에 적용한 해법으로, 이들 문제에서 최적해 또는 최적해에 근사한 해를 찾는다. 일반적으로 발견적 해법을 한 번 수행하면 국지해에 빠지지만 이를 반복 수행하면 더 좋은 해를 구할 수 있다[1, 14]. Kwon 해법을 반복 수행하기 위해서는 국지해에서 탈출하는 방법이 필요하다. 본 논문에서는 Kwon 해법에서 호의 특성을 충분히 이용하여 국지해를 탈출하는 새로운 방법을 제시한다.

국지해를 탈출하기 위한 방법에는 국지해를 변형(perturbation)하는 방법과 문제 자체를 변형하는 방법으로 구분할 수 있다[5]. 국지해를 변형하는 방법에는 국지해에서 네 개의 호를 교환하는 Double-Bridge 방법[14], 특정한 호들을 일정한 기간동안 사용하지 못하게 하는 Tabu 방법, 온도를 표현하는 에너지 상수를 사용하여 에너지량에 따라 이웃해(neighborhood)를 선택하는 Simulated Annealing 방법 등이 있다. 이들 방법들 중 Double-Bridge 방법이 효율적이며, 이 방법은 대칭 및 비대칭 외판원문제에 많이 사용되고 있다[1, 8]. 또한 비용행렬로 구성된 문제 자체를 변형하는 방법에

는 무작위로 $m$개의 교점을 선정한 후 그 교점들에 연결된 모든 호의 비용을 0으로 감소시켜 국지해를 탈출하는 방법이 있다. 이는 대칭 외판원문제에 적용된바 있으며, Double-Bridge 방법에 비해 좋은 해를 구한다[1]. 그러나 이 방법은 $m$의 값을 결정하기 어려우며, 무작위로 $m$개의 교점을 선정하기 때문에 매번 실행할 때 마다 해가 달라진다.

본 논문에서는 국지해를 탈출하기 위해 문제 자체를 변형하는 새로운 방법을 제시한다. 새로운 방법은 Kwon 해법을 수행하여 국지해에 빠질 경우, 호의 특성을 이용하여 국지해에 포함될 가능성이 있는 호들만의 비용을 0으로 감소시킨다. 여기서, 국지해에 포함될 가능성이 있는 호들이란 비대칭 외판원문제에 Out-of-Kilter 해법을 적용할 경우 primal-dual 과정에서 국지해에 포함되기 위해 많은 시도가 이루어지는 호들로, 실제 국지해에는 포함되지 못하는 호들이다. Kwon 해법이 국지해에 빠지면 이러한 호들이 남아 있는데, 이 호들의 비용을 0으로 감소시킨 후 다시 Kwon 해법을 수행하면 국지해에서 효과적으로 탈출할 수 있다. 본 논문에서 제시하는 방법을 사용하면 비대칭 외판원문제에서 잘 알려진 27개 TSPLIB[15]의 모든 현실문제에 대해 효율적으로 최적해를 구한다. 실험을 통하여 무작위로 $m$개의 교점을 선정한 후 그 교점들에 연결된 모든 호의 비용을 0으로 감소시키는 방법과 본 논문에서 제시하는 방법을 비교하며, 그 우수성을 보인다.

## 2. Kwon 해법

최소비용유량문제에서 최적해를 찾는 Out-of-Kilter 해법(OK라고 함)을 비대칭 외판원문제에 적용하는 Kwon 해법을 소개한다. OK는 용량제한이 있는 최소비용유량문제에서 최적조건을 이용하여 최적해를 구한다[2, 10]. 비대칭 외판원문제는 최소비용유량문제의 특수한 경우이므로 이를 완화하고 간단한 변환을 통해 OK를 적용할 수 있다. 네트워크 $G(N, A)$에서 호 $(i, j)$를 흐르는 유량을 $f_{ij}$라고 하자. 그러면 비대칭 외판원문제는 다음과 같이 모형화할 수 있다.

**Problem A :**

$$\text{Minimize } \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} f_{ij} \tag{1}$$

$$\text{Subject to } \sum_{j\in N} f_{ji} = 1 \quad \text{for all } i \in N \tag{2}$$

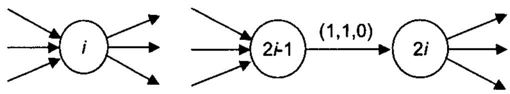
$$\sum_{j\in N} f_{ij} = 1 \quad \text{for all } i \in N \tag{3}$$

$$f_{ij} = 0, 1 \quad \text{for all } (i, j) \in A \tag{4}$$

$$\sum_{i\in S} \sum_{j\notin S} f_{ij} \geq 1 \quad \text{for all proper node subsets } S, |S| \geq 2 \tag{5}$$

식 (2)와 식 (3)은 각 교점에 유량 1이 반드시 들어오고 나가야 한다는 유량보전조건(flow-conservation rule)이다. 식 (4)는 유량이 0 또는 1인 정수이어야 하는 조건이며, 식 (5)는 두 개 이상의 모든 교점의 부분집합 $S$에서 유량이 반드시 하나 이상 나가야 한다는 해밀턴순환로 조건이다. 식 (1)은 유량 1이 흐르는 모든 호들의 비용을 합한 것으로 비대칭 외판원문제의 목적식이다.

