

입구와 유연한 구조물로 구성된 경계를 가지는 구조-음향 연성계의 수학적 표현

A Mathematical Formulation of the Structural-acoustic System with an Opening and a Flexible Structure

서희선* · 김양한*

Hee-Seon Seo and Yang-Hann Kim

(2004년 11월 12일 접수 ; 2005년 4월 14일 심사완료)

Key Words : Structural-acoustic Coupling(구조음향연성), Modal Expansion Method(모드조합법), Impedance(임피던스), Mobility(모빌리티), Degree of Coupling(연성의 정도)

ABSTRACT

This paper explains a general coupling system in terms of the system parameters: impedance of a cavity or mobility of a structure. To easily access the mechanism of the structural-acoustic coupled system, a simple expression is derived. A general coupled equation is also derived of a general coupled problem constituted a flexible structure and an opening boundary in terms of vector and matrix notation, and is analyzed the coupling phenomena using the understanding acquired simple coupled system. The paper shows that the general coupled equation is expanded version of the simple coupled equation by some limiting checks. The paper also shows that the degree of coupling is proportioned to a stiffness of the acoustic system and a modal coupling coefficient, but is in inverse proportion to a mass of the structural system and the difference of the excitation frequency and resonant frequency of the acoustic or structural system.

1. 서론

구조물의 진동으로 발생한 방사소음을 줄이거나, 이를 이용하여 효율적인 방사체를 설계하는 등, 연성 현상을 효율적으로 이용하기 위해서 연성계의 메커니즘과 이를 지배하는 변수에 대한 이해가 선행되어야 한다. 이때 연성계의 실제적 특성보다는 음향계의 임피던스(impedance)나 구조물의 모빌리티(mobility) 등의 물리량으로 해석하는 경우는 특수한 경우에 얻어진 결과를 다른 해석에 이용하는 것이 가능하고,

알고 있는 결과들을 이용하여 다른 경우에 대하여 물리적 유추가 가능하며, 많은 문제의 경우 구조물의 상세한 모양과 상관없이 결과를 유추할 수 있는 등의 장점이 있으므로 널리 이용된다.

이 논문에서는 계의 특성을 대표할 수 있는 물리량으로 일반적인 연성계를 설명하고자 한다. Fig. 1(a)는 유한한 크기를 갖는 공간과 반사가 없는 무한 공간이 유연한 구조물로 구성된 경계를 통하여 서로 연성된 계를 보이고 있다. 많은 해석의 예에서 외부 음장과 구조물 사이에 약한 연성을 가정하여 취급하고 있다.^(1~8) 그런데 유연한 구조물이 박막 또는 얇은 평판으로 구성되어 외부 공간과 약한 연성이 되는 경우가 아니라면 Fig. 1(a)에서 구조물의 진동으로 인하여 발생하는 외부 음장과 외부음장의 영향으로 변형되는 구조물의 진동을 고려해야 한다. 여기에 환기

* 책임저자 : 정회원, 한국과학기술원 기계공학과
E-mail : sonar@kaist.ac.kr

Tel : (042) 869-3065, Fax : (042) 869-8220

* 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

또는 배선 등의 이유로 열려있는 공간이 존재하는 경우, 즉 입구가 존재하는 경우는 Fig.1(b)에 제시한 음향학적으로 유한한 크기를 갖는 공간과 반사가 없는 무한 공간이 유연한 구조물과 입구로 구성된 경계를 통하여 서로 연성된 경우를 생각할 수 있다. 여기서 연성계에 가해질 수 있는 외력으로는 구조물에는 외력, 유한 크기의 공간에는 음향 입력이 주어질 수 있다고 가정하였다.

그러나 이러한 일반적인 형태의 연성계를 해석하기 위해서는 공간과 구조물의 거동을 적절히 표현하는 방법이 필요하고, 이를 해석하기 위해 각 계의 비연성 모드를 이용하여 계를 표현하는 모드 조합에 의한 방법^(9~14) 또는 유한요소법^(7~8,15)이 널리 사용된다. 그러나 이러한 방법은 연성 현상의 물리적 의미를 파악하기가 간단하지 않다.

따라서 구조-음향 연성계의 가장 단순하면서도 대표적인 경우에 대해서 음향계의 임피던스와 구조계의 모빌리티를 이용하여 연성계를 표현함으로써 연성계의 물리적 특성 즉, 음향계와 구조계가 어떤 메커니즘을 통하여 정보를 주고 받는가를 쉽게 파악하는 것이 필요하고, 이것이 이 논문의 첫 번째 목적이다. 두 번째로는 단순계에서 확보한 개념을 활용하여 좀더 일반적인 연성문제 즉, 입구와 유연한 구조물로 구성된 경계를 가지는 임의의 형태를 갖는 연성계에 대해 각 부계의 연성 전 모드조합을 이용하여 행렬 형태로 연성 방정식을 표현하여 일반적인 연성현상에 대해 그 물리적 의미를 설명하려 한다.

2. 단순 연성계

2.1 유연한 벽을 갖는 단순 연성계

구조-음향 연성계의 물리적 의미를 쉽게 파악하기 위해서 단순계를 통해 그 의미를 설명하여 보자. 이를 확장하여 일반적인 연성계의 물리적 의미를 설명하는데 적용할 수 있을 것이다. 먼저 Fig.1(a)와 (b)에서 언급한 유한 공간과 반 무한 공간이 유연한 구조물 또는 경계로 분리된 경우를 단순한 경우로 모델링 하면 각각 Fig.2(a)와 (b)의 경우와 같이 구조물과 입구는 임피던스 또는 모빌리티로, 체적음원은 피스톤 가진으로, 외력은 구조물에 가해지는 힘으로 모델링 할 수 있을 것이다.

