韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2005. 5. 제 44권, 제 2호, 297-306.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2005, Vol. 44, No. 2, 297-306.

비유클리드 기하의 정신적 표상을 위한 S/W Cinderella[1)]

계 영 희 (고신대학교)
신 경 희 (이화여자대학교)

I. 서론

여러 개념에 대한 풍부한 정신적 표상을 갖는 것은 수학의 교수와 학습의 인지 활동에 매우 중요하다. 경우에 따라서는 같은 개념에 대한 여러 가지 정신적 표상들이 서로 보완되어 결국에는 그 개념에 대한 하나의 표상으로 통합될 수도 있다. 이러한 통합의 과정은 한 개념의 추상화와 연결이 되고 여러 가지 표상들을 동시에 이용할 수 있어 필요한 순간이나 문제 상황에서 적절한 표상들 간에 효과적으로 대응할 수 있다(Dreyfus, 1991).

인지과학이 수학교육에 영향을 주기 시작하면서 발생적 인식론은 1960년대에 인간행동 관찰의 방향을 바꾸어 놓았고 학습자의 수학적 행동의 인지구조와 아동의 수학개념 발달의 세밀한 관찰과 분석이 이루어지면서 피아제, 브루너, 폴리아, 카펜서, 골딘 등 수 많은 학자들의 이론과 연구가 발표되었다. 더 나아가 1980년대, 90년대에는 컴퓨터 환경에서 학습자의 상호작용과 수학적 구조 연구, 실습 등에 언어론, 의미론, 기호론의 연구가 필요하게 되었다. 여기에서 표현과 표상(representation)의 문제는 수학교육의 기호 체계와 함께, 학습자의 의미 있는 개념 이해를 위하여 은유, 환유를 포함한 시각화, 공간적 표상, 감각적 표상, 이미지 표상 등의 연구로 이어졌다(Goldin, 1998a, 1988b: Kaput, 1998).

골딘(Goldin)은 그래프나 도형, 식 등 물리적 대상을 외적표상(external representation)이라하였고, 정신적인 이미지를 나타내는 것을 내적표상(internal representation)으로 구분하면서 언어적 체계, 이미지 체계, 형식적인 기호적 체계, 계획하고 실행하고 모니터링 할 수 있는 체계, 정적인 체계 등 다섯 가지로 내적 표상 영역을 나누면서 문제 해결 능력의 구조모델을 발전시켰다. 동적인 컴퓨터 환경이 만들어내는 언어와 도구, 구체적 조작과 모델은 적절한 외적 표상을 학습자에게 제공하고 이차적으로는 그것이 다시 한 개념의 대상이 되어 의미있는 내적 표상으로 개개인에게 내재되어진다.(Mesquita, 1998: Owe ns & Clements, 1998: Cifarelli, 1998)

인지과정이 기본적으로 수학적 표현 및 표상과 관련된다는 것을 전제로 하여 학습자의 표상활동을 설명하기 위한 표상 모델을 구성한 장혜원(1997)은 추상적인 수학적 개념을 효과적으로 인지하기위하여 컴퓨터 매체를 통한 시각적 표상모델을 제안하였다. 표상모델이 의도하는 개념학습은 다양한 표현에 대해 다양한 표상을 구성함으로써 다중표현의 내재적 유사성에 기초하여 표상 집합체로부터 본질이 되는 개념을 파악하는 과정, 즉 개념구성을 이미지하기 위하여 컴퓨터 매체를 통한 시각적 표상모델을 제안하였다. 적절한 시각적 이미지를 만들어 잘 활용하면 한 개념에 대한 보다 효과적인 학습으로 이어질 수 있기 때문이다. 개념이 시각적인 표상을 갖는 경우에 개념이미지는 시각적 표상일 수 있으며 인상이나 경험의 총체적인 것일 수 있다.(Vinner, 1991)

본 논문에서는 비유클리드 기하에 대한 학생들의 정신적 표상을 위한 컴퓨터 환경 수업을 제안한다. 탐구형 소프트웨어인 Cinderella를 통하여 학생들이 비유클리드 기하에 대한 지식을 구성하고 유클리드 기하와의 차이를 명백히 함으로써 새로운 기하의 존재성을 인식하고 Cinderella에 나타나는 구체적 이미지를 통하여 비유클리드 기하의 정신적 표상을 분명히 갖도록 한다. 또한 기하학 강의에서 여러 가지 표상을 체계적으로 사용하며 표상을 전환하는 과정을 강조하여 개념에 대한 시각적인

1) 이 논문은 2002학년도 고신대학교 교내연구비 지원으로 연구되었음.

* 2005년 4월 투고 , 2005년 5월 심사 완료.
* ZDM 분류 : D45
* MSC2000 분류 : 97D40
* 주제어 : 비유클리드 기하, 신데렐라 프로그램, 지적표상.

정신적 이미지를 만들 수 있게 되고, 후에 비유클리드 기하에 관한 추론을 하는데 도움이 될 수 있도록 시각화 하고자 한다.

