

# 난류 와류의 입사에 의한 이차원 평판 에어포일 캐스케이드의 광대역 소음장의 계산

## Computation of Broadband Noise of a 2-D Flat-airfoil Cascade Subject to Ingested Turbulence

정 철 응† · 조셉필립\* · 이 수 갑\*\*

Cheolung Cheong, Phillip Joseph and Soogab Lee

(2005년 2월 4일 접수 : 2005년 5월 14일 심사완료)

**Key Words :** Turbulence-Cascade Interaction Noise(난류-캐스케이드 상호간섭소음), Fan Broadband Noise(팬 광대역 소음), Turbo-fan Engine Noise(터보-팬 엔진 소음)

### ABSTRACT

Acoustic power spectrum of the upstream and downstream sound field due to an isotropic frozen turbulent gust impinging on a cascade of flat plate airfoils are computed by using a analytic formulation derived from Smith's method, and Whitehead's LINSUB codes. A parametric study of the effects on sound power of the number of blades and turbulence length scale is performed with an emphasis on analyzing the characteristics of sound power spectrum. Through the comparison of the computed results of sound power, it is found that acoustic power spectrum from the 2-D cascade subject to a ingested turbulence can be categorized into two distinct regions: one is lower frequency region where some spectral components of turbulence do not contribute to the cut-on acoustic modes and therefore the effect of the cascade geometry is more dominant; the other is higher frequency region where all of spectral components of turbulence make contributions to cut-on acoustic modes and thus acoustic power is approximately proportional to the blade number.

### 기 호 설 명

$\alpha$  : Wavenumber of the generated disturbance in the axial-direction  
 $a$  : Sound speed  
 $\beta$  : Wavenumber of the generated disturbance in the gap-wise direction  
 $B$  : The number of airfoils in Cascade

$c$  : Airfoil chord length  
 $\Gamma$  : Vortex strength  
 $k_i$  : Wavenumber of a ingested turbulence  
 $\lambda$  : Reduced frequency  $\omega c/W$   
 $M_1$  : Mach number in the axial direction  
 $M_2$  : Mach number in the gap-wise direction  
 $M$  : Mach number of mean-flow  
 $\omega$  : Angular frequency  
 $p$  : Pressure perturbation  
 $\rho$  : Density perturbation  
 $\rho_0$  : Mean-stream density  
 $\sigma$  : Interblade phase angle  
 $s$  : Blade spacing  
 $\theta$  : Stagger angle,  $\tan^{-1}(U_2/U_1)$

† 책임저자 : 정희원, 한국표준과학연구원 물리표준부 음향진동실  
E-mail : ccheong@kriss.re.kr  
Tel : (042) 868-5783, Fax : (042) 868-5643

\* 영국, Institute of Sound and Vibration Research

\*\* 정희원, 서울대학교 기계항공공학부

- $U_i$  : Mean Velocity in  $x_i$ -direction  
 $u_i$  : Velocity perturbation in  $x_i$ -direction  
 $W$  : Mean-flow speed,  $\sqrt{U_1^2 + U_2^2}$   
 $w$  : Upwash velocity perturbation  
 $x_i$  : Cartesian duct coordinate system, Fig. 1  
 $y_i$  : Cartesian cascade-fixed coordinate system, Fig. 1  
 $z$  : Coordinate measured in direction of airfoil chord, Fig. 1

## 1. 서 론

환경에 대한 관심이 나날이 증가하면서 공항주변에 항공기에 의한 소음공해가 중요한 환경문제로 대두되어 항공기에 대한 소음규제가 지역적 또는 국제적으로 매우 강화되고 있는 추세이다. 이에 따라 항공기 소음을 줄이기 위한 연구가 최근에 많이 이루어지고 있다<sup>(1,2)</sup>.

항공기 소음은 발생원인에 따라 웬 소음, 제트 소음, 동체소음으로 크게 구분할 수 있다. 최근 여객기에 엔진효율을 높이기 위하여 높은 바이패스비(bypass ratio)를 가진 엔진을 사용함에 따라 웬 관련 소음이 가장 중요한 소음원이 되고 있다. 웬 소음은 주파수 특성에 따라 순음성소음(tonal noise)과 광대역소음(broadband noise)으로 나눌 수 있다. 순음성 소음은 특정 주파수에 맞추어 설계된 흡음재를 엔진 나셀(nacelle)의 내부벽면에 설치하여 많이 감소시킬 수 있게 됨에 따라 최근에 광대역 소음이 상대적으로 중요성을 더해가고 있다.

웬 광대역 소음은 크게 상호간섭소음과 웬 자체소음(self-noise)으로 나눌 수 있다. 상호간섭소음은 입구유동 난류와 웬, 웬의 난류 후류(wake)와 고정자(stator) 또는 지지대(strut)의 상호작용에 의하여 발생하고 일반적으로 자체소음보다는 큰 소음레벨을 발생시키는 것으로 알려져 있다.

최근에 웬 광대역 소음에 대한 많은 이론 모델들이 개발되었다<sup>(3,4)</sup>. 일반적으로 개발된 이론 모델들이 광대역 소음의 기본적인 스펙트럼 특성과 블레이드 수나 장착 각도에 따른 정성적인 변화는 잘 예측하는 것으로 알려져 있으나 기본적인 발생 원리와 주파수 특성에 대한 구체적 이해는 여전히 부족하다.

이 논문에서는 상호간섭 광대역 웬소음의 기본적인

특성을 분석하기 위하여 이차원 평판 에어포일 캐스케이드(cascade)와 난류의 간섭에 의한 음향장의 음향 파워 스펙트럼을 예측할 수 있는 이론식을 Smith의 방법<sup>(5)</sup>을 기본으로 유도하였다. 유도한 이론식과 변형한 Whitehead's LINSUB 프로그램<sup>(6)</sup>을 이용하여 난류 와류와 이차원 캐스케이드의 상호작용에 의한 광대역 음향장을 계산하였다. 블레이드 수와 난류의 적분 길이 스케일의 변화에 따른 음향 파워스펙트럼의 변화를 비교 분석하여 광대역 소음의 기본적인 발생 원리와 주파수 특성에 대해서 분석하였다.