먼저 입구가 없는 Fig.2(a)의 경우에 대해 알아보

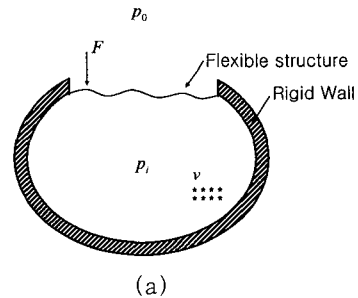
자. 피스톤의 변위와 단면적을 각각 ξ_0 와 S , 구조물의 변위를 ξ_s 라 하면 공동의 부피 변화는 $\Delta V = -S(\xi_0 - \xi_s)$ 로 얻어진다. 공동 내부 공간의 특성 길이가 고려하고 있는 가장 높은 주파수에 해당하는 파장에 비해 매우 작다고 가정하면, 공동의 부피 변화로 인한 내부 밀도의 변화는 $\Delta \rho / \rho = -\Delta V / V$ 로 표현할 수 있다.⁽¹⁶⁾ 따라서 공동 내부의 음압은

$$p_i = \rho_0 c^2 \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right) = \frac{B}{j\omega V} S(v_0 - v_s) = Z_a S(v_0 - v_s) \quad (1)$$

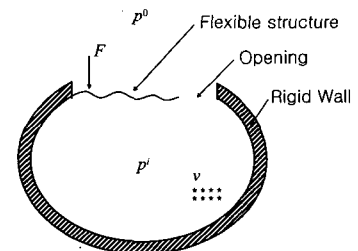
이 된다. 여기서 $B = \rho_0 c^2$ 는 공동 내부에 있는 유체의 벌크 상수(bulk modulus)이고, $Z_a = B / j\omega V$ 는 공동의 음향 임피던스이다. 구조물에서 뉴턴의 제1법칙을 압력과 구조물의 임피던스를 이용하여

$$Z_s v_s = p_i S - p_0 S - F \quad (2)$$

로 표현할 수 있다. 여기서 구조물의 속도에 의해 발생한 무한 덕트에서의 음압은 $p_0 = \rho_0 c v_s$ 로 표현하



(a)



(b)

Fig. 1 Configuration of a general coupled system: (a) bounded and unbounded spaces separate by a flexible structure and (b) bounded and unbounded spaces separate by a flexible structure and an opening

고, 외부 유체의 음향 임피던스를 $Z_0 = \rho_0 c / S$ 로 표현한 후, 이 식과 식 (2)을 식 (1)에 대입하여 유연한 구조물의 속도를 구하면

$$v_s = \frac{Y_s}{1 + Z_{ca} Y_s + Z_{m0} Y_s} (Z_{ca} v_0 - F) \quad (3)$$

이 된다. 여기서 $Y_s = 1/Z_s$ 는 구조물의 모빌리티를 의미하며 임피던스의 역수이고, $Z_{ca} = S^2 Z_a$ 와 $Z_{m0} = S^2 Z_0$ 는 기계적 임피던스의 차원을 가지며 구조물과 음향계가 결합된 연성 문제를 취급하고 있으므로 연성 음향 임피던스 또는 방사 임피던스라 한다.^(16, 17) 이를 식 (1)에 대입하고 음압에 대해 정리하면

$$p_i = \frac{Z_a}{1 + Z_{ca} Y_s + Z_{m0} Y_s} ((1 + Z_{m0} Y_s) Q + S Y_s F) \quad (4)$$

이 된다. 여기서 $Q = S v_0$ 는 공동에 주어지는 입력으로서 체적속도를 의미한다.

얻어진 수식으로부터 물리적 의미를 파악하기 위해 단순하면서 많은 실제적인 문제에서 적용이 가능한 경우인 외부 유체의 영향을 무시한다는 가정을 하여 보자. 이 경우에 식 (3)과 (4)는 각각 다음의 수식으로 표현된다.

$$v_s = \frac{Y_s}{1 + Z_{ca} Y_s} (Z_{ca} v_0 - F) \quad (5)$$

$$p_i = \frac{Z_a}{1 + Z_{ca} Y_s} (Q + S Y_s F) \quad (6)$$

식 (5)로부터 구조물의 모빌리티는 공동의 기계적 임피던스와 구조물의 모빌리티를 곱한 값에 의하여 구조물의 연성 모빌리티가 변형되는 것을 알 수 있고, 구조물의 속도는 음원에 의해 발생된 속도가 공동의 임피던스와 곱하여져 등가 외력으로 작용하고 이것이 외력과 더해진 후, 등가 모빌리티와 곱하여 결정되는 것을 알 수 있다. 이로부터 강한 연성현상이 발생하기 위해서, 즉 구조물이 큰 속도를 갖기 위해서는 음향 임피던스와 모빌리티의 곱이 커야 한다는 것을 알 수 있다. 마찬가지로 식 (6)의 공동에서 발생하는 음압의 경우도 변형된 임피던스와 구조물에 작용하는 힘과 모빌리티가 곱하여져 등가 체적속도의

형태로 공동에 또 다른 체적 속도의 차원을 갖는 입력으로 주어지는 것을 알 수 있다.

공동과 구조물이 외부 유체와 연결된 경우의 결과인 식 (3)과 (4)을 살펴보면 구조물에 주어지는 외력의 형태는 외부 유체의 영향을 받지 않지만 등가 모빌리티의 경우는 외부 유체의 임피던스와 구조물의 모빌리티가 곱하여진 항이 분모에 추가되는 것을 볼 수 있다. 이는 외부 유체의 영향으로 등가 모빌리티가 감소하는 것으로서 구조물의 거동을 외부 유체가 제한하는 것으로 생각할 수 있다. 즉 구조물의 입장에서 보면 외부로 방사되는 에너지는 구조물의 진동을 제한하는 요소로 작용되는 것을 알 수 있다. 유체의 임피던스가 무한대가 되는 극한의 경우를 생각하면 등가 모빌리티는 '영'이 되어 구조물의 진동이 발생하지 않는다. 이는 강체벽 공동인 경우에는 연성현상이 발생하지 않을 것이라는 물리적 유추와 일치하는 것이다. 수식적으로는 식 (5)와 같은 결과를 갖게 됨을 볼 수 있다.