II. 비유클리드 기하학이란 무엇인가?

B.C. 300년경 플라톤 학파의 제자 유클리드에 의하여 편찬된 수학책 <원론(Elements)> 은 오늘날 순수수학이라고 부르는 것의 원형이다. 유클리드는 당시의 사상인 플라톤의 철학 이데아 사상의 기반위에 이미 알려져 있던 레온의 <원론>, 히포크라테스의 <원론>, 테우디오스의 <원론> 등을 총 집약하여 13권을 저술한 것이다. 원론은 5개의 공준(postulate)과 5개의 공리를 설정하였고, 각 권마다 정의를 하면서 오늘날 정리라고 부르는 명제를 모두 465개 추론해 내었다. 연역적인 추론의 공리론적 방법과 전개는 너무도 완벽하여 오늘날까지 초등학교부터 고등학교까지 교수되는 기하학의 내용은 대부분 유클리드 기하를 지칭하고 있는 것이다. 진리처럼 여겨졌던 원론에서 문제는 평행공준이라고 불리는 5번째 공준이 문제였다(김용운, 1990).

공준 1. 임의의 점으로부터 임의의 점에게로 직선을 긋는 것.

공준 2. 유한의 직선을 계속 곧은 선으로 연장하는 것.

공준 3. 임의의 중심과 거리(반지름)를 가지고 원을 그리는 것.

공준 4. 모든 직각은 서로 같다는 것.

공준 5. 하나의 직선이 두 직선과 만나서 같은 쪽에 두 직각보다 작은 안각을 만들 때, 이 두 직선은 그것들을 한없이 연장하면 두 직각보다 작은 각이 만들어지는 쪽에서 만나는 것.

외형적으로도 평행공준이 다른 4개의 공준과 차별되지만 많은 수학자들은 평행공준이 증명될 것만 같은 강한 충동을 느꼈으며 그 호기심을 억제하지 못하였다. 프톨레미(Ptolemy, B.C 85-165), 프로클러스(Proclus, 410-485), 알하젠(Alhazen, 965-1041), 오마르 카얌(Omar Khay yam, 1048-1131), 월리스(Wallis, 1616 -1703), 싸케리(Saccheri, 1667-1733), 람베르트(Lambert, 1728-1777)등 수많은 수학자들이 2,000년 이상 평행공준을 증명하여 공준이 아닌 정리로 만들고 싶었던 것이다(Giacardi, 2000: Heiede, 2000). 그러나 평행공준을 증명하고자 하면 그 대신 새로운 공준이 또 필요했으며 새로 가정하는 공준은 결국 평행공준과 동치임이 밝혀지곤 했다. 마침내 18세기에 가우스를 비롯하여 야노스 볼리야이(Janos Bolyai, 1802-1860), 로바체프스키(Lobachevsky, 1793-1856) 등의 수학자들은 평행공준을 부정한 새로운 기하학을 구성하기에 이르렀다. 이른 바 "임의의 한 직선과 직선 밖의 한 점을 지나면서 주어진 직선과 평행인 직선은 두 개 이상 존재한다"라는 쌍곡공리를 근거로 쌍곡적 기하학(hyperbolic geometry)이 탄생하게 된 것이다. 그 후 벨트라미(Beltrami)는 추적선(tractrix)을 회전시켜 R^3상에서 쌍곡곡면을 나타내었다. 이를 의구(pseudo-sphere)라고 부른다. 의구면은 쌍곡 기하학의 여러 성질을 만족시키는 가장 적합한 모형이다(이종우, 2001).

공학이나 건축과 같은 크지 않은 거리의 통상적인 측정에서는 유클리드 기하가 매우 편리하다. 그러나 큰 거리를 측정하려면 유클리드 기하의 표상의 정확성은 보다 덜 명백해진다. 예를 들어 직선을 광선에 의하여 움직인 거리라고 하면 실험오차 때문에 실제측정에 의해서는 공간이 유클리드 공간임을 결코 증명 할 수가 없으며 단지 비유클리드적 공간이라는 것만이 명백해질 뿐이다. 아인슈타인의 상대성이론에 의하면 시공의 기하학은 물질에 의해 영향을 받으므로 광선은 중력에 의해 휘어진다는 것이다. 유클리드나 로바체프스키가 만든 어떤 기하도 공간에 대한 우리의 개념에 적합하지는 않다. 포앙카레는 이를 쌍곡적 기하는 유클리드 기하보다 더 사실이 될 수는 없으며 단지 편리할 뿐이라고 설명했다(Greenberg, 1974).

1850년경 또 다른 비유클리드 기하학이 출현된다. 리만(Riemann)은 평행공준을 "임의의 한 직선과 직선 밖의 한 점을 지나면서 주어진 직선과 평행한 직선은 존재하지 않는다"라고 부정하면서 "직선은 한 없이 연장할 수 있다"는 공준까지도 부정한 결과 리만의 타원기하학(Elliptic Geometry)을 만들었다. 이와 같이 쌍곡적기하, 타원기하, 구면기하(Sperical Geometry)는 유클리드 기하

의 평행공준의 부정에서 출발하였으므로 'Not-Euclidean Geometry'가 아니라 'Non-Euclidean Geometry(비유클리드 기하)'라고 부르는 것이다. 요컨대 'Not-Euclidean Geo metry'는 사영기하, 아핀기하, 위상기하 등을 지칭하게 된 것이다(김용운, 1990).

