

훅조인트로 연결된 축계의 비선형 비틀림 진동 : 조합공진의 경우

Nonlinear Torsional Oscillations of a System Incorporating a Hooke's Joint : Combination Resonances

장 서 일†

Seo Il Chang

(2005년 2월 28일 접수 : 2005년 5월 26일 심사완료)

Key Words : Hooke's Joint(훅조인트), Nonlinear Oscillation(비선형진동), Combination Resonance(조합공진)

ABSTRACT

Torsional oscillations of a system incorporating a Hooke's joint are investigated by studying a simple similar nonlinear 2-degree-of-freedom model, which has linear and quadratic nonlinear parametric excitations. The simple system is identified to have the possibilities of primary, sub harmonic and combination resonances. The case of simultaneous primary and combination resonances is selected for perturbation analysis to have the reduced amplitude-equations of motion. The same procedure is applied to the system incorporating a Hooke's joint.

1. 서 론

훅조인트는 구동계의 두 축 사이에서 비틀림 모멘트를 전달하는 요소들 중 하나이다. 잘 알려진 입력각과 출력각 사이의 기구학적 관계는 입력축의 속도가 일정하더라도 출력축의 속도는 주기적으로 변화하며 이러한 현상으로 인해 특정한 입력속도 구간에서 유연한 축의 비틀림 진동이 발생할 수 있다는 사실은 널리 알려져 있다.^(1,2)

이러한 축진동이 발생할 수 있는 입력속도 구간을 예측하기 위해 1-자유도계 모델이 Porter⁽¹⁾에 의해 고안되었다. 그 모델에 따른 비선형 운동방정식이 유도되었으며 Floquet 이론⁽³⁾에 의해 안정선도(stability chart)를 입력회전속도와 두 축의 경사각도의 평면상에서 구했다. Porter와 Gregory⁽⁴⁾는 Kryloff와 Bogoliuboff의 고전적인 방법을 위의 모델의 비선형

운동방정식에 적용해 응답곡선을 구했으며 복수의 응답이 공존하며 도약현상이 발생할 수 있다는 것을 보였다.

Chang⁽⁵⁾은 위의 비선형 운동방정식을 섭동법의 적용이 용이한 형태로 변환하였으며 매개변수가진력(parametric excitation)과 외부가진력(external excitation)이 동시에 존재하는 시스템의 성격을 더 명확히 검증하였다. Strained parameter 방법⁽³⁾을 적용하여 안정선도를 구했으며 고차의 평균법을 적용하여 응답곡선을 구했다.

2-자유도계 모델은 Porter⁽⁶⁾에 의해 고안되어 두 개의 연결된 비선형운동방정식이 유도되었다. 1-자유도계 모델에 적용한 것과 유사한 과정을 통해 응답곡선을 구했으며 조합공진의 경우를 배제하였기 때문에 1-자유도계의 경우와 유사한 결과를 얻었다. 이 운동방정식은 안정선도와 응답을 얻기 위해 연구되어져왔으며 조합(combination)공진의 경우 그 응답에 대한 연구가 수치해석적으로 행해졌다^(7, 8).

장서일⁽⁹⁾은 전술한 2-자유도계 모델의 운동방정식을 채택하여 발생가능한 아조화(subharmonic)공진과 조합공진을 검증하였으며 그 중 한 경우에 대하여 평

† 책임저자 : 정희원, 서울시립대학교 환경공학부
E-mail : schang@uos.ac.kr
Tel : (02) 2210-2177, Fax : (02) 2244-2245

균법을 적용하여 응답에 관한 진폭과 위상의 운동방정식을 얻었다. 그러나 그 운동방정식이 너무 복잡하고 삼각함수를 Taylor 급수로 전개시키기 때문에 많은 수의 항들을 갖게 되고 물리적인 파라미터들의 차수(order)를 연구자의 임의로 정해야 하기 때문에 물리적으로 중요한 항들이 배제될 수도 있는 가능성이 있었다. 또한 특정 공진현상이 어떤 항들에 의해 유발되는지를 검토하기가 어려운 점도 있었다.