비대칭 외판원문제에 OK를 적용하기 위해 네트워크 $G(N, A)$를 $G'(N', A')$로 변환한다. **Problem A**에서 각 교점에 유량 1이 반드시 들어오고 나가야 하므로 각 교점을 두 개의 교점과 이를 연결하는 호로 변환한다. 각 교점 $i$를 두 개의 교점 $(2i-1)$, $2i$와 이를 연결하는 호 $(2i-1, 2i)$로 변환하고, 이 호의 용향하한, 용량상한, 그리고 비용을 각각 1, 1, 0으로 한다([그림 1] 참조). 그러면 홀수 교점 $(2i-1)$은 $2i$를 제외한 다른 짝수교점에서 유량이 들어올 수만 있으며, 짝수교점 $2i$는 $(2i-1)$를 제외한 다른 홀수교점으로 유량이 나갈 수만 있다.




[그림 1] 한 교점을 두 개의 교점과 호로 변환

각 교점을 두 개의 교점과 호로 변환한 네트워크를 $G'(N', A')$, $N' = \{N_{odd}, N_{even}\}$, 그리고 $A'=$

$\{A_{inner}, A_{outer}\}$라 하고, 여기서 $N_{odd}$, $N_{even}$, $A_{inner}$, 그리고 $A_{outer}$를 다음과 같이 정의한다.

$$N_{odd} = \{ l : l = 2i-1, \ \forall i \in N \}$$
$$N_{even} = \{ l : l = 2i, \ \forall i \in N \}$$
$$A_{inner} = \{ (l, m) : \ \forall l \in N_{odd}, \ \forall m \in N_{even} \}$$
$$A_{outer} = \{ (l, m) : \ \forall l \in N_{even}, \ \forall m \in N_{odd} \}$$

그러면 $A_{inner}$에 속한 호의 용량하한과 용량상한은 모두 1이며, $A_{outer}$에 속한 호의 용량하한과 용량상한은 각각 0과 1이다. 호의 비용 $c'_{lm}$과 유량 $f'_{lm}$은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$c'_{lm} = \begin{cases} c_{ij} |_{\, l=2i, m=2i-1}, & \forall (l, m) \in A_{outer} \\ 0, & \forall (l, m) \in A_{inner} \end{cases}$$
$$f'_{lm} = f_{ij} |_{\, l=2i, m=2i-1}, \ \forall (l, m) \in A_{outer}$$

네트워크를 $G'(N', A')$로 변환하고 **Problem A**에서 식 (5)를 제외하면 최소비용유량문제가 되는데, 이에 대한 최적조건을 살펴보자. 쌍대변수(dual variables)를 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_{2n})$라 하고 $\bar{c}_{lm} = \pi_l + c'_{lm} - \pi_m$라고 하자. 그러면, 최적해를 위한 필요충분조건은 각 교점의 유량보전조건 식 (2), 식 (3)과 용량하한과 용량상한이 각각 0과 1인 $A_{outer}$호에 대한 다음의 상보여유조건(complementary slackness condition)이다[2, 4, 10].

If $\bar{c}_{lm} > 0$ then $f'_{lm} = 0$.
If $\bar{c}_{lm} < 0$ then $f'_{lm} = 1$.
If $\bar{c}_{lm} = 0$ then $f'_{lm} = 0$ or 1.

만약 호 $(l, m)$가 이 조건들을 만족하면 이 호를 in-kilter라고 하며, 그렇지 못하면 out-of-kilter라고 한다. $A_{inner}$의 호는 용량하한과 용량상한이 모두 1이므로 만약 이 호이 유량이 1이면 쌍대변수인 교점가(node price)에 무관하게 항상 in-kilter이다.

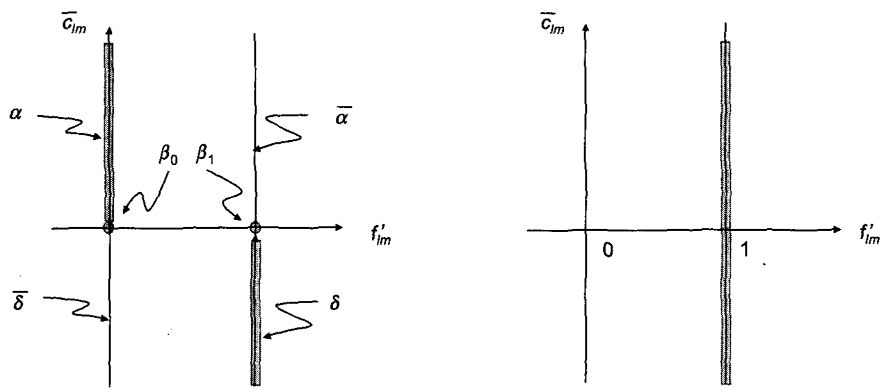
호 $(l, m)$의 kilter 상태를 $K_{lm}$이라 하고, 이를 각각 $\alpha, \bar{\alpha}, \delta, \bar{\delta}, \beta_0, \beta_1$으로 분류하여 다음과 같이 정의한다.