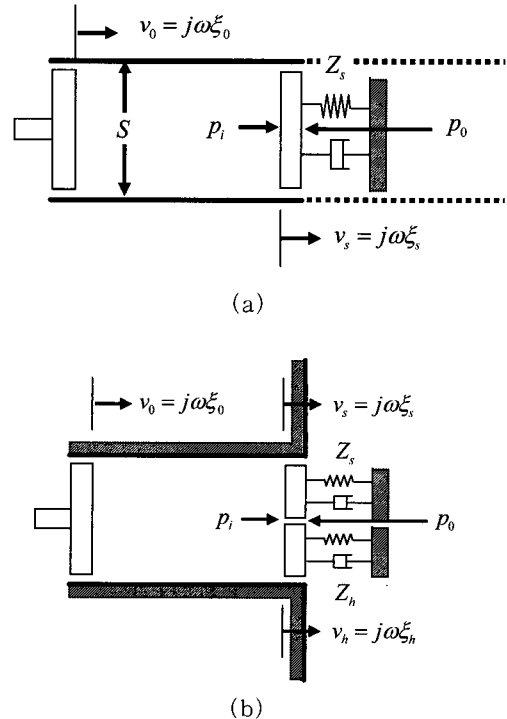


Fig. 2 Configuration of a simple coupled system : (a) bounded and unbounded spaces separate by a flexible structure and (b) bounded and unbounded spaces separate by a flexible structure and an opening

식 (4)의 공동 내부에 발생하는 압력을 살펴보면 등가 임피던스는 외부 유체의 영향으로 감소하나, 외부 유체의 임피던스와 구조물의 모빌리티가 곱하여진 항이 등가 체적 속도로 작용하여 압력을 증가 시키는데 기여한다. 외부 유체의 임피던스가 무한대가 되는 경우를 생각하면 내부 압력은 공동의 임피던스와 체적 음원의 곱으로 표현되어 강제벽 공동에 수렴하며, 외부 유체를 무시하는 경우는 식 (6)과 같은 결과를 얻을 수 있음을 쉽게 알 수 있다.

2.2 유연한 벽과 입구를 갖는 단순 연성계

이제 경계를 형성하는 구조물에 입구를 추가하여 복합적인 경계를 갖는 Fig. 1(b)와 같은 일반적인 연성계를 Fig. 2(b)와 같이 구조물과 입구의 임피던스 (또는 모빌리티)를 각각 Z_s, Z_h (또는 Y_s, Y_h)로 표현한 단순연성계로 모델링하자. 구조물의 변위와 단면적을 각각 ξ_s 와 S_s , 입구의 변위와 단면적을 각각 ξ_h 와 S_h 라 하면 공동의 부피 변화는 $\Delta V = -S_s \xi_s + S_h \xi_h$ 로 얻어진다. 이로부터 공동 내부의 음압은

$$p_i = Z_a(Sv_0 - S_s v_s - S_h v_h) \quad (7)$$

이 된다. 구조물과 입구에서 뉴턴의 제1 법칙을 공동 내부압력, 구조물의 임피던스 그리고 입구의 임피던스를 이용하여

$$Z_s v_s = p_i S_s - p_0 S_s - F \quad (8)$$

$$Z_h v_h = p_i S_h - p_0 S_h \quad (9)$$

로 표현할 수 있다. 여기서 공동 외부의 음압은 경계에서의 속도를 이용하여

$$p_0 = (v_s S_s + v_h S_h) Z_0 \quad (10)$$

로 표현할 수 있다. 식 (8)~(10)을 식 (7)에 대입하여 공동 내부에 형성되는 음압을 구하면

$$p_i = \frac{Z_a [(1 + Z_0(Y_{cs} + Y_{ch}))Q + Y_s F(S_1(1 + Z_0 Y_{ch}) - S_2)]}{1 + Z_a(Y_{cs} + Y_{ch}) + Z_0(Y_{cs} + Y_{ch})} \quad (11)$$

이 된다. 여기서 $Y_{cs} = S_s^2 Y_s$ 과 $Y_{ch} = S_h^2 Y_h$ 는 구조물과 입구의 단면적의 제곱에 모빌리티를 곱한 것으로 각

각 연성 모빌리티라 한다. 한편, 입구와 구조물에서의 속도를 내부 음압과 외력으로 표현하면

$$v_s = \frac{Y_s [p_i S_s - F(1 + Z_0 Y_{cs})]}{1 + Z_0 Y_{cs} + Z_0 Y_{ch}} \quad (12)$$

$$v_h = \frac{p_i S_h Y_h + F Y_s}{1 + Z_0 Y_{cs} + Z_0 Y_{ch}} \quad (13)$$

이 된다

식 (11)을 식 (4)와 비교하여 보면 추가적으로 부여한 연성 요소인 입구와 유연한 구조물이 병렬로 연결되어 있으므로 모빌리티가 합해진 형태로 영향이 나타남을 볼 수 있고, 외력의 작용도 각각의 면적이 영향을 미치는 형태로 변형되는 것을 볼 수 있다. 입구의 면적이 '영'이 되는 극한의 경우를 생각하면 입구의 모빌리티가 '영'이 될 것이므로 식 (4)와 동일한 결과를 얻게 됨도 쉽게 파악할 수 있다. 속도의 경우는 등가 모빌리티에 내부 압력이 구조물 또는 입구와 연성되어 등가 외력으로 작용함을 볼 수 있다. 큰 연성 현상을 얻기 위한 극한의 경우도 입구가 없이 구조물만으로 연성된 경우와 같은 물리적 설명이 가능함을 보이고 있다.