위에서 설명한 운동방정식에서 중요한 역할을 하는 항은 변수의 제곱과 시간의 함수, 특히 sine이나 cosine함수와의 곱의 항들. 다시 말하자면 2차의 비선형 매개변수가진력(quadratic nonlinear parametric excitation)임을 알 수가 있으나 이 저자의 조사결과에 의하면 이러한 항을 포함한 2자유도계 시스템은 연구가 되어진 것이 거의 없음을 알 수 있었다. 지금까지의 관련된 연구는 대부분 선형 매개변수가진력과 제곱, 또는 삼제곱의 비선형 항들을 포함한 시스템에 관한 연구가 대부분이었으며 그로 인해 발생할 수 있는 내부공진현상과 관련된 연구가 집중적으로 행해졌다. 이 연구의 목적은 일반적인 2차의 비선형 매개변수가진력을 갖고 있는 2자유도계 시스템이 가질 수 있는 여러 가지 공진 현상, 부연 설명하면 주공진, 아조화공진, 조합공진이 일어날 수 있는 가능성을 검토하고 그 응답을 얻을 수 있는 진폭의 운동방정식을 구하는 것이다. 많은 연구의 대상이 되어온 내부공진 현상은 이 연구의 대상이 아니므로 순수한 비선형항들은 배제되어진다. 이러한 시스템에서 발생할 수 있는 아조화공진과 조합공진을 검증하고 특정공진의 조건 하에서 응답특성을 구하는 방법을 연구하고 그 결과를 혹조인트가 포함된 축계의 해석에 응용한다.

2. 2차의 비선형 매개변수가진을 받는 시스템

전 장에서 설명한 조건들을 갖춘 다음과 같은 2-자유도계 동역학 시스템이 이 연구의 대상이다.

$$\begin{aligned} & \bar{r}_1 + \omega_1^2 \bar{r}_1 + \bar{\nu}_1 \bar{r}_1 \\ & + \cos \Omega t (\bar{e}_1 + \bar{g}_{11} \bar{r}_1 + \bar{g}_{12} \bar{r}_2 \\ & + \bar{f}_{11} \bar{r}_1^2 + \bar{f}_{12} \bar{r}_1 \bar{r}_2 + \bar{f}_{13} \bar{r}_2^2) + \bar{d}_1 = 0, \\ & \bar{r}_2 + \omega_2^2 \bar{r}_2 + \bar{\nu}_2 \bar{r}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \cos \Omega t (\bar{e}_2 + \bar{g}_{21} \bar{r}_1 + \bar{g}_{22} \bar{r}_2 \\ & + \bar{f}_{21} \bar{r}_1^2 + \bar{f}_{22} \bar{r}_1 \bar{r}_2 + \bar{f}_{23} \bar{r}_2^2) + \bar{d}_2 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서 $r_i, \omega_i, \nu_i, \Omega$ 는 각각 i 번째 모드의 변위, 고유진동수, 점성댐핑계수, 가진주파수이고 도트(\cdot)는 시간 t 에 대한 미분을 의미한다. 식 (1)에서 볼 수 있듯이 이 시스템은 외부가진력 $\bar{e}_i \cos \Omega t$, 선형 매개변수가진력 $\bar{g}_{ij} \bar{r}_k \cos \Omega t$, 2차의 비선형 매개변수가진력 $\bar{f}_{ij} \bar{r}_m \bar{r}_n \cos \Omega t, i, j, k, m, n = 1, 2$, 을 갖고 있고 선형, 비선형 매개변수가진력을 통해 연성되어 있다. 가능한 공진현상을 검토한 결과 Table 1과 같이 정리할 수 있다.

Table 1에서 볼 수 있듯이 여러 종류의 주(primary)공진, 아조화공진과 조합공진이 가능하며 일부는 선형 매개변수가진력에 의해, 일부는 비선형 매개변수가진력에 의해 발생한다. 이 논문에서는 조합공진 중 $\Omega \approx -\omega_1 + 2\omega_2$ 의 경우와 $\Omega \approx \omega_1, \Omega \approx \omega_2$ 의 주공진의 경우가 동시에 일어나는 경우에 대한 연구결과를 수록한다. 다음 장의 혹조인트가 포함된 시스템의 비틀림 진동의 연구에서도 같은 경우에 대한 연구결과가 수록된다. 주공진이나 아조화공진을 동반