$$K_{lm} = \begin{cases} \begin{cases} \alpha, & \text{if } \bar{c}_{lm} > 0 \text{ and } f'_{lm} = 0 \\ \bar{\alpha}, & \text{if } \bar{c}_{lm} > 0 \text{ and } f'_{lm} = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \delta, & \text{if } \bar{c}_{lm} < 0 \text{ and } f'_{lm} = 1 \\ \bar{\delta}, & \text{if } \bar{c}_{lm} < 0 \text{ and } f'_{lm} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \beta_0, & \text{if } \bar{c}_{lm} = 0 \text{ and } f'_{lm} = 0 \\ \beta_1, & \text{if } \bar{c}_{lm} = 0 \text{ and } f'_{lm} = 1 \end{cases} \end{cases}$$

만약 호의 kilter상태가 $\alpha$, $\delta$, $\beta_0$, 또는 $\beta_1$이면 in-kilter이고, $\bar{\alpha}$ 또는 $\bar{\delta}$이면 out-of-kilter이다. [그림 2]는 호의 kilter상태를 시각적으로 표현한 Kilter도(kilter diagram)이다. [그림 2](a), (b)는 각각 $A_{outer}$와 $A_{inner}$ 호의 kilter상태이며 굵은 실선 또는 점에 호가 위치하면 in-kilter이다. Kwon 해법은 초기 해밀턴순환로에서 시작한다. 따라서 $A_{inner}$의 모든 호에 유량 1이 흐르므로 $A_{inner}$에 속한 모든 호는 항상 in-kilter이다. Out-of-kilter 상태인 호를 유량을 변경하여 in-kilter 상태로 변환하는 방법과 kilter 상태를 악화시키지 않으면서 유량을 증감시키는 방법은 다음과 같다.

만약 호의 kilter 상태가 $\bar{\alpha}$ 또는 $\beta_1$이면 유량을 1 감소시켜 각각 $\alpha$ 또는 $\beta_0$로 변환할 수 있고, $\bar{\delta}$ 또는 $\beta_0$이면 유량을 1 증가시켜 각각 $\delta$ 또는 $\beta_1$으로 변환할 수 있다. 또한 $\alpha$인 호에서 유량을 증가시키려면 교점가 $\pi$를 수정하여 $\beta_0$로 변환한 후 유량을 증가시켜 $\beta_1$이 되게 할 수 있으며, $\delta$인 호에서 유량을 감소시키려면 교점가 $\pi$를 수정하여 $\beta_1$으로 변환한 후 유량을 감소시켜 $\beta_0$가 되게 할 수 있다.

OK는 하나의 out-of-kilter 호를 in-kilter 상태로 변환시키는 과정을 모든 out-of-kilter 호에 적용하여 이들을 모두 in-kilter 상태로 변환시킨다. 하나의 out-of-kilter 호를 in-kilter 상태로 변환시키기 위해 표지법(labelling procedure)을 사용한다. 변환과정에서 in-kilter 호를 out-of-kilter 상태로 악화시키지 않는다. 우선 하나의 out-of-kilter 호를 선정하여 이 호의 시작점(source node)에서 출




(a) $A_{outer}$ 호의 kilter 상태 (b) $A_{inner}$ 호의 kilter 상태

[그림 2] Kilter 도(kilter diagram)

발하여 종착점(sink node)에 이르는 증량가능경로(flow-augmenting path)를 찾는다. 먼저, 시작점을 표지하고 시작점에서 증량 가능한 호를 찾아 교점에 표지한다. 표지한 각 교점을 순서대로 검사(scan)하여 다시 증량 가능한 호를 찾아 교점에 표지한다. 만약 표지된 모든 교점을 검사해도 증량가능한 호를 찾지 못하면, 교점가를 수정한 후 다시 증량 가능한 호를 찾아 교점에 표지한다. 이렇게 표지와 교점가 수정을 반복하여 종착점이 표지되면 증량가능경로를 찾은 것이며 증량가능경로를 통해 유량을 변경한다. 만약 교점가 수정만으로 선정한 out-of-kilter 호가 in-kilter 상태로 변환되면 다음 out-of-kilter 호를 찾아 이 과정을 반복한다. 이 방법을 네트워크 $G'(N', A')$에 적용하면 매 단계(하나의 out-of-kilter 호를 in-kilter 상태로 변환하는 단계)에서 일반적으로 복수 개의 부분순환로(sub-tour)가 발생한다. Kwon 해법은 매 단계에서 발생하는 복수 개의 부분순환로를 Karp의 Patching 해법[9]을 이용하여 하나의 순환로로 연결한다. 또한, Kwon 해법에서 초기해는 배정문제(assingment problem)에서 최적해를 찾는 헝가리언(Hungarian) 해법을 이용하여 복수 개의 부분순환로를 구한 후, 이를 Karp의 Patching 해법을 이용하여 구한다.