## 2. 음향장 방정식의 유도

### 2.1 기본 방정식

이 논문에서 다룰 캐스케이드-난류 모델을 Fig. 1에서 간략히 나타내었다. 삼차원 평판 에어포일 캐스케이드를 이차원으로 펼치고 난류는 자유류를 따라 대류를 한다고 가정하였다. 점성 영향은 무시하였으며 자유류의 입사각도를 영으로 가정하였다. 자유류에 대한 모든 섭동(perturbation)값들을 상대적으로 작다고 가정하면 지배방정식은 선형화된 Euler방정식으로 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho_0 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

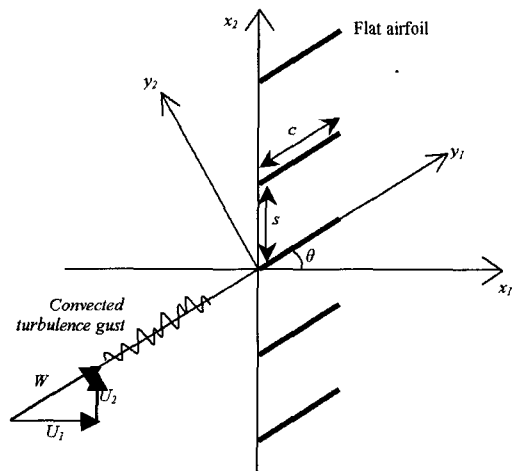


Fig. 1 The cascade geometry and the convected turbulence gust

유동을 등엔트로피(isentropic)로 가정하여 섭동 양들의 파동해(wave solution)를 다음과 같이 표현하고,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{p} \end{pmatrix} e^{i(\omega t + \alpha x_1 + \beta x_2)} \quad (3)$$

식 (3)을 식 (1), (2)에 대입하면 다음과 같은 연립방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} a^2 \alpha \rho_0 & a^2 \beta \rho_0 & (\omega + U_1 \alpha + U_2 \beta) \\ (\omega + U_1 \alpha + U_2 \beta) & 0 & \alpha / \rho_0 \\ 0 & (\omega + U_1 \alpha + U_2 \beta) & \beta / \rho_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{p} \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

위 행렬식의 특성방정식은 아래와 같으며,

$$(\omega + U_1 \alpha + U_2 \beta)^2 - a^2 (\alpha^2 + \beta^2) = 0 \quad (5)$$

$$(\omega + U_1 \alpha + U_2 \beta) = 0 \quad (6)$$

식 (5)와 식 (6)은 각각 음향파(acoustic wave)와 와류파(vorticity wave)의 이산관계보존식을 나타낸다. 식 (5)와 식 (4)를 이용하면 다음과 같은 음향 섭동량과 관련된 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{\bar{p}}{\bar{u}_2} = -\frac{(\omega + U_1 \alpha + U_2 \beta) \rho_0}{\beta} \quad (7)$$

인접한 블레이드 사이에 위상차가  $\sigma$ 이면 캐스케이드로부터 전파해가는 음향파의 원주방향의 파수  $\beta$ , 는 다음식을 만족한다.

$$\beta_r = \frac{\sigma - 2\pi r}{s} \quad (8)$$

여기서  $r$ 은 정수이다. 식 (5)를  $\alpha$ 에 대해서 정리하면 이차방정식이 되고 그 해는  $\beta$ 와  $\omega$ 를 이용해서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\alpha^\pm = \frac{M_1(\omega/a + M_2 \beta) \pm \sqrt{(\omega/a + M_2 \beta)^2 - (1 - M_1^2) \beta^2}}{1 - M_1^2} \quad (9)$$

여기서 + 위첨자는 상류로, - 위첨자는 하류로 전파해가는 음향파의 파수를 뜻한다. 식 (6)과 (4)를 이용하면 와류 섭동량과 관련된 식을 구할 수 있다.

$$\frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2} = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad \bar{p} = 0 \quad (10)$$

와류파의 원주방향 파수도 식 (8)을 만족한다. 식 (6)을  $\beta$ 와  $\omega$ 를 이용해서 표현하면 아래와 같다.

$$\alpha = -\frac{(\omega + U_2 \beta)}{U_1} \quad (11)$$

와류섭동은 압력과 밀도의 변화없이 속도만의 섭동을 가지고 자유류를 따라 대류한다.

캐스케이드에서 음향파와 와류파의 해를 구하기 위하여 Smith가 제시한 방법<sup>(5)</sup>을 따랐다. 이른바 "cascade-wave"의 경계에서 세 가지 보존방정식을 적용한다: 와류면을 따라 유량이 보존되고 경계면 사이의  $x_2$  방향의 속도차는 고정 와류(bound vortex)의 크기와 같으며, 대류하는 와류파는 고정 와류의 크기의 변화와 관련된다. 이 세가지 조건의 방정식을  $\bar{u}_2^+$ ,  $\bar{u}_2^-$  and  $\bar{u}_{2,vr}$ 에 대해서 연립하면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\bar{u}_2^+ = \frac{\Gamma \beta c}{s 2A} \{ \lambda \beta c \cos \theta E^{-1/2} - (\beta c + \lambda \sin \theta) \} \quad (12)$$

$$\bar{u}_2^- = \frac{\Gamma \beta c}{s 2A} \{ \lambda \beta c \cos \theta E^{-1/2} + (\beta c + \lambda \sin \theta) \} \quad (13)$$

$$\bar{u}_{2,vr} = \frac{\Gamma \lambda^2 + \lambda \beta c \sin \theta}{s A} \quad (14)$$

여기서, 하첨자  $vr$ 은 와류파를 나타내고  $A = \lambda^2 + \beta^2 c^2 + 2\lambda \beta c \sin \theta$  이고  $E = \beta^2 c^2 - M^2 A$ .