3. 일반 연성계

3.1 일반 연성계의 수학적 표현

이 장에서는 Fig. 1에 제시한 보다 일반적인 연성계에 대한 수학적 표현을 유도하고 1차원 연성계의 물리적 설명을 이용하여 일반적인 연성계의 연성현상을 설명한다.

Fig. 3에 보는 바와 같이 공동 내의 임의의 위치에서 음원 강도 Q 를 가지는 체적 음원이 있다고 가정하면, 공동 내/외부의 음압에 대한 지배방정식은

$$(\nabla^2 + k^2) p_i(\vec{r}_i) = -jk\rho_0 c Q(\vec{r}_i) \quad (14)$$

$$(\nabla^2 + k^2) p_o(\vec{r}_o) = 0 \quad (15)$$

로 표현할 수 있다. 여기서 p_i 는 공동 내부의 음압, p_o 는 공동 외부의 음압이고, k 는 파수, ρ_0 는 유체의 밀도, 그리고 c 는 유체의 음속을 의미한다. 유연한 벽에 대한 지배방정식은

$$(\mathcal{L} - m(\vec{r}_f)\omega^2)w(\vec{r}_f) = p_i(\vec{r}_f) - p_o(\vec{r}_f) - F(\vec{r}_f) \quad (16)$$

로 표현할 수 있다. 여기서 \mathcal{L} 은 구조물의 강성과 관련 있는 선형 미분 연산자, $p_i(\vec{r}_i)$ 는 공동 내부의 음압이 구조물에 가해지는 압력, $p_o(\vec{r}_f)$ 는 공동 외부의 음압이 구조물에 가해지는 압력, 그리고 $F(\vec{r}_f)$ 는 구조물에 직접 가해지는 단위 면적당 외력이다.

식 (14)의 지배 방정식이 만족하여야 하는 경계조건에 대해 생각해보자. 강체벽(A_R)에서는 벽면에 수직한 입자속도가 0이 되므로 음압의 공간 미분이 0이 되는 다음의 경계조건을 가진다.

$$\left. \frac{\partial p_i(\vec{r}_i)}{\partial n} \right|_{A_R} = 0 \quad \text{on } A_R \quad (17)$$

유연한 구조물과 공동 내/외부 음장의 관계는 유연한 구조물과 공동 내/외부 음장이 접하는 곳에서의 속도가 같다는 조건을 적용하면

$$\left. \frac{\partial p_i(\vec{r}_i)}{\partial n} \right|_{A_f} = \rho_o \omega^2 w(\vec{r}_f) \quad \text{on } A_f \quad (18-a)$$

$$\left. \frac{\partial p_o(\vec{r}_o)}{\partial n} \right|_{A_f} = \rho_o \omega^2 w(\vec{r}_f) \quad \text{on } A_f \quad (18-b)$$

이 된다. 입구에서는 압력과 속도가 공동의 내/외부에서 연속이므로

$$p_i(\vec{r}_i)|_{A_H} = p_o(\vec{r}_o)|_{A_H} \quad \text{on } A_H \quad (19-a)$$

$$\left. \frac{\partial p_i(\vec{r}_i)}{\partial n} \right|_{A_H} = \left. \frac{\partial p_o(\vec{r}_o)}{\partial n} \right|_{A_H} \quad \text{on } A_H \quad (19-b)$$

이 된다.

이제 개별 부계(sub-system)에 대해 살펴보자. 공동 내부의 음장에 대해서는 강체벽을 갖는 모드의 조합,

$$p_i(\vec{r}_i) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \psi_n(\vec{r}_i) \quad (20)$$

로 표현할 수 있다고 가정하였다. 강체벽 공동에 대한 모드 함수 ψ_n 은 동차 파동 방정식

$$\nabla^2 \psi_n(\vec{r}_i) + k_n^2 \psi_n(\vec{r}_i) = 0 \quad (21)$$

을 만족하고, 경계에서

$$\frac{\partial \psi_n(\vec{r}_i)}{\partial n} = 0 \quad \text{on } A = A_R + A_f \quad (22)$$

을 만족한다. 여기서 모드 함수의 직교성을 이용하여

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_V \psi_n(\vec{r}_i) \psi_r(\vec{r}_i) dV &= 0 \quad r \neq n \\ &\equiv \Lambda_n^A \quad r = n \end{aligned} \quad (23)$$

로 정의하자. 식 (14)에 강체벽 공동에 대한 모드 함수 ψ_n 을 곱하고, 식 (21)에 공동 내부의 음압 p_i 를 곱하여 차를 구하고, 공동 내부의 영역에 대하여 체적으로 정규화 한 후, 공동의 부피에 대해 체적 적분하고, 체적 적분에 관한 적분식을 그린의 정리를 사용하여 면적적분으로 바꾼 후, 경계조건과 모드함수의 직교성을 적용하여 정리하면

$$(k_n^2 - k^2) P_n \Lambda_n^A = \frac{1}{V} [jk \rho_o c q_n(\vec{x}_s) + \int_{A_f} \psi_n(\vec{r}_i) \rho_o \omega^2 w(\vec{r}_f) dA + \int_{A_H} \psi_n(\vec{r}_i) \frac{\partial p_i(\vec{r}_i)}{\partial n} dA] \quad (24)$$