Table 1 Possible resonances

No.	Frequency relation	Coefficients of relevant forces	Type of resonance
1	$\Omega \approx \omega_1$	$\bar{e}_1, \bar{f}_{11}, \bar{f}_{13}, \bar{f}_{22}$	Primary
2	$\Omega \approx \omega_2$	$\bar{e}_2, \bar{f}_{12}, \bar{f}_{23}, \bar{f}_{21}$	Primary
3	$\Omega \approx 2\omega_1$	\bar{g}_{11}	Subharmonic
4	$\Omega \approx 2\omega_2$	\bar{g}_{22}	Subharmonic
5	$\Omega \approx 3\omega_1$	\bar{f}_{11}	Subharmonic
6	$\Omega \approx 3\omega_2$	\bar{f}_{23}	Subharmonic
7	$\Omega \approx \omega_1 + \omega_2$	$\bar{g}_{12}, \bar{g}_{21}$	Combination
8	$\Omega \approx \omega_1 - \omega_2$	$\bar{g}_{12}, \bar{g}_{21}$	Combination
9	$\Omega \approx \omega_2 - \omega_1$	$\bar{g}_{12}, \bar{g}_{21}$	Combination
10	$\Omega \approx \omega_1 + 2\omega_2$	$\bar{f}_{13}, \bar{f}_{22}$	Combination
11	$\Omega \approx 2\omega_1 + \omega_2$	$\bar{f}_{12}, \bar{f}_{21}$	Combination
12	$\Omega \approx -\omega_1 + 2\omega_2$	$\bar{f}_{13}, \bar{f}_{22}$	Combination
13	$\Omega \approx \omega_1 - 2\omega_2$	$\bar{f}_{13}, \bar{f}_{22}$	Combination
14	$\Omega \approx 2\omega_1 - \omega_2$	$\bar{f}_{12}, \bar{f}_{21}$	Combination
15	$\Omega \approx -2\omega_1 + \omega_2$	$\bar{f}_{12}, \bar{f}_{21}$	Combination

하지 않고 조합공진만이 단독으로 일어나는 경우는 그 해석이 기술적으로 더 어렵다고 판단되어지며 앞으로의 연구과제로 남아있다.

식 (1)의 변수와 parameter에 대해 다음과 같은 rescaling을 실시하고

$$\begin{aligned} \bar{r}_i &= \varepsilon^{1/2} r_i, \bar{v}_i = \varepsilon v_i, \bar{d}_i = \varepsilon^{3/2} d_i, \\ \bar{e}_i &= \varepsilon^{3/2} e_i, \bar{f}_{ij} = \varepsilon^{1/2} f_{ij}, \bar{g}_{ij} = \varepsilon g_{ij} \end{aligned} \quad (2)$$

새로운 시간단위 $\tau = \Omega t$ 와 frequency detuning parameter σ_1, σ_2 를 다음과 같이 도입하면

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega_1}{\Omega}\right)^2 &= 1 - \varepsilon \sigma_1, \\ \left(\frac{\omega_2}{\Omega}\right)^2 &= \left(\frac{\omega_1}{\Omega}\right)^2 - \varepsilon \sigma_2 = 1 - \varepsilon(\sigma_1 + \sigma_2), \end{aligned} \quad (3)$$

식 (1)은 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} r_1'' + r_1 + D_1 \\ + \varepsilon[\mu_1 r_1' - \sigma_1 r_1 + \cos \tau(E_1 + G_{11} r_1 + G_{12} r_2 \\ + F_{11} r_1^2 + F_{12} r_1 r_2 + F_{13} r_2^2)] &= 0, \\ r_2'' + r_2 + D_2 \\ + \varepsilon[\mu_2 r_2' - (\sigma_1 + \sigma_2) r_2 + \cos \tau(E_2 + G_{21} r_1 \\ + G_{22} r_2 + F_{21} r_1^2 + F_{22} r_1 r_2 + F_{23} r_2^2)] &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

여기에서 σ_1 은 external detuning parameter, σ_2 는 internal detuning parameter 이고

$$\mu_i = \frac{v_i}{\Omega}, D_i = \frac{d_i}{\Omega^2}, E_i = \frac{e_i}{\Omega^2}, F_{ij} = \frac{f_{ij}}{\Omega^2}, G_{ij} = \frac{g_{ij}}{\Omega^2}$$