## 2.2 음향 파워 스펙트럼에 대한 식의 유도

자유류에 고정되어 대류하는 난류 속도장은 자유류와 함께 움직이는  $y'_1 = y_1 - Wt$ 의 좌표계에서  $w(y'_1, y_2, y_3)$ 와 같이 표현할 수 있다. 캐스케이드에 고정된 좌표계에서 난류속도장은 다음과 같다.

$$\tilde{w}(y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tilde{w}}(\mathbf{k}) e^{i[k_1(y_1 - Wt) + k_2 y_2 + k_3 y_3]} d\mathbf{k} \quad (15)$$

$y_1 - y_2$  평면에서 난류속도장은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\tilde{w}(y_1, y_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tilde{w}}_R(k_1, k_2) e^{-i[k_1(y_1 - Wt) + k_2 y_2]} dk_1 dk_2 \quad (16)$$

여기서  $\widehat{w}(k_1, k_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{w}}(k_1, k_2, k_3) dk_3$  이고 Fourier 성분인  $\widehat{\widehat{w}}(k_1, k_2)$  은  $w(y_1, y_2)$  를 이용하여 다음과 같은 식으로 결정할 수 있다.

$$\widehat{\widehat{w}}_R(k_1, k_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-R}^R \int_{-R}^R w(y_1, y_2) e^{-i(k_1 y_1 + k_2 y_2)} dy_1 dy_2 \quad (17)$$

여기서  $R$  은 유한하지만 충분히 큰 값이다. 다음과 같은 형태로 캐스케이드에 입사 하는 와류 속도 성분에 대하여

$$w_g = w_0 e^{i[k_1(y_1 - Wt) + k_2 y_2]} \quad (18)$$

Smith<sup>(5)</sup> 는 와류 분포  $\Gamma_w$  에 대한 방정식을 아래와 같이 유도하였다.

$$-\frac{w_0 e^{-i\lambda \bar{z}}}{W} = \int_0^1 \Gamma_w(\bar{z}_0) K(\bar{z} - \bar{z}_0) d\bar{z}_0 \quad (19)$$

여기서 커널함수  $K$  는  $\eta > 0$  일 때,

$$K(\eta) = \frac{1}{(s/c)} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[ \begin{aligned} & (u'_{2,cv} \cos\theta - u'_{1,cv} \sin\theta) e^{i(\bar{\alpha}^- \cos\theta + \bar{\beta}, \sin\theta)\eta} \\ & + (u'_{2,cv} \cos\theta - u'_{1,cv} \sin\theta) e^{i(\bar{\alpha}^+, \cos\theta + \bar{\beta}, \sin\theta)\eta} \end{aligned} \right]$$

이고  $\eta > 0$  일 때

$$K(\eta) = \frac{1}{(s/c)} \sum_{r=-\infty}^{\infty} (u'_2 \cos\theta - u'_1 \sin\theta) e^{i(\bar{\alpha}^+, \cos\theta + \bar{\beta}, \sin\theta)\eta} \text{ 와 같이}$$

정의되고,  $\Gamma_w(\bar{z}_0) = \Gamma(\bar{z}_0)/W$ ,  $\bar{z} = z/c$ ,  $\bar{\alpha} = \alpha c$ ,  $\bar{\beta} = \beta c$ ,  $u' = (s/\Gamma)\bar{u}$  와 같다. 일단  $\lambda (=k_1 c)$  와  $k_2$  의 값이 주어지고, 원주방향의 파수  $\beta$  가 결정되면, 방정식 (9), (11~14) 를 이용해서 커널함수 속의 다른 변수들을 결정할 수 있다. 적분 방정식인 식 (19) 를 계산하기 위하여 Whitehead<sup>(6)</sup> 의 수치적 방법을 따라 다음과 같은 이산화 행렬 방정식으로 표현할 수 있다.

$$w_0 W_i = K_{ij} \Gamma_j \quad (20)$$

여기서  $W_i = e^{-i\lambda \bar{z}_i} / W$ ,  $K_{ij} = \sum_{j=0}^{L-1} K(\bar{z}_i - \bar{z}_{0,j}) \left( \frac{\pi}{2L} \sin \frac{\pi j}{L} \right)$ ,

$\Gamma_j = \Gamma_w(\bar{z}_{0,j})$  이고 또  $\bar{z}_i = (1 - \cos(\pi(2i+1)/2L))/2$ ,

$\bar{z}_{0,j} = (1 - \cos(\pi j/L))/2$ . 여기서  $i, j = 0, 1, 2, \dots, L-1$  이다. 역행렬을 이용하여 식 (20) 의 와류분포를 표현하면,

$$\Gamma_j = w_0 K_{ji}^{-1} W_i \quad (21)$$

여기서  $K_{ji}^{-1}$  는 역함수  $K^{-1}$  의  $(j, i)$  의 성분을 나타낸다. 캐스케이드의 상하류로 전파해가는 음향파의 진폭은 다음과 같이 표현할 수 있고,

$$\frac{\bar{P}^\pm}{\rho_0 W^2} = \int_0^1 V^\pm(\bar{z}_0) \Gamma_w(\bar{z}_0) d\bar{z}_0 \quad (22)$$

여기서

$$V^\pm(\bar{x}_0) = -\frac{1}{(s/c)} (v')^\pm \frac{(\lambda + \bar{\alpha}^\pm \cos\theta + \bar{\beta} \sin\theta)}{\bar{\beta}} e^{-i(\bar{\alpha}^\pm \cos\theta + \bar{\beta} \sin\theta)\bar{x}_0}$$

식 (19) 와 마찬가지로 식 (22) 을 이산화하여 표현하면 다음과 같다.