III. 컴퓨터 환경

수학의 교수 학습에서 컴퓨터가 학생들의 발견의 도구로 이용되어야 함은 이미 시대적인 요청이다. 컴퓨터 학습 환경을 이용하면 동일 개념에 대한 여러 표상들 사이의 관계를 분명히 알 수 있고, 기본 공간에 따른 개념의 차이를 분명히 눈으로 확인할 수 있다. 이러한 명확성으로 관계를 보다 잘 파악할 수 있고 정확한 개념 형성에 도움을 주며 관련된 아이디어를 생각해 낼 수 있다.

Dubinsky & Tall(1991)은 수학의 초기 단계에서 컴퓨터는 새로운 직관과 시각적 아이디어를 분명히 드러나게 하는 강점을 이용하여 개념 형성에 효과적인 결과를 얻을 수 있음을 주장하였다. 한 개념에 대한 정신적 이미지를 구체적으로 구성 가능하도록 컴퓨터 소프트웨어를 설계할 수 있다면 추상적인 아이디어가 컴퓨터상에서 실행되고 표현될 때 최소한 그것이 존재한다는 의미에서 그 아이디어는 학생들의 마음속에 구체적으로 존재하는 것이다.

조완영(2000)은 탐구형 기하 소프트웨어의 수학 교육적 가능성을 인지하고 중학생들의 증명활동에서 탐구형 기하 소프트웨어의 영향을 연구하였다. 기호화, 가정과 결론의 구분과 의미 이해, 경험적 정당화와 연역적 정당화 사이의 상호작용에서 학생들의 이해에 도움을 주었으며, 증명과 수학적 소양에도 긍정적인 변화를 보여 탐구형 소프트웨어의 효과적인 활용은 현재의 학교수학에서의 증명지도의 대안이 될 수 있음을 주장하였다. 김화경외(2004)는 학교기하의 도형을 동적 기하에서 새로운 함수의 표현양식으로 정의를 시도하였고, 조한혁(2003)은 개념과 원리의 탐구와 발견 그리고 문제해결을 위한 강력한 후원자로써 수학교육과 컴퓨터의 만남을 추천하면서 컴퓨터상의 도형을 직접 조작하며 도형의 성질이나 관계들을 탐구하도록 해주는 동적환경 소프트웨어의 사용을 주장하였다.(Dubinsky & Tall, 1991: Magajna, & Monaghan, 2003)

류희찬외(2000)는 탐구형 소프트웨어의 특성과 활용이 기하학습의 내용 구성에 미치는 영향을 고찰하고, 이를 바탕으로 탐구형 소프트웨어를 활용한 기하학습 내용 구성의 전반적인 방법을 모색하고 있다. 탐구형 소프트웨어의 잠재성은 기하 학습내용 각각에 대한 활용가능성보다는 수학 내에서의 내적 연결성을 강화할 수 있음을 강조하고, Goldenberg et al.(1998, 류희찬(2000)에서 재인용)가 주장한 기하학 대상들의 함수화를 창조적인 탐구활동을 위한 하나의 방법으로 제안하고 있다. 기하의 많은 정리와 사실에 대한 정적인 진술을 어떤 변화 요인에 대한 종속관계로 재서술하게 되면 학습자의 탐구활동의 절차를 변화시켜 새로운 탐구활동과 이를 통한 추측 그리고 그것에 대한 정당화의 활동을 계속하여 전개시켜 나아갈 수 있다. 이는 유클리드 기하에 익숙해 있는 학습자에게 유클리드 기하에서의 직선의 변화가 비유클리드 기하에서는 어떻게 나타나는지의 종속관계로 시각적이면서 창조적인 탐구활동을 가능하게 할 수 있다. 이어 직선과 점과의 관계, 유클리드 기하의 제 5공준의 두 직선의 평행관계, 수직관계가 구면 기하에서는 어떤 궤적을 그리는지의 탐구활동을 자극할 수 있다.

IV. Cinderella

Cinderella는 컴퓨터상에서 기하학습 및 연구를 실행할 수 있는 소프트웨어이다. 1993년부터 1998년까지 일련의 세 개의 프로젝트의 결과로 얻어진 Cinderella는 Henry Crapo와 Jurgen Richter-Gebert 이 기본 아이디어를 낸 이후 Ulrich Kortenkamp 등 여러 수학자들이 중심이 되어 그 당시까지 축적된 수학적 기하이론과 방법을 총 망라하여 응용 개발되었다. Cinderella는 일반적인 컴퓨터 환경에서 Java를 이용하여 설치, 사용할 수 있다. 자동정리 증명기법, 웹 브라우저 안에서 작동가능, 웹에서 학생들의 문제풀이 및 자동 정답체크 등 기능적인 것이 많지만, 다른 동적 기능을 가진 소프트웨어와의 가장 큰 차이는 유클리드 기하적인 표현 외에 다른 기하를 보여주는 기능이 있는 점이다. Cinderella에서는 쌍곡기하, 구면기하 등 비유클리드 기하를 보여주고 측