이 된다. 여기서 우변의 첫 번째 항은 일반화된 음원 가진력으로서

$$q_n = \int_V \psi_n(\vec{r}_i) Q(\vec{r}_i) dV \quad (25)$$

로 정의되었다. 식 (24)의 우변 두 번째 항은 유연한

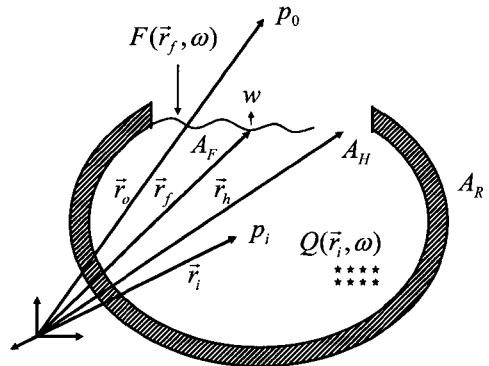


Fig. 3 Configuration of a general coupled system with bounded and unbounded spaces separate by a flexible structure and an opening

구조물의 변위로서 진공 중에서의 모드의 합

$$w(\vec{r}_f) = \sum_{m=0}^{\infty} W_m \phi_m(\vec{r}_f) \quad (26)$$

을 이용하여

$$\int_{A_f} \psi_n \rho_0 \omega^2 w dA = \rho_0 \omega^2 \sum_{m=0}^{\infty} W_m \int_{A_f} \psi_n \phi_m dA \quad (27)$$

로 표현할 수 있다. 수식을 간단하게 표현하기 위해 공동 내부의 모드와 유연한 구조물의 모드 사이의 관계를 표현하는 연성계수를

$$C_{nm}^{\psi\phi} = \int_{A_f} \psi_n(\vec{r}_i) \phi_m(\vec{r}_f) dA \quad (28)$$

로 정의하자.

한편, 입구에서의 속도를 모드 함수의 합으로 표현할 수 있다고 가정하면

$$v_n(\vec{r}_h) = \sum_{h=0}^{\infty} U_h^H \phi_h(\vec{r}_h) \quad (29)$$

식 (24)의 우변 세 번째 항은

$$\int_{A_h} \psi_n \frac{\partial p_i}{\partial n} dA = -j\rho_0 \omega \int_{A_h} \psi_n \sum_{h=0}^{\infty} U_h^H \phi_h dA \quad (30)$$

로 표현할 수 있다. 여기서 또 다시 수학적 표현의 편의를 위해 공동 내부의 음압 모드와 입구의 속도 모드 사이의 연성계수를

$$C_{nh}^{\psi\phi} = \int_{A_h} \psi_n(\vec{r}_i) \phi_h(\vec{r}_h) dA \quad (31)$$

로 정의하자. 그러면, 식 (24)에 $k_n = \omega_n / c$ 와 $k = \omega / c$ 를 대입하고, 유연한 구조물의 변위를 속도 ($U_m^S = j\omega W_m$)의 성분으로 표현한 후 식 (25)~(31)을 이용하여 다음의 식으로 간단히 표현할 수 있다.

$$P_n = \frac{j\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \frac{\rho_0 c^2}{V\Lambda_n^4} \left[q_n - \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm}^{\psi\phi} U_m^S - \sum_{h=0}^{\infty} C_{nh}^{\psi\phi} U_h^H \right] \quad (32)$$

우변의 괄호 밖 항은 강제벽공동의 음향 임피던스에 해당하는 대각 행렬로서 이를 \mathbf{Z}_a 로 정의하고, 식

을 행렬과 벡터의 표현을 이용하여

$$\bar{P} = \mathbf{Z}_a [\bar{q} - \mathbf{C}^{\psi\phi} \bar{U}^S - \mathbf{C}^{\psi\phi} \bar{U}^H] \quad (33)$$

로 간단히 표현할 수 있다. 여기서 변수의 위에 막대가 있는 경우는 행 벡터를 의미한다. 공동의 내부에 발생하는 음압이 유연한 구조물과 입구에 의하여 많은 영향을 받는 경우가 큰 연성 현상이 발생하는 것으로 생각할 수 있으며, 식 (28)과 식 (31)의 연성계수를 살펴보면 공동과 구조물 또는 공동과 입구의 파수가 같은 경우에 연성의 정도가 증가하는 것으로 생각할 수 있다. 또한 면적에 관한 적분으로 표현되므로 구조물의 크기가 0이 되는 극한의 경우를 생각하면 공동과 구조물 사이에는 연성 현상이 발생하지 않은 당연한 물리적 유추가 가능하다. 한편, 식 (33)을 단순계의 경우에 해당하는 식 (7)과 비교하면 단면적에 해당하는 부분이 면적에 관한 적분을 포함하는 연성계수로 대체되어 같은 형태의 수식이 됨을 알 수 있다. 이는 일반적인 연성계에 대해서 단순계를 확장하여 그 물리적 설명이 가능함을 의미한다.

이제 유연한 구조물의 거동에 대하여 논의하여 보자. 먼저 구조물의 운동은 진공 중의 고유 모드의 조합으로 식 (26)과 같이 표현할 수 있고, 이는 외력이 없는 다음의 동차 방정식을 만족하여야 한다.

$$\mathcal{L}[\phi_m(\vec{r}_f)] - \omega_m^2 m(\vec{r}_f) \phi_m(\vec{r}_f) = 0 \quad (34)$$

식 (34)을 식 (16)에 대입하고 ϕ_r 을 곱하고, 유연 구조물의 면적에 대하여 적분을 수행한 후, 면적으로 정규화하면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_f} \int_{A_f} \sum_{m=0}^{\infty} m(\vec{r}_f) [(\omega_m^2 - \omega^2) W_m \phi_m(\vec{r}_f) \phi_r(\vec{r}_f)] dA \\ &= \frac{1}{A_f} \int_{A_f} (p_i(\vec{r}_f) - p_o(\vec{r}_f) - F(\vec{r}_f)) \phi_r(\vec{r}_f) dA \end{aligned} \quad (35)$$

이 된다. 여기서 적분항을 살펴보면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_f} \int_{A_f} m(\vec{r}_f) \phi_m(\vec{r}_f) \phi_r(\vec{r}_f) dA \equiv M_m^S \quad \text{for } m=r \\ & \equiv 0 \quad \text{for } m \neq r \end{aligned} \quad (36)$$

$$\int_{A_f} p_i(\vec{r}_f) \phi_m(\vec{r}_f) dA = \sum_{n=0}^{\infty} (C_{nm}^{\psi\phi})^T P_n \quad (37)$$

로 표현할 수 있다. 여기서 M_m^S 은 일반화된 구조물

의 질량, 식 (37)은 내부의 음장이 계에 미치는 일반화된 힘을 표현한다.