$$\bar{P}^\pm = \rho_0 W^2 X_j^\pm \Gamma_j \quad (23)$$

여기서  $X_j^\pm = \sum_{j=0}^{L-1} V^\pm(\bar{x}_{0,j}) \left( \frac{\pi}{2L} \sin \frac{\pi j}{L} \right)$ . 식 (21) 을 식 (23) 에 대입하면 다음과 같이 음향파의 진폭을 표현할 수 있고,

$$\bar{P}^\pm = \rho_0 W^2 w_0 X_j^\pm K_{ji}^{-1} W_i \quad (24)$$

식 (3) 을 이용하면 시간영역 음향파는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$p^\pm(x_1, x_2, t) = \rho_0 W^2 w_0 \left( \sum_{r=-\infty}^{\infty} R_r^\pm e^{i(k_1 W t + \alpha_r x_1 + \beta_r x_2)} \right) \quad (25)$$

여기서  $R_r^\pm = (X_r^\pm)_j K_{ji}^{-1} W_i$  이고

$$\beta_r = \frac{(k_1 \sin\theta + k_2 \cos\theta)s - 2\pi r}{s} \quad (26)$$

식 (25) 의 결과를 식 (16) 으로 표현한 난류 입사 속도장에 대해서 확장하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$p^{\pm}(x_1, x_2, t) = \rho_0 W^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{w}(k_1, k_2) \left( \sum_{r=-\infty}^{\infty} R_r^{\pm} e^{i(k_1 W + \alpha_r^{\pm} x_1 + \beta_r x_2)} \right) dk_1 dk_2 \quad (27)$$

식 (27)의 양변에 푸리에(Fourier) 변환을 취하면,

$$\tilde{p}_r^{\pm}(\mathbf{x}, \omega) = \rho_0 W \int_{-\infty}^{\infty} \hat{w}(K_1, k_2) \left( \sum_{r=-\infty}^{\infty} R_r^{\pm} e^{i(\alpha_r^{\pm} x_1 + \beta_r x_2)} \right) dk_2 \quad (28)$$

와 같고 여기서  $\tilde{p}_r^{\pm}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T p^{\pm}(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega t} dt$ ,  $K_1 = \omega/W$ 이다. 식 (28)과 (2)을 이용하면 음향 입자 속도 성분을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\tilde{u}_{1,r}^{\pm}(\mathbf{x}, \omega) = \rho_0 W \int_{-\infty}^{\infty} \hat{w}(K_1, k_2) \left( \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{-\alpha_r^{\pm} R_r^{\pm} e^{i(\alpha_r^{\pm} x_1 + \beta_r x_2)}}{\rho_0(\omega + U_1 \alpha_r^{\pm} + U_2 \beta_r)} \right) dk_2 \quad (29)$$

$$\tilde{u}_{2,r}^{\pm}(\mathbf{x}, \omega) = \rho_0 W \int_{-\infty}^{\infty} \hat{w}(K_1, k_2) \left( \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{-\beta_r R_r^{\pm} e^{i(\alpha_r^{\pm} x_1 + \beta_r x_2)}}{\rho_0(\omega + U_1 \alpha_r^{\pm} + U_2 \beta_r)} \right) dk_2 \quad (30)$$

일정한 속도  $W$ 로 움직이는 유체내에서, 덕트 축방향의 순간 음향 강도(intensity)는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$I_r^{\pm}(t) = \left( \frac{p(t)}{\rho_0} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{u}^{\pm}(t) \right) \times (\rho_0 u_1^{\pm}(t) + U_1 \rho(t)) \quad (31)$$

순간 음향 강도를  $p = c_0^2 \rho$ 의 관계를 이용하고 식 (31)의 양변을 푸리에 변환하면 음향 강도 스펙트럼은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$I^{\pm}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} \left[ \left( \frac{\tilde{p}_r^{\pm}(\omega)}{\rho_0} + U_1 \tilde{u}_{1,r}^{\pm}(\omega) + U_2 \tilde{u}_{2,r}^{\pm}(\omega) \right) \left( \rho_0 \tilde{u}_{1,r}^{\pm}(\omega) + \frac{U_1 \tilde{p}_r^{\pm}(\omega)}{a^2} \right) \right] \quad (32)$$

식 (28~30)을 (31)에 대입하고  $w$ 를 랜덤 변수로 처리하면

$$E[I^{\pm}(\mathbf{x}, \omega)] = \rho_0 M^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} E \left[ \hat{w}(K_1, k_2) \hat{w}^*(K_1, k_2') \right] \left( \frac{\omega(-\alpha^2 \alpha_r^{\pm} + U_1(\omega + U_1 \alpha_r^{\pm} + U_2 \beta_r))}{(\omega + U_1 \alpha_r^{\pm} + U_2 \beta_r)(\omega + U_1 \alpha_r^{\pm} + U_2 \beta_r')} \right) \times R_r^{\pm}(k_2) R_r^{\pm*}(k_2') e^{i[(\alpha_r^{\pm} - \alpha_r^{\pm'})x_1 + (\beta_r - \beta_r')x_2]} \right] dk_2 dk_2' \quad (33)$$

와 같이 표현할 수 있고 여기서  $E[\cdot]$ 는 기대값 또는 앙상블(ensemble) 평균을 나타낸다. Amiet[7]는  $\hat{w}$ 를 랜덤 변수로 그리고 다른 파수에서 난류속도가 상관관계(correlate)가 없다고 가정하고 다음과 같은 관계식을 유도하였다.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} E \left[ \hat{w}(K_1, k_2) \hat{w}^*(K_1, k_2') \right] = W \delta(k_2 - k_2') \Phi_{ww}(K_1, k_2') \quad (34)$$