정할 수 있으며 같은 유형으로 다른 기하와의 연계도 가능하다. GSP나 Cabri Geometre와는 달리 Cinderella는 순수수학을 하는 학자들이 중심이 되어 제작되었기 때문에 중등학교의 교수학습보다는 대학과정에서 기하탐구의 도구로 적당하다. (Jürgen Richter-Gebert Ulrich & H. Kortenkamp, .1999; Kortenkamp, Ulrich H.& Richter-Gebert, Jurgen, 1998; Kortenkamp, Ulrich, 1999; 이동훈, 2002; 김부윤외, 2004; 김용구, 2002; 전명진, 2003; 이덕신, 2004) 그러나 지혜경(2001)은 중학교 2, 3학년의 원의 성질에 관한 단원 중, 호와 현의 관계에 대한 정리를 Cinderella를 활용하였을 때, 자와 컴퍼스만을 사용하는 지필환경의 작도보다 효과적인 학습의 결과를 얻을 수 있었다. Cinderella를 이용한 조별 수업에서 토론과 시행착오의 과정을 거치면서 정리에 대한 이해의 폭을 넓힐 수 있음을 보여주고 있다. 반면에 Cinderella는 애니메이션을 제어하는 기능이 다른 동적 기하 소프트웨어보다 떨어지고 숨기기 기능이 없으므로 작도과정이 고스란히 남아있어 깔끔한 작도의 결과를 보기에는 불편한 점이 있다. 이 점이 중등수학에서 상대적으로 많이 이용되고 있지 못한 이유 중의 하나이다.

현재까지 사용되고 있는 동적 기하 소프트웨어는 주로 유클리드 기하의 효과적인 교수학습을 지원해왔다. 그러나 Cinderella는 다른 기하 프로그램으로 불가능했던 사영기하, 구면기하, 쌍곡기하의 작도를 가능하게 하고 동시에 views의 기능은 대학과정의 기하수업에 유클리드 기하와 더불어 비유클리드 기하의 개념 정립에 매우 효과적인 학습 환경을 제공한다. 시각화는 정신적 표상을 만드는 하나의 과정이므로 수학적 개념에 대한 정신적 표상은 구체적 표현 체계를 바탕으로 마음 속에서 만들어진다. 따라서 Cinderella는 학습자에게 비유클리드 기하에 대한 구체적이고 실질적인 표상을 제공해 줄 수 있는 것이다.

V. Cinderella를 사용한 비유클리드 기하 수업 및 분석

본 연구는 비유클리드 기하에 대한 학생들의 정신적 표상을 위한 컴퓨터 환경 수업으로, 탐구형 소프트웨어인 Cinderella를 통하여 학생들이 비유클리드 기하에 대한 지식을 구성하고 유클리드 기하와의 차이를 명백히 함으로써 새로운 기하의 존재성을 인식시키고자 한다.

Goldin(1998)은 수학적 개념에 대한 외적 표상의 구체적 관찰이 어떻게 내적 표상으로 전이될까라는 질문과 컴퓨터 환경은 이 질문에 보다 효과적인 답을 줄 수 있음을 주장한 바 있다. 연구자는 Cinderella에 나타나는 구체적 이미지를 통하여 학생들이 비유클리드 기하의 정신적 표상을 분명히 가질 수 있다는 가정 하에 수업을 디자인하였다. 먼저 제 5공준을 포함한 유클리드 기하의 성질에 대한 기본 설문지를 통해 학생들이 가지고 있는 지식을 같이 공유한 후에, 비유클리드가 탄생하게 된 역사적 배경과 상황을 설명하였다.

이번 연구는 비유클리드 기하에 관하여 전혀 사전 지식이 없는 A대학 1학년 학생 6명으로 구성된 스터디 그룹을 대상으로 실험하였다. 교수의 설명과 조별토론, Cinderella 조작 등의 실험 과정은 모두 녹음되었으며 참여적 관찰과 필기노트를 통해 자료가 수집되었다. 분석과 토론은 이들 자료를 기초로 이루어졌다.

1) 점과 직선

비유클리드 기하에 대한 개념 이해는 먼저 유클리드 기하에 대한 정확하고 참다운 이해가 우선되어야 한다. 두 개념에 대한 이해와 비교는 하나의 기준이 필요한데 문제는 하나의 좋은 기준을 찾는 것이다. 이 때 공준과 공리에서 출발한 유클리드 기하는 비유클리드 기하를 이해할 수 있는 좋은 기준이 된다.