만약 Kwon 해법을 수행한 후 잔여 out-of-kilter 호의 개수가 0이면 최적해이다. 그러나 Kwon 해법을 수행한 후 국지해에 빠질 경우 $K_{lm}$이 $\bar{\alpha}$인 호의 개수는 0이지만, $K_{lm}$이 $\bar{\delta}$인 호의 개수는 일정 수 남는다[2, 10]. 이 호들은 out-of-kilter 호이며 $f'_{lm}$이 0인 호로서, Kwon 해법 수행과정에서 국지해에 포함되기 위해 많은 시도가 이루어진 후, 결국 국지해에 포함되지 못하고 out-of-kilter 호로 남는 호들이다. 따라서 이 호들은 국지해에 포함될 가능성이 높은 호들이다.

## 3. 잔여 out-of-kilter 호의 분석

본 절에서는 실험을 통해 Kwon 해법을 수행한 후 남아 있는 잔여 out-of-kilter 호들, 즉 $\bar{\delta}$상태인 호들을 분석하고 이 호들이 국지해에 포함될 수 있는 좋은 호들인가를 확인한다. 우선 작은 예제를 통해 이를 알아본다. [그림 3]은 교점수가 다섯 개인 무작위로 생성한 비대칭 외판원문제(비용행렬)이다. 이 문제에 Kwon 해법을 적용하면 비용 14인 국지해, 1→4→2→3→5→1를 구한다. [그림 3]에서 세모 안에 있는 비용에 해당하는 호들이 국지해를 구성하는 호들이며, 원 안에 있는 비용에 해당하는 호들이 국지해에 포함되지 않고 $\bar{\delta}$상태인 잔여 out-of-kilter 호들이다. 다시 말해, 잔여

out-of-kilter 호는 호 (2, 1), (2, 5), (4, 3) 이다. 호 (2, 1)의 비용 2는 교점 2에서 나가는 호들 중 비용순위가 2이고, 교점 1로 들어오는 호들 중 비용순위는 1이다. 호 (2, 5)의 비용 1은 교점 2에서 나가는 호들 중 비용순위가 1이고, 교점 5로 들어오는 호들 중 비용순위도 1이다. 호 (4, 3)의 비용 2는 교점 4에서 나가는 호들 중 비용순위가 2이고, 교점 3으로 들어오는 호들 중 비용순위는 1이다. 이 예제에서 잔여 out-of-kilter 호들은 국지해에 포함될 수 있는 좋은 호들이며, 전체 호의 개수에 비해 매우 적음을 알 수 있다.

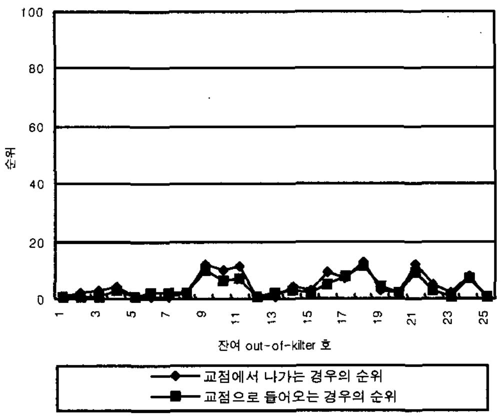
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | — | 8 | 10 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | — | 5 | 2 | 1 |
| 3 | 7 | 5 | — | 7 | 2 |
| 4 | 9 | 1 | 2 | — | 1 |
| 5 | 5 | 9 | 6 | 6 | — |

[그림 3] 교점수 다섯 개인 무작위로 생성한 문제 (비용행렬)와 잔여 out-of-kilter 호

<표 1>은 TSPLIB[15]의 각 문제에서 Kwon 해법을 수행한 후 잔여 out-of-kilter 호의 개수(M)와 이 호가 두 교점 사이에서 들어오는 경우(In)와 나가는 경우(Out)의 호의 비용순위 통계치이다. <표 1>에서 네 개의 rbg 형태의 문제는 잔여 out-of-kilter 호의 개수가 0으로 나타나 생략했다. <표 1>에서 M은 다섯 문제를 제외한 모든 문제에서 전체 호 대비 1% 이내의 적은 개수로 나타났다. 그리고 호의 평균 비용순위는 전반적으로 낮아, 잔여 out-of-kilter 호의 비용이 적음을 알 수 있다. 만약 이러한 좋은 호들의 비용을 0으로 낮추면 이 호들이 해에 포함될 수 있는 기회를 주는 것이 되어 국지해를 효과적으로 탈출할 수 있다. 그리고 큰 비용순위가 가끔 나타나는 이유는 잔여 out-of-kilter 호는 primal-dual 방식으로 국지해를 찾는 과정에서 전역정보(global information)를 갖고 발생하기 때문이다. 사실 대부분의 최적해는 비용순위가 적은 호들로만 구성되어 있지 않고, 몇 개의 호는 비용순위가 큰 경우가 있다. 이러한 복잡함으로 인해 외판원문제가 풀기 어려운 것이다. [그림 4]는 교점수 101개인 ftv100문제에서 각 잔여 out-of-kilter 호의 비용순위를 그래프로 표현한 것이다. [그림 4]에서 잔여 out-of-kilter호의 비용순위가 대부분 10위 이내로 낮게 분포되어 있음을 알 수 있다.