식 (34)를 (33)에 대입하고 델타함수  $\delta(k_2 - k_2')$ 를 이용하여  $k_2'$  적분을 실행하면 식 (32)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$E[I^{\pm}(\mathbf{x}, \omega)] = \rho_0 M^3 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \Phi_{ww}(K_1, k_2) \left( \frac{a^2 \omega(-\alpha \alpha_r^{\pm} + M_1(\omega + U_1 \alpha_r^{\pm} + U_2 \beta_r))}{(\omega + U_1 \alpha_r^{\pm} + U_2 \beta_r)(\omega + U_1 \alpha_r^{\pm} + U_2 \beta_r')} \right) \times R_r^{\pm}(k_2) R_r^{\pm*}(k_2) e^{i[(\alpha_r^{\pm} - \alpha_r^{\pm'})x_1 + (\beta_r - \beta_r')x_2]} \right] dk_2 \quad (35)$$

덕트내를 전파해가는 음향파위는 평균 강도를 덕트 단면적에 대해서 적분하면 구할 수 있다. 식 (35)을  $x_2$  방향으로  $Bs$  길이만큼 적분하면 스펜(span) 방향의 단위 면적당 음향파위를 구할 수 있다. 다음과 같은 적분식  $\int_0^{Bs} e^{i(\beta_r - \beta_r')x_2} dx_2 = Bs \delta_{rr'}$ 과 크로니카(Kronecker) 델타함수  $\delta_{rr'}$ 의 성질을 이용하여 식 (35)의  $r'$ 에 대한 합을 계산하면 음향파위식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathcal{P}^{\pm}(\omega) = \rho_0 M^3 Bs$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \Phi_{ww}(K_1, k_2) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left( |R_r^{\pm}(k_2)|^2 \frac{\omega(-\alpha r^{\pm} + M_1(\omega + U_1 \alpha r^{\pm} + U_2 \beta_r))}{|(\alpha r^{\pm})^2 + (\beta_r)^2|} \right) \right] dk_2 \quad (36)$$

덕트를 대류해가는 난류 속도장은  $x_2$  방향에 대해서 공간 주기성을 가지므로  $k_2$ 에 대한 적분식은 푸리에 적분에서 푸리에 시리즈로 변형할 수 있다. 유동에 대한 공간의 기본 주기는 반지름  $r$  위치에서의 원주길이가 되므로  $x_2$  방향의 파수는 다음식을 만족시켜야 한다.

$$k_{2,m} = \frac{2\pi m}{Bs \cos \theta} - K_1 \tan \theta \quad (37)$$

여기서  $m$ 은 정수이다. 식 (37)으로부터 일정한 주파수에서  $x_2$ 의 변화량에 대한 극한은  $dk_{2,m} \rightarrow \frac{2\pi \Delta m}{Bs \cos \theta}$ 와 같이 되고 여기서  $\Delta m = 1$ 이다. 그러므로  $k_2$ 에 대한 적분은  $\int dk_2 \rightarrow \frac{2\pi}{Bs \cos \theta} \sum_{m=-\infty}^{\infty}$ 가 되고 식 (36)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathcal{P}^{\pm}(\omega) = \frac{2\pi \rho_0 M^3}{\cos \theta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \Phi_{ww}(K_1, k_2) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left( |R_r^{\pm}(k_2)|^2 \frac{\omega(-\alpha r^{\pm} + M_1(\omega + U_1 \alpha r^{\pm} + U_2 \beta_r))}{|(\alpha r^{\pm})^2 + (\beta_r)^2|} \right) \right] \quad (38)$$

식 (38)에서  $\Phi_{ww}$  항은 난류 스펙트럼에 대한 대수식을 사용하여 계산할 수 있는데 비하여 R항은 상대적으로 많은 수치계산시간을 요구함으로 합의 정수변수를 변화시켜 R항과  $\Phi_{ww}$  항의 위치를 바꿈으로써 계산의 효율성을 증가시킬 수 있다. 음향파의 원주방향 파수도 원주길이에 대해서 공간 주기를 만족시켜야 하므로 다음 식을 만족시킨다.

$$\beta_l = \frac{2\pi}{Bs} l \quad (39)$$

식 (39)와 (37)을 식 (8)에 대입하면 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$k_{2,l+Br} = \frac{2\pi}{Bs \cos \theta} (l + Br) + K_1 \tan \theta \quad (40)$$

식 (38)을 (40)을 이용하여 다시 정리하면,

$$\mathcal{P}^{\pm}(\omega) = \frac{2\pi \rho_0 M^3}{\cos \theta} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[ Q_l^{\pm}(\omega) \left( \sum_{r=-\infty}^{\infty} \Phi_{ww}(K_1, k_{2,l+Br}) \right) \right] \quad (41)$$

여기서,

$$Q_l^{\pm}(\omega) = \left( |R_r^{\pm}(k_2)|^2 \frac{\omega(-\alpha r^{\pm} + M_1(\omega + U_1 \alpha r^{\pm} + U_2 \beta_l))}{|(\alpha r^{\pm})^2 + (\beta_l)^2|} \right)$$

가 된다. 식 (41)을 이용하여 에어포일 캐스케이드와 입사 난류의 상호작용에 의한 음향파위 스펙트럼을 계산할 수 있다. 바깥합의  $l$  기호는 각 주파수에서 컷은되는 음향모드까지만 고려하여 계산을 수행한다.

### 2.3 난류 스펙트럼

앞 절에서 유도한 음향 파워 스펙트럼 식에 사용할 수 있는 난류 스펙트럼에 대한 실험자료가 현재까지 존재하지 않으므로 이 논문에서는 기존의 대수식 모델을 사용하였다. 난류가 균질하고 등방성이라고 가정하면 다음과 같은 형태의 Liepmann 스펙트럼을 사용할 수 있다.

$$\Phi_{ww}(k_1, k_2, k_3) = \frac{E(k)}{4\pi k^2} \left( 1 - \frac{k_2^2}{k^2} \right) \quad (42)$$

여기서,  $E(k)$ 는 에너지 스펙트럼으로서 다음과 같이 정의된다.

$$E(k) = \frac{8w^2 \Lambda}{\pi} \frac{(\Lambda k)^4}{(1 + \Lambda^2 k^2)^3} \quad (43)$$