먼저 학생들이 가지고 있는 기하학에 대한 고정 관념은 대부분 유클리드 기하임을 주지시켰고, 비유클리드 기하의 탄생배경에 관하여 설명한 후에 질문을 해가면서 한 명씩 Cinderella 프로그램으로 작도를 해보도록 하였다. 유클리드 평면에서의 직선 a 를 작도하고 각각 쌍곡기하(<그림 1>)와 구면기하(<그림 2>)에서 같은 직선이 어떻게 변하는지를 관찰하는 과정을 거쳤다. 여기서 화면에 나타난 시각적 이미지는 일찍이 Goldin과 Heid(1985, Dubinsky & Tall(1991)에서 재인용)의 외적 표상과 기호 조작의 상호작용이 수학적 개념학습의 깊이 있는 이해에 도움을 준다는 주장을 확인할 수 있었다. 다음은 연구자와 학생들이 나눈 대화 내용이다.

연구자: 유클리드의 평행공준을 부정하면 어떻게 될까요?

학생A: '오직 하나만 있다'를 부정하니까 '2개 또는 3개 있다'가 될 것 같아요.

학생B: '전혀 없다'도 되지 않을까요?

연구자: 맞았어요. '2개 이상'이라고 가정했더니 새로운 기하학, 쌍곡적 기하학이 만들어졌고, '전혀 없다'라고 가정했더니 구면기하학, 리만기하학이 만들어졌는데 이를 비유클리드 기하학이라고 부르지요.

2) 평행하는 직선

유클리드 기하학과 달리 평행선이 무한히 먼 지점에서 만나기 때문에 쌍곡적 기하에서는 유클리드 기하에서의 통상점(ordinary point) 이외에 무한원점(ideal point), 초이상점(ultra-ideal point)이 만들어졌다. 이를 평면에 표현하기 위하여 Kline은 대원(great circle)을 그린 후에 원의 내부의 점, 경계선 위의 점 그리고 원 밖의 점을 각각 통상점, 무한원점, 초이상점이라고 명명했다. 쌍곡기하와 구면기하에서 직선의 모양을 보여주었다. 학생들은 새로운 형태의 직선에 호기심을 가지고 주시하였다.

연구자: 여러분이 이미 직선이라고 알고 있는 고정관념을 버리세요. 쌍곡적 기하에서는 직선을 호로 표시하고, 구면 기하에서는 구의 중심을 지나는 대원을 직선이라고 생각합니다. 그렇다면 평행한 직선들은 어떤 모습으로 나타날까요? 유클리드 기하에서는 $a//b$ 이고 $b//c$ 이면 $a//c$ 일까요?

학생C: 네. 맞아요.

연구자: '$a//b$ 이고 $b//c$ 이면 $a//c$ 이다' 정리는 유클리드 기하에서만 성립한답니다.

학생D: 그럼 방금 설명한 쌍곡적 기하와 구면 기하에서는 성립하지 않는다는 이야기예요?

연구자: 당연하지요. 자! <그림 3>을 봅시다. <그림 3>과 같이 점 A를 지나는 직선 a와 점 B를 지나는 직선 b는 왼쪽의 원둘레 위의 무한원점에서 만나므로 $a//b$ 이고, 직선 a와 점 B를 지나는 또 다른 c와도 오른쪽 무한원점에서 만나므로 평행입니다. 즉, a와 b가 평행이고, a와 c가 평행이지만 b와 c는 평행이 아니지요. 이 도형에서는 b와 c가 점 B에서 만나는 직선이랍니다. 따라서 쌍곡기하에서는 $a//b$ 이고 $b//c$ 일때 $a//c$ 가 아니랍니다.

연구자: <그림 4>는 구면기하에서 어떤 상태를 나타내는 것일까요?

학생E: 구면기하에서는 평행선이 존재하지 않는다고 했죠? 그러니 평행상태는 아닌 것 같고 두 원이 구면 위의 점에서 만나는 도형 같아요.

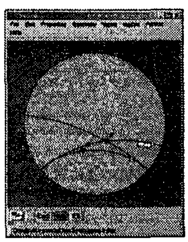
연구자: 여기서는 원이 바로 직선이라고 했지요? 지금 이야기한 것을 다르게 표현해 볼래요?

학생E: 아! 네~ 구면기하에서 어떤 두 직선이 만나는 도형이에요.

연구자: 맞았어요. 유클리드 평면에서 임의의 두 직선은 만나든지 아니면 평행이든지 둘 중의 하나가 되지만, 구면기하에서는 '임의의 두 직선은 항상 두 점에서 만난다'가 되지요. 물론 평행한 두 직선은 존재하지 않지요.

<그림 1> 쌍곡적 기하의 직선

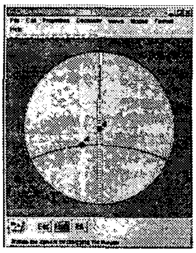
<그림 2> 구면기하의 직선



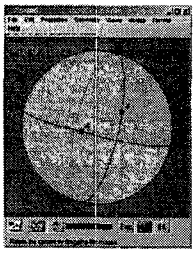
<그림 3> 쌍곡적 기하의 평행선

<그림 4> 구면 기하의 평행선

3) 직선의 수직상태



<그림 5> 쌍곡적 기하의 수직선



<그림 6> 구면기하의 수직선

유클리드 기하에서 두 직선의 수직상태는 교차각이 90도일 때를 말하지만 쌍곡기하에서는 임의의 직선 a를 그은 후에 수직선을 그으면 소프트웨어 자체가 원의 중심을 지나면서 직선으로 나타난다. 이 상황에서 어떻게 수직이 되는지 이해를 돕도록 질문한다.