공동 외부의 음압은 경계에서 가상의 음원이 강체 배플에 놓여있는 경우로 생각할 수 있다. 이는 키르호프-헬름홀츠 적분방정식을 이용하여 표현할 수 있고, 노이만 경계조건을 만족하는 그린함수를 사용하고, 식 (18)을 이용하면 외부음장을 내부음장을 이용하여 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$p_o(\vec{r}_o) = \int_{A'} G_N(\vec{r}_o | \vec{\xi}) \frac{\partial p_i(\vec{\xi})}{\partial n} dA' \quad \text{on } A' = A_F + A_H \quad (38)$$

식 (35)의 우변 두 번째 항은 공동 외부의 음장과 유연한 구조물의 연성에 의해 발생하는 일반화된 힘으로 생각할 수 있다. 여기서 식 (18)의 경계조건 즉, 유연한 구조물의 속도와 공동 내/외의 유체 입자 속도가 일치하는 조건을 생각하면 공동 외부의 음압을 공동 내부의 음압의 모드 계수를 이용하여

$$\int_{A_F} p_o(\vec{r}_f) \phi_m(\vec{r}_f) dA = \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn}^{G\phi d\psi} P_n \quad (39)$$

로 표현할 수 있을 것이다. 여기서 $C_{mn}^{G\phi d\psi}$ 은 연성계수로서 다음으로 정의된다.

$$C_{mn}^{G\phi d\psi} \equiv \int_{A_F} \int_{A'} \phi_m G_N \frac{\partial \psi_n}{\partial n} dA' dA \quad \text{on } A' = A_F + A_H \quad (40)$$

이는 유연한 구조물의 모드와 내부 음장 모드의 공간 변화를 사이의 연성 현상이 외부 음장으로 전달되는 특성을 포함하는 연성계수로서 모드 사이의 연성이 반 무한 공간으로 방사되는 효과를 표현하는 계수라 생각할 수 있다. 유연한 구조물의 변위를 속도 ($U_m^S = j\omega W_m$)의 성분으로 수식을 표현하면

$$U_m^S = \frac{j\omega}{\omega_m^2 - \omega^2} \frac{1}{M_m^S A_F} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (C_{nm}^{\psi\phi})^T P_n - \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn}^{G\phi d\psi} P_n - F_m \right) \quad (41)$$

이 된다. 우변의 괄호 밖 항은 유연한 구조물의 모빌리티에 해당하는 대각 행렬이다. 이를 \mathbf{Y}_s 로 정의하고, 식 (41)을 행렬과 벡터의 표현

$$\bar{U}^S = \mathbf{Y}_s \left[\mathbf{C}^{\psi\phi T} \bar{P} - \mathbf{C}^{G\phi d\psi} \bar{P} - \bar{F} \right] \quad (42)$$

로 간단히 표현할 수 있다. 주어진 외력에 의해 발생하는 유연한 구조물의 속도는 공동의 내부와 외부에 발생한 음압에 의해 영향을 받는 것으로 수식을 설명할 수 있다. 우변 괄호 속의 첫 번째 항에서 식 (28)의 전치 행렬에 해당하는 연성계수는 구조물과 공동의 파수가 같은 경우에 큰 연성 현상이 발생함을 보이고 있다. 식 (40)으로 표현되는 우변의 두 번째 항은 공동의 음압에 관한 모드의 공간 변화에 대한 항과 외부로 전달되는 매개체인 그린함수가 연관되어 있음을 알 수 있다. 이는 공동 내에 형성되는 속도의 모드와 구조물의 모드 사이의 파수가 같은 경우에 큰 연성 현상이 발생함을 의미한다. 또한 적분 구간을 살펴보면 형성된 음압이 평판뿐만 아니라 입구를 통하여서도 외부로 방사되므로 입구의 면적도 포함되어 있음을 알 수 있다. 이는 구조물에 발생하는 연성현상이 공동과 구조물 사이의 현상이 아니라 입구에 의해서도 영향을 받는다는 것을 의미한다. 한편 이식을 단순계에 의해 살펴본 식 (8)과 비교하면 같은 형태를 가짐을 알 수 있고, 단면적에 해당하는 부분이 연성계수에 행렬로 대체된 것을 알 수 있다. 즉, 단순계를 통하여 얻은 물리적 의미를 일반적인 연성 현상에서도 동일하게 적용하는 것이 가능함을 보이고 있다.

이제 입구에서 속도와 음압에 대해 살펴보자. 입구의 속도는 모드 함수의 조합을 이용해 식 (29)과 같이 표현할 수 있고, 내부 경계에서의 음압을 오일러 방정식을 이용하여 속도로 표현하고, 입구의 속도에 관한 모드 함수를 곱하고, 입구의 면적에 대해 적분하면

$$U_h^H = \frac{j}{\rho_0 \omega A_H} \sum_{n=0}^{\infty} C_{hn}^{\phi d\psi} P_n \quad (43)$$

이 되고, 여기서 공동 내부의 음압 모드와 입구의 속도를 표현하는 모드 사이의 연성계수는 다음으로 정의된다.

$$C_{hn}^{\phi d\psi} = \int_{A_H} \phi_h(\vec{r}_h) \frac{\partial \psi_n(\vec{r}_i)}{\partial n} dA \quad (44)$$

또한 주어진 주파수에서 모든 항에 공통으로 포함되는 항을 $\alpha_\omega = j / \rho_0 \omega A_H$ 로 정의하고, 이를 행렬식으로 표현하면

$$\bar{U}^H = \alpha_{\omega} \mathbf{C}^{\phi d\psi} \bar{P} \quad (45)$$

이 된다.