식 (4)에 평균법⁽³⁾을 적용하면 다음과 같은 진폭의 운동방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} x_1' &= -\frac{1}{2} \mu_1 x_1 - \frac{1}{2} \sigma_1 y_1 + \frac{1}{4} F_{11} x_1 y_1 \\ &+ \frac{1}{8} F_{12} y_1 x_2 + \frac{1}{8} F_{12} x_1 y_2 + \frac{1}{4} F_{13} x_2 y_2, \\ y_1' &= -\frac{1}{2} E_1 - \frac{1}{2} \mu_1 y_1 + \frac{1}{2} \sigma_1 x_1 - \frac{3}{8} F_{11} x_1^2 \\ &- \frac{1}{8} F_{11} y_1^2 - \frac{1}{8} F_{13} y_2^2 - \frac{3}{8} F_{13} x_2^2 \\ &- \frac{1}{8} F_{12} y_1 y_2 - \frac{3}{8} F_{12} x_1 x_2 \\ x_2' &= -\frac{1}{2} \mu_2 x_2 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) y_2 + \frac{1}{4} F_{23} x_2 y_2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{8} F_{22} x_1 y_2 + \frac{1}{8} F_{22} y_1 x_2 + \frac{1}{4} F_{21} x_1 y_1, \\ y_2' &= -\frac{1}{2} E_2 - \frac{1}{2} \mu_2 y_2 + \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) x_2 \\ &- \frac{3}{8} F_{21} x_1^2 - \frac{1}{8} F_{21} y_1^2 - \frac{1}{8} F_{23} y_2^2 \\ &- \frac{3}{8} F_{23} x_2^2 - \frac{1}{8} F_{22} y_1 y_2 - \frac{3}{8} F_{22} x_1 x_2 \end{aligned}$$

여기서 식 (5)의 프라임(')은 시간 $\varepsilon \tau$ 에 의한 미분을 의미한다. van der Pol 변환식 $r_i = -D_i + x_i \cos \tau + y_i \sin \tau, i=1, 2$, 이 이용되었고, E_1, E_2 는 상수항으로 식 (4)의 계수 $D_i, E_i, F_{ij}, G_{ij}, i, j=1, 2$, 의 함수이며 그 표현식을 여기에 수록하지는 않는다. 식 (5)에서는 매개변수가진력에 의한 응답이 주 연구대상이기는 하나 외부가진력에 의한 주공진 현상이 복합적으로 포함되기 때문에 식 (5)는 영(zero)의 정상상태 응답을 갖지 않는다.

3. 혹조인트를 포함한 축계의 비틀림 진동

Fig. 1은 혹조인트로 연결된 두 개의 축으로 이루어진 동역학 시스템을 보여주고 있다. 여기에서 θ 는 두 축의 엇각, Ω 는 입력축의 각속도, α_1, β 은 각각 혹조인트의 입력, 출력각, α_2 는 시스템의 출력각, S_1, S_2 는 각각 입력축과 출력축의 비틀림탄성도(torsional stiffness), I_1, I_2 는 각각 입력축과 출력축의 관성모멘트를 나타낸다. 이 시스템의 댐핑은 선형 점성댐핑상수 C_1, C_2 에 의해 결정된다고 가정한다. 축의 질량은 무시할만하고 Fig. 1의 운동방정식은 Porter⁽⁶⁾에 의해 유도되어졌으며 벡터형태로 표현하면 다음과 같다.

$$MX + KX = \varepsilon F(X, X, X, t) + O(\varepsilon^2), \quad (6)$$

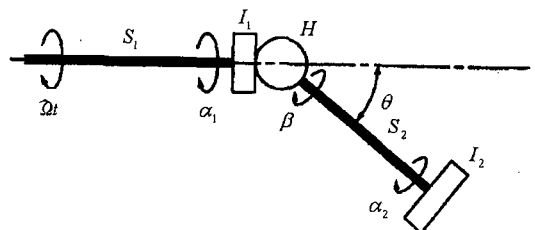


Fig. 1 Hooke's joint system

$$\begin{aligned}
 X &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \\
 K &= \begin{bmatrix} \omega_{11}^2 & -\omega_{21}^2 \\ 0 & \omega_{22}^2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \\
 f_1 &= \left[\frac{1}{2} \omega_{21}^2 y \cos(2x + 2\Omega t) - 2\mu_{11}\omega_{11}(\dot{x} + \Omega) \right], \\
 f_2 &= \left[(\dot{x} + \Omega)^2 \sin(2x + 2\Omega t) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \ddot{x} \cos(2x + 2\Omega t) - 2\mu_{22}\omega_{22}(\dot{x} + \dot{y} + \Omega) \right].
 \end{aligned} \tag{7}$$