〈표 1〉 TSPLIB 문제에서 잔여 out-of-kilter 호의 특성

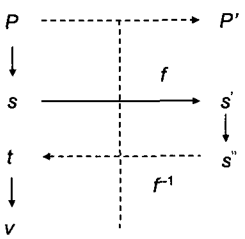
| 문제 | M(전체 호 대비 %) | 호의 비용순위 통계치 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | In | | | Out | | |
| | | Min | Max | Avg. | Min | Max | Avg. |
| br17 | 25(8.0) | 1 | 9 | 3.6 | 1 | 13 | 4.3 |
| p43 | 67(3.6) | 1 | 29 | 6.2 | 1 | 23 | 8.0 |
| ry48p | 46(2.0) | 1 | 16 | 4.1 | 1 | 11 | 3.6 |
| ft53 | 42(1.5) | 1 | 43 | 9.4 | 1 | 29 | 6.0 |
| ft70 | 17(0.3) | 2 | 58 | 17.7 | 1 | 14 | 5.0 |
| ftv33 | 27(2.3) | 1 | 12 | 3.5 | 1 | 21 | 4.7 |
| ftv35 | 11(0.8) | 1 | 15 | 4.2 | 1 | 4 | 1.9 |
| ftv38 | 11(0.7) | 1 | 12 | 3.6 | 1 | 4 | 1.7 |
| ftv44 | 13(0.6) | 1 | 13 | 3.1 | 1 | 4 | 1.7 |
| ftv47 | 15(0.7) | 1 | 9 | 2.6 | 1 | 10 | 3.3 |
| ftv55 | 23(0.7) | 1 | 23 | 5.2 | 1 | 22 | 6.2 |
| ftv64 | 22(0.5) | 1 | 10 | 4.3 | 1 | 25 | 6.0 |
| ftv70 | 13(0.3) | 1 | 5 | 2.2 | 1 | 3 | 2.2 |
| ftv90 | 13(0.2) | 1 | 3 | 1.4 | 1 | 4 | 1.5 |
| ftv100 | 25(0.2) | 1 | 11 | 3.8 | 1 | 13 | 4.7 |
| ftv110 | 22(0.2) | 1 | 5 | 1.9 | 1 | 7 | 2.4 |
| ftv120 | 23(0.2) | 1 | 5 | 1.8 | 1 | 7 | 2.4 |
| ftv130 | 19(0.1) | 1 | 5 | 1.9 | 1 | 16 | 2.7 |
| ftv140 | 22(0.1) | 1 | 7 | 2.1 | 1 | 6 | 1.9 |
| ftv150 | 19(0.1) | 1 | 7 | 2.2 | 1 | 6 | 2.1 |
| ftv160 | 32(0.1) | 1 | 14 | 3.0 | 1 | 10 | 3.1 |
| ftv170 | 41(0.1) | 1 | 10 | 2.6 | 1 | 11 | 2.3 |
| kro124 | 58(0.6) | 1 | 13 | 3.1 | 1 | 17 | 3.5 |




[그림 4] ftv100문제에 Kwon 해법을 수행 후 25개의 잔여 out-of-kilter 호들의 비용순위

## 4. 해법절차

문제를 변형하는 방법은 국지해를 탈출하기 위한 효과적인 방법이다[5]. 문제를 변형하여 국지해를 탈출하는 방법은 [그림 5]와 같다. 그림에서 $P$와 $P'$는 비용행렬로 구성된 문제로서 $P$는 원문제이고 $P'$는 변형한 문제(perturbed problem)이다. 그리고 $s$와 $s'$, 그리고 $s''$는 해를 나타낸다. 우선 $P$를 $P'$로 변형한다. 여기서 $P$의 국지해는 $s$이며 $P'$에 $s$를 반영(mapping: $f$)하면 $s'$가 된다. 일반적으로 $s'$는 $P'$의 국지해가 아니므로 $s'$에서 시작하여 $P'$의 국지해 $s''$를 구한다. 그런 후 $P$에 $s''$를 반영($f^{-1}$)하면 $t$가 된다. 다시 $t$는 $P$의 국지해가 아니므로 이에 대한 국지해, $v$를 구한다.




[그림 5] 문제를 변형하여 국지해 탈출

본 문제 $P$의 비용집합을 $C_{ij}$, 여기서, $C_{ij}=\{c_{ij}: \forall(i,j)\in A\}$, 변형한 문제 $P'$의 비용집합을 $C'_{ij}$로 정의한다. 그러면 문제를 변형하여 국지해법을 반복 수행하는 절차, *ILS*(iterated local search)를 정식화하면 다음과 같다.

***Iterated Local Search(ILS)***

**Step 1.** Find an initial solution $s$ by applying a local search to $C_{ij}$

**Step 2.** Do the following for a given number M iterations.

- **Step 2.1** Obtaining a new solution $t$ starting from $s$.
  - **2.1.1** Find a new set of $C'_{ij}$ by applying a small perturbation to $C_{ij}$
  - **2.1.2** Map the solution $s$ for $C_{ij}$, onto a corresponding solution $s'$ for $C'_{ij}$.
  - **2.1.3** Find a new solution $s''$ by applying a local search procedure to $C'_{ij}$ starting from $s'$.
  - **2.1.4** Map the solution $s''$ for $C'_{ij}$, onto a corresponding solution $t$ for $C_{ij}$
- **Step 2.2** Run local search on $t$ obtaining $v$.
- **Step 2.3** If Length($v$) ≤Length($s$), set $s\leftarrow v$.