이로서 핵심이 되는 식 (33), 식 (42) 그리고 식 (45)을 얻었다. 이를 압력과 구조물에서의 속도에 대해 정리하면

$$\bar{P} = \left[\mathbf{I} + \mathbf{Z}_a \left(\mathbf{C}^{\psi\phi} \mathbf{Y}_s \mathbf{C}^{\psi\phi T} - \mathbf{C}^{\psi\phi} \mathbf{Y}_s \mathbf{C}^{G\phi d\psi} + \alpha_{\omega} \mathbf{C}^{\psi\phi} \mathbf{C}^{\phi d\psi} \right) \right]^{-1} \mathbf{Z}_a \left[\bar{q} + \mathbf{C}^{\psi\phi} \mathbf{Y}_s \bar{F} \right] \quad (46)$$

이 된다. 단순한 경우로 가정하며 수식을 확인하여 보자. 먼저 Fig. 1(a)에 제시한 연성계와 같이 유한 공간과 무한 공간이 입구가 없는 유연한 구조물을 통하여 연성된 경우를 생각하자. 이 경우 입구와 관련된 연성계수인 $\mathbf{C}^{\psi\phi}$ 와 $\mathbf{C}^{\phi d\psi}$ 는 0이 될 것이다. 이를 적용하여 수식을 다시 기술하면

$$\bar{P} = \left[\mathbf{I} + \mathbf{Z}_a \left(\mathbf{C}^{\psi\phi} \mathbf{Y}_s \mathbf{C}^{\psi\phi T} - \mathbf{C}^{\psi\phi} \mathbf{Y}_s \mathbf{C}^{G\phi d\psi} \right) \right]^{-1} \mathbf{Z}_a \left[\bar{q} + \mathbf{C}^{\psi\phi} \mathbf{Y}_s \bar{F} \right] \quad (47)$$

여기서 연성 계수가 곱해진 모빌리티와 음향 임피던스를 연성 모빌리티와 연성 음향 임피던스로 다음과 같이 정의하자.

$$\mathbf{Y}_{cs} = \mathbf{C}^{\psi\phi} \mathbf{Y}_s \mathbf{C}^{\psi\phi T}, \quad \mathbf{Y}_{csp} = \mathbf{C}^{\psi\phi} \mathbf{Y}_s \mathbf{C}^{G\phi d\psi} \quad (48)$$

이를 이용하여 (47) 식을 다시 표현하면

$$\bar{P} = \left[\mathbf{I} + \mathbf{Z}_a \mathbf{Y}_{cs} - \mathbf{Z}_a \mathbf{Y}_{csp} \right]^{-1} \mathbf{Z}_a \left[\bar{q} + \mathbf{C}^{\psi\phi} \mathbf{Y}_s \bar{F} \right] \quad (49)$$

이 된다.

여기서 많은 실용적 사례가 있는 외부 음장과 구조물 사이의 연성을 무시하여 외부 음압이 없는 보다 간단한 연성계의 경우를 생각하면, 외부 음장과 관련된 연성계수인 $\mathbf{C}^{G\phi d\psi}$ 가 0이 될 것이고, 이로부터 \mathbf{Y}_{csp} 가 0이 됨을 알 수 있고 이를 적용하여 다음 식으로 간단히 기술할 수 있다.

$$\bar{P} = \left[\mathbf{I} + \mathbf{Z}_a \mathbf{Y}_{cs} \right]^{-1} \mathbf{Z}_a \left[\bar{q} + \mathbf{C}^{\psi\phi} \mathbf{Y}_s \bar{F} \right] \quad (50)$$

이는 단순계의 가정을 통하여 유도된 2장의 식 (5)과 같은 형태를 가지는 것을 알 수 있다. 이로부터 일반적인 연성계가 단순한 연성계의 확장과 같은

물리적 특성을 가지는 것을 알 수 있다.

3.2 연성의 정도(Degree of Coupling)

외부 유체를 고려하지 않은 단순한 연성계에 해당하는 식 (50)를 보면 우변 첫 번째 항이 단위 행렬에 수렴하면 비 연성계의 특성, 즉 약한 연성(weakly coupling)이 되고, 그 값이 클수록 강한 연성이 발생한다. 이로부터 가진 주파수가 음향 모드의 주파수와 일치하는 경우와 구조물의 주파수에 일치하는 두 가지 경우 즉 음향계의 공진 주파수 또는 구조물의 공진 주파수 근처에서 강한 연성 현상이 발생하고, 구조물의 질량이 작아질수록, 공동의 강성이 커질수록 커진다. 즉, 매질의 밀도와 음속이 커질수록, 공동의 공간이 작아질수록, 연성 면적이 증가할수록 연성이 잘 발생하는 것을 알 수 있다. 또한 연성계수의 제곱에 해당하는 값이 큰 경우 강한 연성현상이 나타남을 알 수 있다. 이는 공동과 구조물 또는 공동과 입구 사이에 같은 정도의 파수를 갖는 모드가 결합된 경우에 큰 연성 현상이 발생하는 것으로 설명할 수 있다.