식 (6)의 도트(·)는 시간 t 에 대한 미분을 나타내며, 식 (7)의 기호의 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 x &= \alpha_1 - \Omega t, \quad y = \alpha_2 - \beta, \\
 \omega_{11}^2 &= S_1/I_1, \quad \omega_{21}^2 = S_2/I_1, \quad \omega_{22}^2 = S_2/I_2, \\
 C_1/I_1 &= 2\varepsilon\mu_{11}\omega_{11}, \quad C_2/I_2 = 2\varepsilon\mu_{22}\omega_{22}, \\
 \varepsilon &= \sin^2\theta.
 \end{aligned}$$

식 (6)은 2개의 2차 비선형 상미분방정식이며 비선형항들뿐만 아니라 선형항들도 연성되어있다. 섭동법의 적용에 적합한 형태로 변환하기 위해 적절한 선형변환을 적용하고 삼각함수들을 테일러 급수로 대치하면 $O(\varepsilon^0)$ 에서 선형적으로 비연성된 운동방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\dot{r} + Kr = \varepsilon G(r, \dot{r}, \ddot{r}, t) + O(\varepsilon^2). \tag{8}$$

식 (8)에서

$$\begin{aligned}
 r &= P^{-1}X \equiv \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \\
 K &= P^{-1}M^{-1}KP \equiv \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}, \\
 G &= P^{-1}M^{-1}F \equiv \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \\
 \omega_{1,2}^2 &= \frac{1}{2}(\omega_{11}^2 + \omega_{22}^2 + \omega_{21}^2 \\
 &\quad \mp \sqrt{(\omega_{21}^2 + \omega_{11}^2 + \omega_{22}^2)^2 - 4\omega_{11}^2\omega_{22}^2}), \\
 P &= \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad p_1 = \frac{\omega_{21}^2 + \omega_{22}^2 - \omega_1^2}{\omega_{11}^2}, \\
 p_2 &= \frac{\omega_{21}^2 + \omega_{22}^2 - \omega_2^2}{\omega_{11}^2}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

식 (8)의 함수 $G(r, \dot{r}, \ddot{r}, t)$ 는 2차(quadratic)의 비선형항만을 포함하고 있으며 $O(\varepsilon)$ 에서 관성 항이 연성되어 있으므로 r_1, r_2 가 미소하다는 가정 하에 다

음 식과 같은 표준형(standard)으로 변환할 수 있다.

$$\dot{r} + Kr = \varepsilon H(r, \dot{r}, t) + O(\varepsilon^2), \tag{10}$$

식 (10)에서

$$\begin{aligned}
 H &\equiv \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \\
 h_1 &= C_1\mu_{11} + C_2\mu_{22} + C_3\sin 2\Omega t \\
 &\quad + \sin 2\Omega t [C_4\dot{r}_1 + C_5\dot{r}_2 + C_6r_1^2 \\
 &\quad + C_7r_1r_2 + C_8r_2^2 + C_9\dot{r}_1^2 \\
 &\quad + C_{10}\dot{r}_2^2 + C_{11}\dot{r}_1\dot{r}_2] \\
 &\quad + \cos 2\Omega t [C_{12}r_1 + C_{13}r_2 + C_{14}r_1\dot{r}_1 \\
 &\quad + C_{15}r_2\dot{r}_2 + C_{16}r_1\dot{r}_2 + C_{17}\dot{r}_1r_2] \\
 &\quad + C_{18}\dot{r}_1 + C_{19}\dot{r}_2,
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 h_2 &= D_1\mu_{11} + D_2\mu_{22} + D_3\sin 2\Omega t \\
 &\quad + \sin 2\Omega t [D_4\dot{r}_1 + D_5\dot{r}_2 + D_6r_1^2 + D_7r_1r_2 \\
 &\quad + D_8r_2^2 + D_9\dot{r}_1^2 + D_{10}\dot{r}_2^2 + D_{11}\dot{r}_1\dot{r}_2] \\
 &\quad + \cos 2\Omega t [D_{12}r_1 + D_{13}r_2 + D_{14}r_1\dot{r}_1 \\
 &\quad + D_{15}r_2\dot{r}_2 + D_{16}r_1\dot{r}_2 + D_{17}\dot{r}_1r_2] \\
 &\quad + D_{18}\dot{r}_1 + D_{19}\dot{r}_2,
 \end{aligned} \tag{12}$$