**Step 3.** Return $s$.

**Step 2.1**에서 원 문제 $P$,를 $P'$로 변형하는 방법과 **Step 2.2**의 국지해법은 *ILS*가 효과적이냐를 결정하는 중요한 요소들이다. 변형방법이 좋을 경우 (i) $s$의 길이에 가까운 $t$를 구하며, (ii) $s$가 구성하는 순환로와 상당히 다른 순환로 $t$를 구한다. 만약 변형방법으로 특정 호들의 비용을 0으로 감소시키면 (i), (ii)를 모두 만족시킬 수 있다[5].

본 논문에서는 새로운 변형방법($P$를 $P'$로 변형시키는 전략)으로 Kwon 해법을 수행한 후 국지해에 빠질 때 잔여 out-of-kilter 호들의 비용을 0으로 감소시킨다. 잔여 out-of-kilter 호들은 국지해에 포함 될 수 있는 좋은 호들로 국지해에 포함되

지 못한 호들이다[3]. 다시 말해, 본 논문에서 국지해를 탈출하는 새로운 방법은 호의 정보를 이용하여 국지해에 포함되지 못한 좋은 호들의 비용을 낮추어 해에 포함될 수 있는 기회를 주는 것이다. 잔여 out-of-kilter 호의 집합을 $O$, 그 비용집합을 $CO_{ij}=\{c_{ij}:\forall(i,j)\in O\}$라고 하면 본 논문에서 제안하는 절차는 다음과 같다.

***Iterated Kwon by Reducing Cost of Out-of-kilter Arcs***

**Step 1.** Find an initial solution $s$ by applying the Kwon to $C_{ij}$

**Step 2.** Do the following for a given number M iterations.

**Step 2.1** Obtaining a new solution $t$ starting from $s$.

**2.1.1** Find a new set of $C'_{ij}$ by setting $CO_{ij}\leftarrow\phi$

**2.1.2** Map the solution $s$ for $C_{ij}$, onto a corresponding solution $s'$ for $C'_{ij}$.

**2.1.3** Find a new solution $s''$ by applying the Kwon to $C'_{ij}$ starting from $s'$.

**2.1.4** Map the solution $s''$ for $C'_{ij}$, onto a corresponding solution $t$ for $C_{ij}$

**Step 2.2** Run local search on $t$ obtaining $v$.

**Step 2.3** If Length($v$) ≤Length($s$), set $s\leftarrow v$.

**Step 3.** Return $s$.

# 5. 실험결과

본 논문에서는 두 가지 형태의 문제에 대해 실험을 수행하였다. 하나는 잘 알려진 TSPLIB의 모든 문제이며, 다른 하나는 무작위로 발생시킨 문제이다. Kwon 해법을 수행하면 TSPLIB의 27개 문제들 중 21개의 문제에서 최적해를 찾는다[10]. 따라서 최적해를 찾지 못한 여섯 개의 문제에 대해 본 논문에서 제시하는 방법을 적용한다. 그리고 무작위로 발생시킨 문제는 문제크기 100에서 1000까지 각 문제크기별 10문제씩을 생성하여 평균 해와 수행시간을 제시한다. 실험은 Intel Pentium Processor 1.4GHz, 메모리 256 MB가 탑재된 PC에서 수행하였다.

정지조건(stopping rule)은 무작위로 구한 문제의 경우 변형(perturbation) 회수를 정하여 고정하거나 Length($s$)= Length($s''$)인 경우로 하였다. 본 문제의 국지해 보다 변형한 문제에서의 국지해는 일반적으로 적어야 하는데, 같다는 의미는 잔여 out-of-kilter 호의 비용을 0으로 낮추어도 비용개선이 없다는 의미이다. 따라서 잔여 out-of-kilter 호가 해에 포함되지 않아, 더 이상 해의 개선을 기대하기 어렵다. 그리고 TSPLIB 문제와 같이 최적해가 알려진 경우에는 최적해를 찾을 때까지 해법을 수행하였다.

<표 2>는 Kwon 해법이 최적해를 찾지 못한 여섯 개의 문제에 대해 본 논문에서 제시하는 방법(KO)과 기존 방법, 즉 무작위로 $m$개의 교점을 선택하여 이 교점에 연결된 모든 호의 비용을 0으로 낮추는 방법(KR)[1]을 적용하여 해를 구한 것이다. 여기서, $m$은 전체 교점수의 비율로 구하였고, 5%, 10%, 15%로 실험하였을 때 10%에서 가장 좋은 결과를 얻었다. 따라서 본 실험에서는 전체 교점수의 10%에 해당하는 교점수를 $m$으로 하였다. KO, KR, 두 방법 모두 여섯 개의 모든 문제에서 최적해를 구했으며, 최적해를 구할 때까지의 변형 회수와 수행시간을 비교하였다.