한편, 외부 유체를 고려한 식 (49)을 살펴보면

$$\mathbf{Z}_a \mathbf{Y}_{cs} - \mathbf{Z}_a \mathbf{Y}_{csp} = \mathbf{Z}_a \mathbf{C}^{\psi\phi} \mathbf{Y}_s (\mathbf{C}^{\psi\phi T} - \mathbf{C}^{G\phi d\psi}) \gg 0 \quad (51)$$

인 경우에 큰 연성 현상이 발생하고, 두 연성 계수의 값이 같은 경우 연성 현상이 약해짐을 알 수 있다. 이는 구조물과 연성될 에너지가 전부 외부로 방사되어 연성 현상에 의한 효과가 매우 작아지는 것으로 생각할 수 있다.

4. 결 론

구조-음향 연성계의 단순한 경우에 대해서 음향계의 임피던스와 구조계의 모빌리티를 이용하여 연성계를 간단히 표현하였으며, 음향계와 구조계가 어떤 매커니즘을 통하여 정보를 주고 받는가를 살펴보았다. 또한 음향 임피던스와 구조물의 연성 모빌리티의 곱이 연성의 정도를 판단하는 기준됨을 보였다. 일반적인 형태의 연성계에 대해서 모드 조합에 의한 해석 방법을 적용하여 행렬과 벡터의 형태로 연성 방정식을 유도하고 단순계를 이용한 해석의 결과와 동일한 형태의 결과가 됨을 보였다. 또한 연성의 정도가 구조계의 질량에 반비례하고, 음향계의 강성에 비례하

며, 모드 간의 결합 정도를 나타내는 연성계수의 크기와 비례하며, 가진 주파수와 음향계 또는 구조계의 공진 주파수와의 차에 반비례 함을 보였다.

후 기

이 연구의 일부는 교육부의 두뇌한국21 (BK21) 사업의 지원으로 수행되었을 밝히며, 지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

(1) Guy, R. W. and Bhattacharya, M. C., 1973, "The Transmission of Sound Through a Cavity-backed Ffinite Plate," J. Sound Vib., Vol. 27, No. 2, pp. 203~223.

(2) Guy, R. W., 1979, "The Steady State Transmission of Sound at Normal and Oblique Incidence Through a Thin Panel Backed by a Thin Panel Backed by a Rectangular Room a Multi-modal Analysis," Acustica, Vol. 43, pp. 295~304.

(3) Pan, J., Hansen, C. H. and Bies, D. A., 1990, "Active Control of Noise Transmission Through a Panel Into a Cavity: I. Analytical Study," J. Acous. Soc. Am., Vol. 87, No. 5, pp. 2098~2108.

(4) Pan, J. and Hansen, C. H., 1991, "Active Control of Noise Transmission Through a Panel Into a Cavity: I. Analytical study," J. Acous. Soc. Am., Vol. 90, No. 3, pp. 1488~1492.

(5) Kim, S. M. and Brennan, M. J., 2000, "Active Control of Harmonic Sound Transmission Into an Acoustic Enclosure Using Both Structural and Acoustic Actuators," J. Acous. Soc. Am., Vol. 107, No. 5, pp. 2523~2534.

(6) Fuller, C. R. and Fahy, F. J., 1982, "Characteristics of Wave Propagation and Energy Distributions in Cylindrical Elastic Shells Filled with Fluid," J. Sound Vib., Vol. 81, No. 4, pp. 501~518.

(7) Craggs, A., 1971, "The Transient Response of a Coupled Plate-acoustic System Using Plate and Acoustic Finite Elements," J. Sound Vib., Vol.

15, No. 4, pp. 509~528.

(8) Craggs, A., 1973, "An Acoustic Finite Element Approach for Studying Boundary Flexibility and Sound Transmission Between Irregular Enclosures," J. Sound Vib., Vol. 30, No. 3, pp. 343~357.

(9) Dowell, E. H. and Voss, H. M., 1963, "The Effect of a Cavity on Panel Vibration," AIAA Journal, Vol. 1, No. 2, pp. 476~477.

(10) Dowell, E. H., Gorman, G. F. and Smith, D. A., 1977, "Acoustoelasticity : General Theory, Acoustic Natural Modes and Forced Response to Sinusoidal Excitation, Including Comparisons with Experiment," J. Sound Vib., Vol. 52, No. 4, pp. 519~542.

(11) Pan, J., Hansen, C. H. and Bies, D. A., 1990, "Active Control of Noise Transmission Through a Panel Into a Cavity: I. Analytical Study," J. Acous. Soc. Am., Vol. 87, No. 5, pp. 2098~2108.

(12) Kim, S.-M. and Kim, Y.-H., 2002, "Solution of Coupled Acoustic Problems : a Partially Opened Cavity Coupled with a Membrane and a Semi-infinite Exterior Field," J. Sound Vib., Vol. 254, No. 2, pp. 231~244.

(13) 서희선, 김양한, 2004, "구조-음향 연성계의 경계값 변화에 따른 방사음 변화," 한국소음진동공학회논문집, 제 14 권, 제 7 호, pp. 604~611.

(14) 서희선, 김양한, 2004, "다양한 경계 형상에 따른 구조-음향 연성계의 음향특성," 한국소음진동공학회논문집, 제 14 권, 제 8 호, pp. 718~725.

(15) Nefske, D. J., Wolf, J. A., JR and Howell, L. J., 1982, "Structural-acoustic Finite Element Analysis of the Automobile Passenger Compartment: a Review of Current Practice," J. Sound Vib., Vol. 80, No. 2, pp. 247~266.

(16) Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppens, A. B. and Sanders, J. V., 1982, "Fundamentals of Acoustics," pp. 225~234, John Wiley and Sons.

(17) Kim, S. M. and Brennan, M. J., 1999, "A Compact Matric Formulation Using the Impedance and Mobility Approach for the Analysis of Structural-acoustic Systems," J. Sound Vib., Vol. 223, No. 1, pp. 97~113.