식 (11)과 식 (12)의 C_i, D_i 는 시스템의 물리량으로부터 결정되는 계수이다. 식 (11)과 식 (12)을 관찰해보면 전 장의 단순시스템(식 (1))에 비해 더 많은 종류의 항들을 갖고 있으나 기본적으로는 외부가 진력과 매개변수(parametric)가진력이 같이 존재하며 매개변수가진력은 선형뿐만 아니라 2차의 비선형 매개변수가진력을 갖고 있다. 테일러 급수로 대치할 때 3차(cubic) 이상의 항도 포함시키는 경우 3차 이상의 비선형 매개변수가진력이 존재한다. 식 (1)과 비교해보면 식 (1)의 Ω 에 해당하는 것이 2Ω 인 것을 알 수 있다. 가능한 공진의 경우는 Table 1의 내용과 같으나 혼동을 막기 위해 여기에서 다시 한번 정리한다. 아조화공진과 조합공진의 가능성을 선형항들과 비선형항들에 의한 것으로 분리해서 정리하면 선형항들에 의해 가능한 아조화공진과 조합공진은 다음과 같다.

$$\Omega \approx \omega_1, \quad \Omega \approx \omega_2, \quad \Omega \approx \frac{\omega_2 \pm \omega_1}{2}. \tag{13}$$

비선형항들에 의해 가능한 주공진, 아조화공진과 조합공진은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Omega &\approx \frac{\omega_1}{2}, \quad \Omega \approx \frac{\omega_2}{2}, \quad \Omega \approx \frac{3}{2}\omega_1, \\ \Omega &\approx \frac{3}{2}\omega_2, \quad \Omega \approx \frac{\omega_2 \pm 2\omega_1}{2}, \quad \Omega \approx \frac{2\omega_2 \pm \omega_1}{2}. \end{aligned} \quad (14)$$

여기서는 전 장의 단순시스템의 해석의 경우와 같은 다음과 같은 경우에 대해 연구한다.

$$\Omega \approx \frac{1}{2}\omega_1, \quad \Omega \approx \frac{1}{2}\omega_2, \quad \Omega \approx \frac{-\omega_1 + 2\omega_2}{2}. \quad (15)$$

식 (15)가 성립하는 경우 $\omega_1 \approx \omega_2$ 의 조건도 동시에 성립한다. 식 (15)의 조건을 만족하는 경우 다음과 같은 시간의 rescaling과 detuning parameters, σ_1, σ_2 를 도입한다.

$$\begin{aligned} \tau &= 2\Omega t, \\ \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} &= 2^2(1 - \epsilon\sigma_1), \\ \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} &= \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} - 2^2\epsilon\sigma_2. \end{aligned} \quad (16)$$

식 (16)에 의해 식 (10)는 다음과 같이 변환된다.

$$r' + \text{Ir} = \epsilon \overline{H}(r, r', \tau) + O(\epsilon^2), \quad (17)$$