연구자: 직선과 직선이 언제 수직 상태가 된다는 것은 다 알고 있지요? 이 도형은 쌍곡기하에서 직선 a와 b가 수직인 것을 작도한 거에요. 그렇다면 직선과 곡선이 수직상태가 될 수 있을까요?

학생A: 직선과 곡선은 수직이 될 수 없어요.

학생B: 그러니까 쌍곡기하에서는 수직선이 없다는 말인가요?

학생C: 아니에요! 작도가 된 걸 보면 수직은 수직인데요....

연구자: 힌트를 하나 주겠어요. 우리는 미분에서 곡선에다 무엇을 그을 수 있지요?

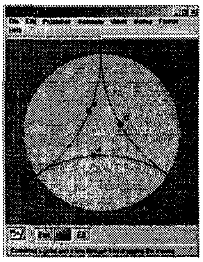
학생D: 접선이에요!

연구자: 맞았어요. 곡선의 접선과 다른 직선이 수직이면 우리는 곡선과 직선이 수직이라고 말해요.

쌍곡기하의 수직선을 *views* 메뉴에서 *spherical gemetry* 로 들어가 <그림 6>과 같은 작도를 보여주었다. 학생들은 곧바로 설명도 없이 구면기하에서의 수직상태를 알아차렸다.

$a//b$ 이고, $b//c$ 이면서 $a//c$ 인 직선을 <그림 7>과 같이 작도하면 오목한 모양의 쌍곡삼각형을 얻을 수 있다.

4) 삼각형의 안각의 합



<그림 7> 쌍곡기하의 삼각형

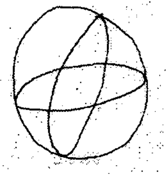
<그림 8> 구면기하의 삼각형

따라서 삼각형의 안각의 합은 180도 보다 작다는 것을 쉽게 인지시킬 수가 있으며, *views* 메뉴로 들어가서 *spherical geometry*를 클릭하여 <그림 8>과 같이 세 개의 대원이 구면삼각형을 형성하면서 삼각형의 안각의 합이 180도 보다 큰 것을 쉽게 이해시킬 수가 있었다.

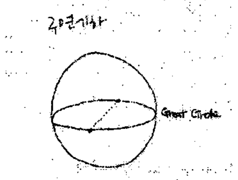
이와 같이 Cinderella 프로그램을 사용한 동적기하 환경은 '여기를 이렇게 바꾸면 어떻게 될까?', '이 직선은 구면기하에서 어떻게 변할까?', '이 평행선은 그대로 유지될까?'라는 질문을 통해 학습자의 탐구활동을 계속적으로 자극하였으므로 지필환경보다 훨씬 더 효과적이었다. 수업을 시작하기 전 학생들이 가지고 있던 기하(실제로 유클리드 기하)는 이 세상에 존재하는 모든 기하가 아니며 또 다른 기하가 존재할 수 있다는 확장된 사고를 경험하였다. 시각적 표상활동의 메카니즘은 언어적 구문적 표상과 적당히 관련되어야만 충실한 개념 학습이 이루어지며, 학생이 어떤 개념의 적절한 이미지 표상을 구성하는 데는 스스로 생각하고 추론하도록 교수의 적절한 발문과 격려가 필요하다.

일주일 후 실험수업을 한 스터디그룹 학생들을 다시 만났다. 일주일 전에 학습한 비유클리드 기하에 대한 학습의 기억과 시각적 표상 이미지가 내적 표상으로 전이되었는지, 전이되었다면 과연 어떤 기억들을 가지고 있는지를 알아보았다. 다음은 학생들이 그려낸 표상 이미지이다. 비유클리드가 무엇이라고 생각하는가의 질문에 머뭇거리다가, 생각나는 것을 마음대로 그려보거나 말로 표현한 것들이다.

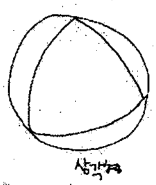
학생들의 마음속에는 이미 유클리드 기하 이외의 기하가 자리 잡고 있었으며 비교적 시각적 이미지가 그대로 내재되어 있음을 알 수 있었다. 언어적 표현보다는 컴퓨터 화면에 나타났던 쌍곡기하와 구면기하의 시각적 이미지를 일주일이 지난 시각까지도 그대로 재현해내었다.(<그림 9>, <그림 10>) 더불어 평행관계, 무한원점, 유클리드 삼각형과 다른 모양의 삼각형을 스스럼없이 그림으로 표현했다.(<그림 11-13>)



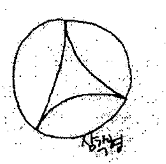
<그림 9>



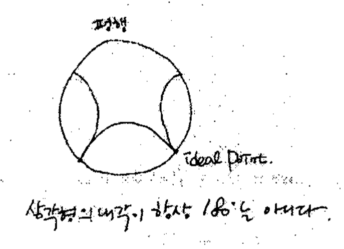
<그림 10>



<그림 11>



<그림 12>



<그림 13>

이는 언어적 표상과 지필환경에만 기반한 수업의 문제점들에 관한 대안으로써 Cinderella를 사용한 것이 학생들에게 개념형성에 있어서 외적 표상을 이용한 수업의 결과로 해석할 수 있다.