위 식에서  $\overline{w^2}$ 는 난류속도의 제곱의 평균값이고  $\Lambda$ 는 난류의 적분 길이 스케일이다. 식 (42)을 식 (43)에 대입하면 다음과 같은 파수 스펙트럼을 얻을 수 있다.

$$\Phi_{ww}(k_1, k_2, k_3) = \frac{2\overline{w^2} \Lambda^3}{\pi^2} \frac{\Lambda^2 (k_1^2 + k_3^2)}{[1 + \Lambda^2 (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)]^3} \quad (44)$$

위 식을  $k_3$ 에 대해서 무한적분하면 식 (40)에 직접 사용할 수 있는 난류스펙트럼 모델식을 얻을 수 있다.

$$\Phi_{ww}(k_1, k_2) = \frac{2\overline{w^2}\Lambda^2 [1 + \Lambda^2(4k_1^2 + k_2^2)]}{4\pi [1 + \Lambda^2(k_1^2 + k_2^2)]^3} \quad (45)$$

### 3. 계산 결과

2장에서 유도한 식 (41)과 (44)을 이용하여 평판 에어포일 캐스케이드와 난류 와류의 상호간섭에 의한 광대역 소음장을 계산하였다. 터보 웬 엔진내의 반지름  $r=9/2\pi$  위치에서 고정자의 웬들을 이차원으로 펼친 에어포일 캐스케이드( $Bs=9$ )를 고려하였으며 자유류 속도는 마하수  $M=0.5$ , 입사 난류 속도의 곱의 평균은  $\overline{w^2}=0.01W$ 로 일정하게 유지하였다.

#### 3.1 웬 광대역 음향파워 스펙트럼

먼저 캐스케이드의 블레이드 개수( $B$ )와 난류 속도 장의 적분 길이 스케일( $\Lambda$ )을 변화시키며 음향 파워

스펙트럼의 변화를 분석하였다. 길이는 에어포일 코드 길이( $c$ ), 속도는 자유류 속도( $W$ )에 대해서 무차원하였다.

Fig. 2에서 난류의 길이 스케일의 변화에 따른 난류 스펙트럼과 대응하는 음향 파워 스펙트럼의 변화를 나타내었다. 난류의 길이 스케일이 작아짐에 따라 난류의 스펙트럼 분포가 고주파수 영역이 커지고 대응하는 음향 에너지 스펙트럼도 고주파수 영역에서 증가함을 알 수 있다. 즉 입사 난류 스펙트럼에 대하여 음향 스펙트럼이 선형적인 반응을 보인다.

Fig. 3에서 블레이드 개수에 따른 음향 파워 스펙트럼의 변화를 나타내었다. 난류에 의한 광대역 음향 스펙트럼임에도 블레이드 수에 따른 규칙적인 피크 값들을 볼 수 있다. 규칙적인 주파수 특성은 캐스케이드의 차단(cut-off) 주파수와 관계가 있다. 아음속 유동에서 감쇄 없이 전파해가는 음향파의 원주방향 파수는 다음 부등식을 만족시켜야 한다.

$$\frac{M_2 - (1 - M_1^2)^{1/2}}{1 - M^2} \omega < a\beta < \frac{M_2 + (1 - M_1^2)^{1/2}}{1 - M^2} \omega \quad (46)$$

식 (46)과 (39)를 이용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{M_2 - (1 - M_1^2)^{1/2}}{1 - M^2} \omega < \frac{2\pi a l}{sB} < \frac{M_2 + (1 - M_1^2)^{1/2}}{1 - M^2} \omega \quad (47)$$

주파수가 커질수록 감쇄없이 전파해가는 캐스케이드 음향 모드들이 증가하게 되는데 하나의 음향모드가 추가될 때마다 증가하게 되는 주파수 간격을 식 (47)로부터 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\Delta\omega_x = \frac{1 - M^2}{M_2 \pm (1 - M_1^2)^{1/2}} \frac{2\pi a}{Bs} \quad (48)$$

Fig. 3의 계산에서 사용한 조건을 식 (48)에 대입하면  $\Delta\lambda_c = 1.209$ 를 얻을 수 있다. 이 값을 Fig. 3의 x축의 한 칸 간격으로 나타내었다. 스펙트럼에서 처음으로 날카로운 피크가 나타나는 부분은 이 주파수 간격에 캐스케이드의 블레이드 수를 곱한 값이 되는데, 이 주파수에서 블레이드 간격  $s$ 와 같은 원주방향의 파장을 가진 캐스케이드 음향모드가 처음으로 감쇄없이 전파하는 공통점을 가진다. 각각의 캐스케이

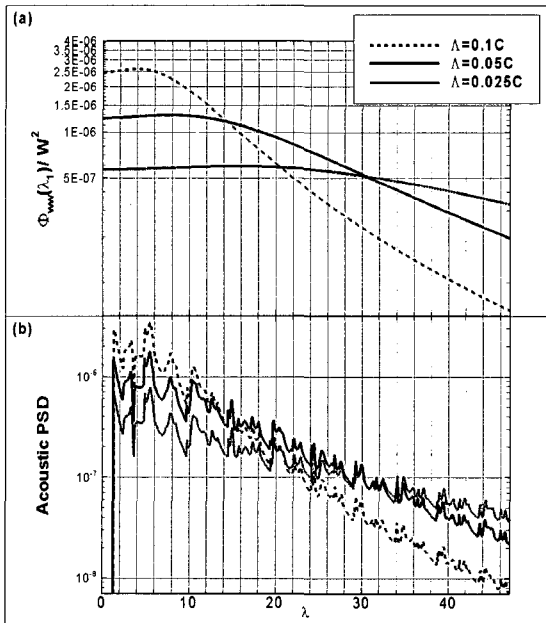


Fig. 2 Variation of turbulence and acoustic power spectrums with turbulence integral length-scale( $B=4, s=9/4$ )

드 모델마다 계산한 특성 주파수 값을 Table 1에서 나타내었다.