식 (17)에서 프라임(')은 시간 τ 에 의한 미분을 의미하며

$$\begin{aligned} \overline{H} &\equiv \begin{bmatrix} \overline{h}_1 \\ \overline{h}_2 \end{bmatrix}, \\ \overline{h}_1 &= \sigma_1 r_1 + \overline{C}_1 \mu_{11} + \overline{C}_2 \mu_{22} + \overline{C}_3 \sin \tau \\ &\quad + \sin \tau [\overline{C}_4 r_1' + \overline{C}_5 r_2' + \overline{C}_6 r_1^2 \\ &\quad + \overline{C}_7 r_1 r_2 + \overline{C}_8 r_2^2 + \overline{C}_9 r_1'^2 \\ &\quad + \overline{C}_{10} r_2'^2 + \overline{C}_{11} r_1' r_2'] \\ &\quad + \cos \tau [\overline{C}_{12} r_1 + \overline{C}_{13} r_2 + \overline{C}_{14} r_1 r_1' \\ &\quad + \overline{C}_{15} r_2 r_2' + \overline{C}_{16} r_1 r_2' \\ &\quad + \overline{C}_{17} r_1' r_2] + \overline{C}_{18} r_1' + \overline{C}_{19} r_2', \\ \overline{h}_2 &= (\sigma_1 + \sigma_2) r_2 + \overline{D}_1 \mu_{11} + \overline{D}_2 \mu_{22} + \overline{D}_3 \sin \tau \\ &\quad + \sin \tau [\overline{D}_4 r_1' + \overline{D}_5 r_2' + \overline{D}_6 r_1^2 + \overline{D}_7 r_1 r_2 \\ &\quad + \overline{D}_8 r_2^2 + \overline{D}_9 r_1'^2 + \overline{D}_{10} r_2'^2 + \overline{D}_{11} r_1' r_2'] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &+ \cos \tau [\overline{D}_{12} r_1 + \overline{D}_{13} r_2 + \overline{D}_{14} r_1 r_1' \\ &+ \overline{D}_{15} r_2 r_2' + \overline{D}_{16} r_1 r_2' + \overline{D}_{17} r_1' r_2] \\ &+ \overline{D}_{18} r_1' + \overline{D}_{19} r_2' \end{aligned} \quad (19)$$

전 장의 유사 단순 시스템과의 차이점은 ϵ 이 임의의 small parameter가 아니라 두 축의 어긋남의 정도를 의미하는 물리적인 양이며 운동방정식을 유도하는 과정에서 자연스럽게 포함되었다는 것이다. 다시 말하자면 식 (17)은 연구하고자 하는 경우에 적합하게 차수(order)에 맞게 정리가 된 상태가 아니며 이 단계에서 물리적인 의미에 맞게 rescaling 또는 reordering이 행해져야 한다. 이러한 작업이 변수와 파라미터의 rescaling을 통해 이루어지는 것이 바람직하나 뚜렷하지 않은 경우가 있고 바로 이 점이 전 장의 유사 단순 시스템을 연구한 이유이다. 식 (18)과 식 (19)의 $\overline{C}_1 \mu_{11} + \overline{C}_2 \mu_{22}$ 와 $\overline{D}_1 \mu_{11} + \overline{D}_2 \mu_{22}$ 가 $O(\epsilon^0)$ 으로 간주되어야 하며 따라서 다음과 같은 van der Pol 변환을 식 (17)에 적용해야 하고,

$$r_i = x_i \cos \tau + y_i \sin \tau + c_i, \quad i = 1, 2. \quad (20)$$

평균법⁽³⁾을 이용하면 다음과 같은 1차원 줄어든 진폭의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} x_1' &= (c_1 \mu_{11} + c_2 \mu_{22})x_1 - \frac{1}{2} \sigma_1 y_1 \\ &\quad + (c_3 \mu_{11} + c_4 \mu_{22})x_2 + c_5 x_1^2 + c_6 y_1^2 \\ &\quad + c_7 x_2^2 + c_8 y_2^2 + c_9 x_1 x_2 + c_{10} y_1 y_2 + e_1 \\ y_1' &= \frac{1}{2} \sigma_1 x_1 + (c_{11} \mu_{11} + c_{12} \mu_{22})y_1 + \\ &\quad + (c_{13} \mu_{11} + c_{14} \mu_{22})y_2 + c_{15} x_1 y_1 \\ &\quad + c_{16} x_2 y_2 + c_{17} x_1 y_2 + c_{18} y_1 x_2 + e_2 \\ x_2' &= (d_1 \mu_{11} + d_2 \mu_{22})x_1 \\ &\quad + (d_3 \mu_{11} + d_4 \mu_{22})x_2 + (-\frac{1}{2} \sigma_1 - \frac{1}{2} \sigma_2)y_2 \\ &\quad + d_5 x_1^2 + d_6 y_1^2 + d_7 x_2^2 + d_8 y_2^2 \\ &\quad + d_9 x_1 x_2 + d_{10} y_1 y_2 + e_3 \\ y_2' &= (d_{11} \mu_{11} + d_{12} \mu_{22})y_1 + (\frac{1}{2} \sigma_1 + \frac{1}{2} \sigma_2)x_2 \\ &\quad + (d_{13} \mu_{11} + d_{14} \mu_{22})y_2 + d_{15} x_1 y_1 \\ &\quad + d_{16} x_2 y_2 + d_{17} x_1 y_2 + d_{18} y_1 x_2 + e_4 \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)의 프라임(')은 시간 $\epsilon \tau$ 에 의한 미분을 의미하고 계수 c_i, d_i 의 표현식은 이 논문에서는 제