VI. 결론 및 제언

수학적 사고는 하는 것(doing)만큼 보는 것(seeing)에서 자극되어 질 수 있다고 강조한 Lesh는 내적 개념체계의 확장과 외적 표상의 미디어로써 컴퓨터 환경을 수학교육에 적용할 것을 주장했다.(Johnson & Lesh, 2003) 컴퓨터의 역동성과 다중성은 학습자의 올바른 개념체계 형성을 위해 다양한 표상을 제공할 수 있고 시각화를 통한 효과적인 교수 학습은 창의적 사고로 이어질 수 있다.

본 연구는 비유클리드 기하에 대한 학생들의 정신적 표상을 구성하기 위한 컴퓨터 환경 수업을 지지하면서, 탐구형 소프트웨어인 Cinderella를 통하여 학생들이 비유클리드 기하에 대한 지식을 구성하는 과정을 관찰 분석하였다. 유클리드 기하와의 차이를 명백히 함으로써 새로운 기하의 존재성을 인식하고 Cinderella에 나타나는 구체적 이미지를 통하여 비유클리드 기하의 정신적 표상을 분명히 가질 수 있음을 확인하였다. 이러한 수학적 경험은 유클리드 기하가 기하의 전부인 것으로 알고 있었던 학생들에게 지식의 확장과 더불어 개념의 일반화를 촉진시킨다. 이러한 과정은 추가적인 일반화를 위한 굳건한 토대를 제공해 줄 수 있다. 컴퓨터 소프트웨어를 이용한 수업에서는 학생들의 활동을 반성할 수 있는 기회를 강조하여 반영적 추상화가 일어날 수 있게 해야 한다. 지혜경(2001)의 지적처럼 컴퓨터 수업을 하고 난 후의 교과서와 노트는 너무나 깨끗하여 진정한 자기 주도적 수업의 문제점과 일방적으로 컴퓨터가 보여주는 수업에 머무를 수 있음을 경고하였다. 컴퓨터의 시각적 표상 활동을 수학적 개념형성에 효과적으로 이용하기 위해서는 철저한 사전 교수디자인이 필수적이다.

유클리드 기하의 시각적 이미지만큼 비유클리드 기하에 대한 시각적 이미지를 효과적으로 교수 학습하기 위해서 Cinderella는 적절한 교육적 매체가 될 수 있다. 하지만 Cinderella는 작도과정을 구체적으로 보여주는 기능이 없이, 유클리드 기하에서의 점, 직선, 평행선, 도형들을 쌍곡기하나 구면기하에서 그려내는 기능에 머무르고 있어서 왜 그러한 도형을 그려내야만 하는지의 지식이 없이는 단순한 그림일 수가 있다. 이는 비유클리드 기하

에 대한 오개념을 가져올 위험을 안고 있다. 언어적 기호적 및 다양한 표현을 포함한 수업모델이 요구되며 컴퓨터의 시각적 이미지를 뛰어넘는 개념 자체의 속성을 인지할 수 있는 디자인이 필요하다. 이와 더불어 Cinderella의 보다 더 지속적인 노력과 계발은 창의적이고 광의의 수학적 해석을 가능하게 하리라고 믿는다.

참 고 문 헌

김부윤 · 정재훈 (2004). 웹 환경에서 동적기하 프로그램의 비교연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 18(2), pp. 383-410.

김용구 (2002). 역동적인 기하프로그램 Cinderella의 소개, 대한수학회소식, 85. pp.30-34.

김용운·김용국 (1990). 수학사대전, 우성문화사.

김화경 · 조한혁 (2004). DGS 동적 기하에서의 새로운 함수적 관점의 정의, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 43(2), pp.177-186.

류희찬 · 유공주 · 조민식 (2000). 탐구형 소프트웨어를 활용한 기하학습내용의 구성방안 탐색, 대한수학교육학회지 수학교육연구 10(1), pp.139-159.

이덕신 (2004). 기하 작도 학습용 웹사이트 제작, 용봉수학교육연구 4, pp, 19-30

이동훈 (2002). 대화형 기하 소프트 신데렐라, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 13, pp.795-809

이종우 (2001). 기하학의 역사적 배경과 발달, 경문사

장혜원 (1997). 수학학습에서의 표현 및 표상에 대한연구, 수학교육학의 지평(우정호편, 2002), 경문사

전명진 (2003). 인터넷 시대의 기하교육 소프트웨어, 대한수학회소식 90, pp.26-31

조완영 (2000). 탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 중학교 2학년 학생의 증명활동에 관한 사례연구, 한국교원대학교 교육학 박사 학위 논문.