Fig. 3에서 알 수 있는 것처럼 Table 1에서 제시한 주파수에서 각각의 캐스케이드 모델들이 처음으로 피크 값을 가지고 그 고조파에도 피크 값이 반복된다. 특성주파수의 또 다른 중요한 물리적 특징 중의 하나는 식 (40)에서 알 수 있듯이 이보다 낮은 주파수에서는 난류스펙트럼의 주파수 성분 중 일부는 차단되는 음향 모드에만 기여를 하고 이 특성주파수보다 높은 주파에

서는 난류 스펙트럼의 모든 주파수 성분이 감쇄없이 전파해가는 음향모드에 기여를 하게 된다는 것이다.

### 3.2 웬 광대역 음향 파워의 특성

앞 절에서 정의한 특성 주파수 개념을 이용하여 웬 광대역 음향 파워의 특성을 파악하고자 한다. Fig. 4에서 다양한 길이 스케일의 입사 난류에 대하여 블레이드 수에 따른 전체 음향 파워의 변화를 도시하였다. (a), (c)에서는 상류방향으로 전파해가는 음향파

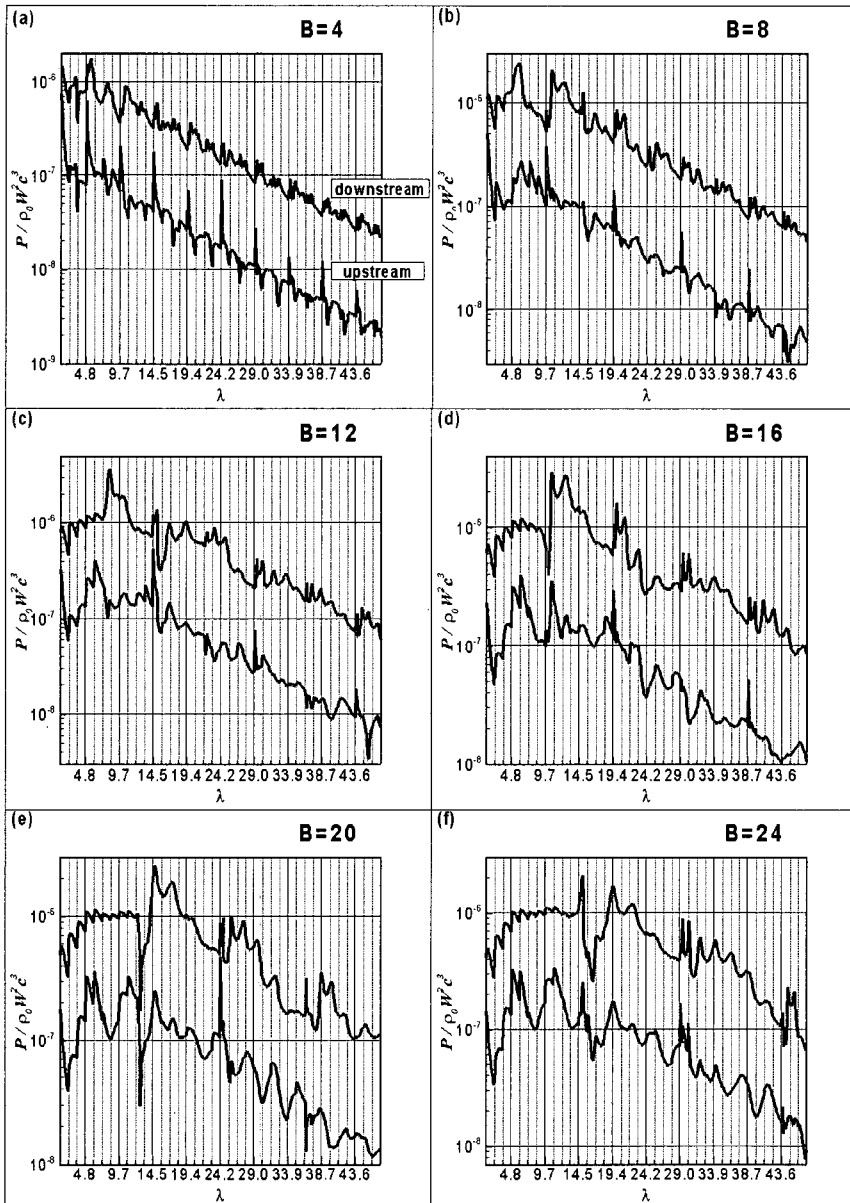


Fig. 3 Variation of acoustic power spectrum with blade number( $\Lambda=0.1c$ )



위를 블레이드수가 24개일 때의 특성주파수인 29.0를 기준으로 저고주파수 영역대의 음향파워를 각각 나타내었다. 그림에서 알 수 있는 것처럼 각각의 특성이 매우 다른데 그림 (a)의 저주파수 영역대에서는 음향 파워가 블레이드 수의 비선형함수로 거동하나 그림 (c)의 고주파수 영역대에서는 블레이드 수에 정확히 비례해서 증가한다. 이는 블레이드 개수가 24개인 모델의 특성주파수보다 큰 고주파수 영역대에서는 모든 캐스케이드에서 난류스펙트럼의 모든 성분이 감쇄없이 전파해가는 음향모드에 영향을 주고, 캐스케이드 내의 인접한 에어포일 상호간의 간섭이 작아져서 캐스케이드 구조에 영향을 받지 않는 특성을 가지지만 그 보다 작은 주파수 영역대에서는 각 캐스케이드

모델에 따라 감쇄없이 전파해가는 음향모드들에 대하여 난류 스펙트럼에 성분들이 모두 다 참여하지 못하고 인접한 에어포일 간의 영향이 커서 캐스케이드 구조에 좀 더 큰 영향을 받기 때문이다. 그림 (b), (d)에서 하류방향으로 전파해가는 음향파의 파워를 앞서와 같이 블레이드수가 24개일 때의 특성주파수인 29.0를 기준으로 저고주파수 영역대의 음향파워를 각각 나타내었다. 마찬가지로 그림 (d)에서 나타내는 고주파수 영역대에서의 음향파워는 블레이드가 20개일 때 값이 경향에서 벗어나나 대체로 블레이드 수에 비례하여 음향 파워가 증가하는 것을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