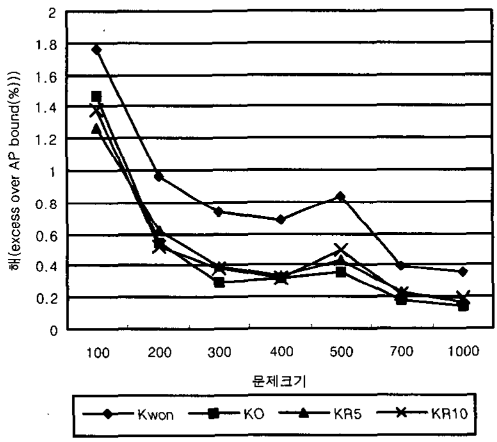
〈표 2〉 TSPLIB 문제에 대한 실험결과

| 문제 | 변형 회수 | | 수행시간(s) | |
|---|---|---|---|---|
| | KO | KR | KO | KR |
| ftv35 | 13 | 45 | 0.32 | 0.72 |
| ftv38 | 15 | 72 | 0.37 | 1.10 |
| ftv47 | 3 | 4 | 0.16 | 0.29 |
| ftv70 | 1 | 18 | 0.17 | 1.37 |
| ftv110 | 1 | 1 | 0.21 | 0.60 |
| kro124 | 133 | 262 | 48.53 | 205.18 |

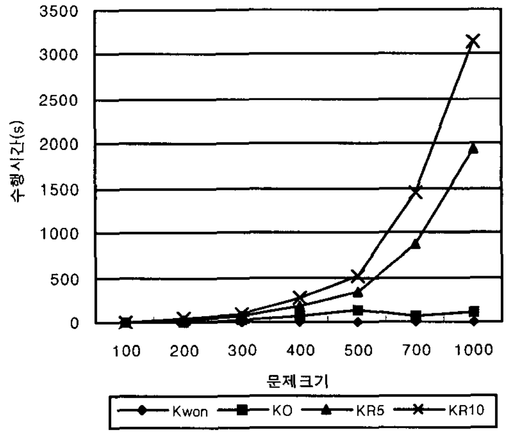
〈표 3〉 비용범위가 {1, 2, …$10^3$}에서 무작위로 생성한 문제에 대한 실험결과

| 문제크기 | 해(excess over AP bound)(%) | | | | 수행시간(s) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Kwon | KO | KR5 | KR10 | Kwon | KO | KR5 | KR10 |
| 100 | 1.76 | 1.47 | 1.26 | 1.38 | 0.09 | 2.07 | 4.88 | 5.94 |
| 200 | 0.96 | 0.54 | 0.62 | 0.52 | 0.40 | 5.78 | 24.52 | 33.97 |
| 300 | 0.73 | 0.29 | 0.39 | 0.38 | 0.64 | 20.70 | 67.83 | 100.21 |
| 400 | 0.68 | 0.32 | 0.33 | 0.32 | 1.03 | 75.59 | 176.12 | 275.68 |
| 500 | 0.83 | 0.35 | 0.43 | 0.49 | 1.42 | 129.30 | 338.16 | 513.31 |
| 700 | 0.39 | 0.18 | 0.23 | 0.21 | 3.83 | 59.00 | 873.32 | 1458.10 |
| 1000 | 0.36 | 0.14 | 0.17 | 0.19 | 8.40 | 100.77 | 1939.20 | 3136.91 |

<표 2>의 모든 문제에서 본 논문에서 제시하는 방법이 최적해를 찾을 때까지의 변형 회수와 수행시간에서 우월함을 알 수 있다. <표 3>은 무작위로 구한 문제에 대한 실험결과이다. <표 3>에서 Kwon은 Kwon 해법을 한 번 수행한 결과이다. 그리고 KR5와 KR10은 각각 $m$의 값을 전체 교점수의 5%, 10%로 하여 실험한 결과이다. 변형 회수는 50으로 하였고, 해는 AP(assignment problem) bound에서 벗어나는 정도로 나타내었다. AP bound는 비대칭 외판원문제의 타이트한 하한이다[8]. 각 문제 크기별로 10개 문제를 실험하여 평균값을 나타내었다. 한 번의 변형에서 Kwon 해법이 두 번 수행되므로 <표 3>에서 KO, KR5, 그리고 KR10은 Kwon 해법이 100번 수행된 것이다. 따라서 <표 3>에서 Kwon의 수행시간이 짧은 것과 해가 좋지 않은 것은 당연한 결과이다. 해를 비교하면, 문제크기 100과 200만을 제외한 모든 문제에서 제시하는 해법, KO가 가장 좋은 해를 구한 것으로 나타났다. 또한 KO는 KR5와 KR10에 비해 문제크기가 커짐에 따라 월등히 빠르게 해를 구하였다. 이렇게 KO가 해를 빠르게 구하는 이유는 변형 회수가 대부분 10이 되기 전에 Length($s$) = Length($s''$)인 경우가 발생하여 해법이 종료되기 때문이다. 그리고 KO는 KR 방법에 비해 비용을 0로 낮추는 호의 개수가 <표 1>의 실험결과와 같이 적기 때문에 문제를 변형하는 시간이 짧다. [그림 6]과 [그림 7]은 <표 3>의 결과를 그래프로 표현한 것이다.