조한혁 (2003). 컴퓨터와 수학교육, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 42(2), pp.177-191.

지혜경 (2001). 중학교 기하수업에서의 Cinderella의 활용방안, 신라대학교 교육대학원 석사 학위논문

한인기 (1999). 작도 문제의 해결 방법, 한국수학교육학회지 시리즈E <수학교육 논문집> 9, pp.153-164.

Mesquita, A. L.(1998). On Concenptual Obstacles Linked with External Representation in Geometry, *Journal of Mathematic Behavior* 17(2), pp.183-195.

Cifarelli, V. V. (1998). The Development of Mental Representations as Problem Solving Activity, *Journal of Mathematics Behavior* 17(2) pp.239-264

Dreyfus, T.(1991). *Advanced Mathematical thinking Processes* : Advanced Mathematical Thinking (Edited by Tall, D.), Kluwer Academic Publishers, pp.25-41.

Dubinsky & Tall (1991). *Advanced Mathematical thinking Processes* : Advanced Mathematical Thinking(Edited by Tall, D.), Kluwer Academic Publishers, pp.231-243. 고등 수학적사고(2003, 류희찬, 조완영, 김인수 역), 경문사

Giacardi, L. (2000). *Scientific Research and Teaching Problems in Beltrami's Letters to Hoüel,*: Usind History to Teach Mathematics An International Perpective, Victor J. Katz Editor, pp.213-224.

Goldenberg, E. P. & Couco, A. A. & Mark, J. (1998). A role for geometry in general education, In R. Lehrer & D. Chazan(Eds.), Designing learning environments for developing understanding of geometry and space, London: Lawrence Erlbaum Associa-tes, Inc.

Goldin, G. A. (1998). The PME Working Group on Representations, *Journal of Mathematics Behavior,* 17(2), pp.283-301

Greenberg M. J.(1997). 유클리드 기하학과 비유클리드 기하학(이우영 역), 경문사

Heiede, T. (2000). *The History of Non-Euclidean Geomtry* : Using History to Teach Mathematics an International Perspective, Victor J. Katz Editor, pp.201-212.

Johnson, T. & Lesh, R.(2003). A Models and Modeling Perspective on Technology-Based Representational Media, In Lesh, R. & Doerr, H. M.(Eds), Beyond Constructivism, Lawrence Erlbaum

Associates, Publishers Mahwah

Jürgen Richter-Gebert Ulrich & H. Kortenkamp. (1999). The Interactive Geometry Software Cinderella Version 1.2

Kortenkamp, Ulrich H. (1999). Foundations of Dynamic Geometry, A dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences, Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Kortenkamp, Ulrich H. & Richter-Gebert, Jurgen (1998). *Geomery and Education in the Internet Age*, Institut Für Theoretische Informatik, ETH Zürich, Switzerland.

Kenneth Ruthven, Sara Hennessy (2002). A Practitioner Model of the Successful use of Computer-based Tools and Resources to Support Mathmatics Teaching and Learing, *PME* **26(4)**, pp.161-168

Kaput J. J. (1998). Representations, Inscriptions, Descriptions and Learning: A Kaleidoscope of Windows, *Journal of Mathematics Behavior* 17(2), pp.265-281.

Magajna, M & Monaghan, J (2003), Advanced Mathematical Thinking in a Technological Workplace, *Educational Studies in Mathematis* **52**. pp.101-122.

Owens, K. D. & Clements, M. A. (1998). Representtions in Spatial Problem Solving in the Classroom, *Journal of Mathematics Behavior* **17(2)**, pp.197-218.

Victor V. Cifarelli (1998). The Development of Mental Representations as a Problem Solving Activity, *Journal of Mathematics Behavior* **17(2)**, pp.239-264.

Vinner, S. (1991). *The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics* : Advanced Mathematical Thinking(Edited by Tall, D.), Kluwe rAcademic Publishers, pp.65-81.

S/W Cinderella for Student's mental Representation about Non-Euclidean Geometry

Kye, Younghee
Dept. of Information Media, Kosin University, Busan, Korea
E-mail : yhkye@kosin.ac.kr

Shin, Kyunghee
Dept. of Mathematics Education, Ewha Womans University, Seoul, Korea
E-mail : skh@ewha.ac.kr

In this paper, we propose a computer environment class for student's mental representations about non-Euclidean geometry. Through the software Cinderella, students construct knowledge about non-Euclidean geometry and recognize differentness between Euclidean and non-Euclidean geometry. Also they recognize an existence of non-Euclidean geometry newly and its mental representations with images represented in Cinderella. In geometry class, we make students can use many representations systematically and can figure a visual internal image by emphasizing a transform process. And then students can reason about non-Euclidean geomery.

* ZDM classification : D45
* MSC2000 classification : 97D40
* key words : non−Eucleden geometry, S/W Cinderella, mental representation.