이차원 평판 에어포일로 구성된 캐스케이드와 자유류를 따라 대류하는 균질한 등방성 난류의 상호작용에 의한 광대역 음향장을 계산하였다. 음향파워의 계산을 위하여 Smith의 방법을 기본으로 이론식을 유도하였

Table 1 Characteristic frequencies according to blade number

$B$	4	8	12	16	20	24
$B \cdot \Delta\lambda_c$	4.84	9.67	14.5	19.3	24.1	29.0

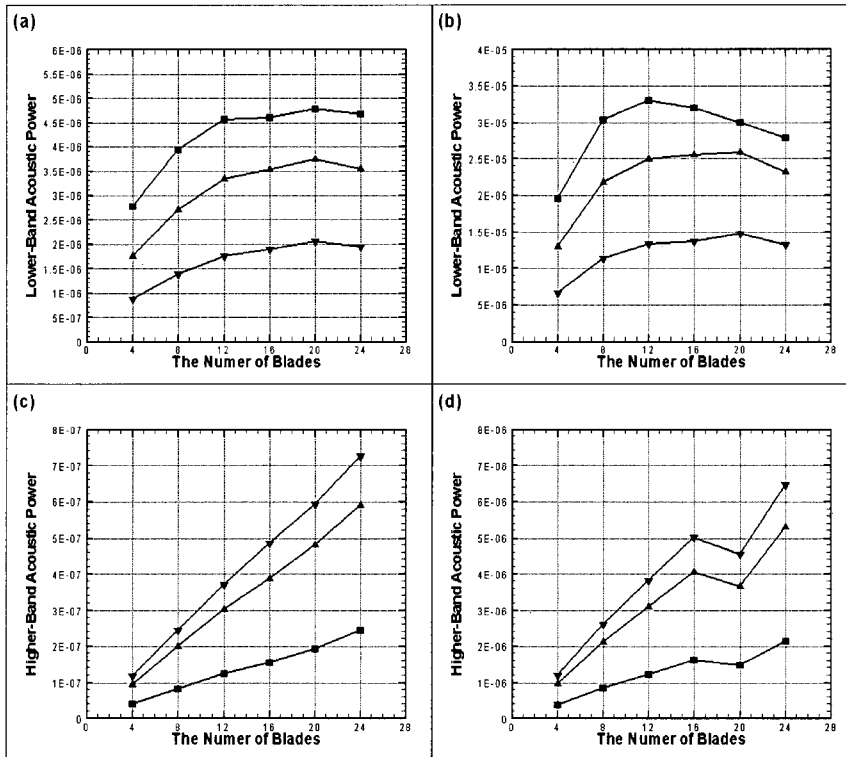


Fig. 4 Predicted band acoustic power with various blade number ( $\blacksquare$ :  $A = 0.1c$ ,  $\blacktriangledown$ :  $A = 0.05c$ ,  $\blacktriangle$ :  $A = 0.025c$ ): (a) upstream and (b) downstream on lower bandwidth  $\lambda < 24\Delta\lambda_c$  (c) upstream and (d) downstream on higher bandwidth,  $\lambda > 24\Delta\lambda_c$

으며 Whitehead의 LINSUB 프로그램을 변형시켜 음향파워계산에 적용하였다. 난류의 적분 길이 스케일과 블레이드 개수를 변화시키며 음향 파워 스펙트럼의 변화를 비교분석하여 캐스케이드내의 인접한 블레이드 거리와 같은 원주방향 파장을 가진 캐스케이드 음향모드가 처음으로 단절모드에서 벗어나는 주파수를 기준으로 그 보다 큰 고주파수 영역대에서의 음향파워는 블레이드 개수에 비례한다는 것을 보였다. 이것은 고주파수 영역대에서 인접한 블레이드간의 상호간섭이 작아서 하나의 블레이드에 의한 음향파워를 예측하면 전체 에어포일 캐스케이드의 광대역 음향파워를 계산할 수 있다는 것을 의미한다. 추후 팬 광대역 소음의 고주파수 영역대에서 사용할 수 있는 효율적인 예측식의 개발에 중요한 단초가 될 것으로 판단된다.

## 후 기

이 논문은 과학기술부의 국제공동연구사업과 과학재단의 해외 Post-doc. 연수지원사업에 지원을 받아 연구를 수행하였습니다.

## 참 고 문 헌

(1) 이수갑, 정철웅, 2004, "항공우주산업에서 소

음진동기술의 응용", 한국소음진동공학회논문집, 제 14 권, 제 4 호, pp. 16~28.

(2) 이덕주, 이수갑, 2004, "국내외 한국우주산업의 개발 동향", 한국소음진동공학회논문집, 제 14 권, 제 4 호, pp. 29~39.

(3) Huff, D. L., "Fan Noise Prediction: Status and Needs", AIAA-98-0177.

(4) Envia, E. et al., 2004, "Fan Noise: A Challenge to CAA", International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol. 18(6), pp. 471~480.

(5) Smith, S. N., 1972, "Discrete Frequency Sound Generation in Axial Flow Turbomachines", Reports and Memoranda No. 3709, Aeronautical Research Council, London.

(6) Whitehead, D. S., "Classical Two-Dimensional Methods", in: AGARD Manual on Aeroelasticity in Axial Flow Turbomachines, Volume 1, Unsteady Turbomachinery Aerodynamics (AGARD-AG-298), Platzer, M. F. and Carta, F. O., ed., Neuilly sur Seine, France, ch. 3.

(7) Amiet, R. K., 1975, "Acoustic Radiation from an Airfoil in a Turbulent Stream," Journal of Sound Vibration, Vol. 41(4), pp. 407~420.