[그림 6] 무작위로 구한 문제에 대한 해의 비교




[그림 7] 무작위로 구한 문제에 대한 수행시간의 비교

# 6. 결 론

외판원문제에서는 최근 좋은 국지해법이 개발되고, 이를 반복시키기 위해 국지해를 탈출하는 방법들이 개발되어 최적해 또는 이에 근사한 해를 효율적으로 구하고 있다. 본 연구에서는 국지해를 탈출하는 방법으로 국지해에 빠질 경우, 잔여 out-of-kilter 호들의 비용을 0으로 낮추어 국지해를 탈출하는 새로운 방법을 제시하였다. 잔여 out-of-kilter 호는 실험을 통해 국지해에 빠지는 동안 호의 전역정보를 담고 있는 좋은 호들로 나타났다. 그리고 이 호들의 개수는 전체 호의 개수에 비해 대부분 1% 이내로 나타나, 이 호들의 비용을 0으로 낮추면 효율적으로 국지해를 탈출한다.

본 연구에서 제시한 해법을 수행한 결과 Kwon 해법이 최적해를 찾지 못한 여섯 개의 모든 문제에서 효율적으로 최적해를 찾았다. 그리고 무작위로 일정한 교점수를 선택하여 이에 연결된 모든 호의 비용을 0으로 낮추는 방법에 비해 효율적이었다. 무작위로 구한 문제에서는 해의 차이는 크지 않지만 문제크기 300 이상의 문제에서는 제시한 해법이 평균적으로 가장 좋은 해를 구했으며, 수행시간에서도 무작위로 교점을 선택하는 방법에 비해 월등히 빠르게 나타났다. 향후, 수행시간을 좀 더 빠르게 하는 방법과 메모리 손실을 최소화하는 방법을 연구할 필요가 있다.

# 참 고 문 헌

[1] 권상호, 김성민, 강맹규, "외판원문제에서 국지해를 탈출하기 위한 비용완화법", 「대한산업공학회지」, Vol.30, No.2(2004), pp.120-129.

[2] 권상호, 김헌태, 강맹규, "비대칭 외판원문제에서 out-of-kilter 호의 특성", 「한국SCM학회지」, Vol.3, No.1(2003), pp.117-124.

[3] 김헌태, 권상호, 지영근, 강맹규, "비대칭 외판원문제에서 호의 후보집합 결정", 「한국경영과학회지」, 제28권, 제2호(2003), pp.129-138.

[4] Ahuja, R.K., T.L. Magnanti and J.B. Orlin, *Network Flows*, Prentice-Hall, Inc., NJ, 1993.

[5] Brun, C., M. Giovanni, M. Luciano and R. Giovanni, "Perturbation : An Efficient Technique for the Solution of Very Large Instances of the Euclidean TSP," *INFORMS Journal on Computing*, Vol.8, No.2(1996), pp.125-133.

[6] Held, M. and R.M. Karp, "The Traveling Salesman Problem and Minimal Spanning Tree," *Operations Research*, Vol.18(1970), pp.1138-1162.

[7] Helsgaun, K., "An Efficient Implementation of the Lin-Kernighan Traveling Salesman Heuristic," *European Journal of Operational Research*, Vol.126(2000), pp.106-130.

[8] Johnson, D.S. and L.A. McGeoch, "The Traveling Salesman Problem : A Case Study in Local Optimization," Local Search in Combinatorial Optimization edited by E.H.L. Aarts and J.K. Lenstra, John Wiley & Sons, Inc., NY, 1997, pp.215-310.

[9] Karp, R.M., "A Patching Algorithm for the Nonsymmetric Traveling Salesman Problem," *SIAM Journal on Computing*, Vol.8 (1979), pp.561-573.

[10] Kwon, S.H., Y.G. G, and M.K. Kang, "Application of the Out-of-Kilter Algorithm to the Asymmetric Traveling Salesman Problem," *Journal of the Operational Research Society*, Vol.54(2003), pp.1085-1092.

[11] Lawler, E.L., Combinatorial Optimization: Networks and Matroids, Holt, Rinehart and Winston, NY, 1976.

[12] Lawler, E.L., J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan and D.B. Shmoys, eds., The Traveling

Salesman Problem, John Wiley & Sons, Inc., NY, 1985.

[13] Lin, S. and B.W. Kernighan, "An Efficient Heuristic Algorithm for the Traveling Salesman Problem," *Operations Research*, Vol. 21(1973), pp.495-516.

[14] Martin, O., S.W. Otto and E.W. Felten, "Large-step Markov Chains for the TSP Incorporating Local Search Heuristics," *Operations Research Letters*, Vol.11(1992), pp.219-224.

[15] Reinelt, G., "TSPLIB : A Traveling Salesman Problem Library," *ORSA Journal on Computing*, Vol.3(1991), pp.376-384.

[16] Zhang, W., "A Note on the Complexity of the Asymmetric Traveling Salesman Problem," *Operations Research Letters*, Vol.20 (1997), pp.31-38.