시되지 않는다.

식 (21)의 복잡성 때문에 이론적인 분기(bifurcation)해석은 이 저자가 알고 있는 한 불가능하며 수치해석은 장서일⁽⁹⁾에서 유사한 시스템에 대해 예를 들어 행해졌으므로 이 논문에서는 생략한다.

4. 요약 및 앞으로의 연구과제

혹조인트로 연결된 유연한 두 축의 비선형 진동 응답을 연구하기 위해 2차의 비선형 매개변수가진력을 갖고 있는 유사 단순 시스템에 대한 해석이 수행되었다. 가능한 주공진, 아조화공진, 조화공진 등을 검증하고 그 중 주공진과 조화공진이 동시에 발생하는 경우에 대해 섭동법 중 하나인 평균법을 적용하여 진폭의 운동방정식을 구하였고 같은 해석과정을 혹조인트가 포함된 축계의 해석에 적용하였다.

2차의 비선형 매개변수가진력을 갖고 있는 시스템은 이 논문의 대상인 혹조인트가 포함된 축계 외에도 치차(gear)의 진동시스템 등에도 존재하는 것이 Schmidt와 Tondl⁽¹⁰⁾에 의해 설명되었으므로 관심 있는 연구자들에 의한 광범위하고 체계적인 연구가 필요하다 하겠다.^(11,12)

후 기

이 논문은 2003년도 서울시립대학교 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.

참 고 문 헌

(1) Porter, B., 1961, "A Theoretical Analysis of the Torsional Oscillation of a System Incorporating a Hooke's Joint", *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 3, pp. 324~329.

(2) 이창노, 김효준, 2002, "센터 베어링으로 지지된 추진축을 갖는 구동계의 차량 출발시 진동해석", *한국소음진동공학회논문집*, 제 12 권, 제 12 호, pp.

929~934.

(3) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, *Nonlinear Oscillations*, Wiley-Interscience.

(4) Porter, B. and Gregory, W., 1963, "Non-linear Torsional Oscillation of a System Incorporating a Hook's Joint", *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 5, pp. 191~200.

(5) Chang, S. I., 2000, "Torsional Instabilities and Non-linear Oscillation of a System Incorporating a Hooke's Joint", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 229, No. 4, pp. 993~1002.

(6) Porter, B., 1964, "Non-linear Torsional Oscillation of a Two-degree-of-freedom System Incorporating a Hooke's Joint", *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, Vol. 277, pp. 92~106.

(7) Asokanthan, S. F. and Wang, X.-H., 1996, "Characterization of Torsional Instabilities in a Hooke's Joint Driven System via Maximal Lyapunov Exponents", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 194, No. 1, pp. 83~91.

(8) Asokanthan, S. F. and Meehan, P. A., 2000, "Non-linear Vibration of a Torsional System Driven by a Hooke's Joint", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 233, No. 2, pp. 297~310.

(9) 장서일, 2003, "혹조인트로 연결된 축계의 비선형 비틀림 진동의 분기해석: 2-자유도계 모델", *한국소음진동공학회논문집*, 제 13 권, 제 4 호, pp. 317~322.

(10) Schmidt, G and Tondl, A., 1986, *Non-linear Vibrations*, Cambridge University Press.

(11) 정구충, 임재훈, 최연선, "부가질량을 갖는 구속 외팔송수관의 비선형 동특성", *한국소음진동공학회논문집*, 제 14 권, 제 7 호, pp. 561~568.

(12) 여명환, 이원경, 2001, "원판의 비선형 비대칭 강제진동응답", *한국소음진동공학회논문집*, 제 11 권, 제 4 호, pp. 65~70.