

# 설동관측기를 연합한 강인 상태추정기 설계 및 해석

## Design and Analysis of a Robust State Estimator Combining Perturbation Observer

권 상 주\*  
(SangJoo Kwon)

**Abstract :** This article describes a robust state estimation method which enables to produce reliable estimates in spite of heavy perturbation including plant uncertainty and external disturbances. The main idea is to combine the standard state estimator with the perturbation observer in the estimator frame. The perturbation observer reflects equivalent quantity of plant uncertainty and external disturbances during the estimation process so that the state estimator dynamics gets as close as possible to the real plant dynamics. The robust state estimator proposed in this paper is given in a recursive discrete-time form which is very useful for implementation purpose. In terms of the error dynamics derived for the robust state estimator, we discuss the stability issue and noise sensitivity. The effectiveness and practicality of the robust state estimator are verified through numerical examples and experimental results.

**Keywords :** state estimator, perturbation observer, robustness

### I. 서론

상태변수 추정 문제는 특정 시스템의 제어 목적뿐만 아니라 모니터링(monitoring), 고장 진단(fault diagnosis), 시스템 식별(identification)과 같은 다방면의 응용 분야에서 매우 현실적 이면서 중요한 문제로서 인식되고 있다. 특정 시스템 또는 프로세스에 대한 수학적 모델과 센서 측정 모델이 각각  $\dot{x} = f(x, u)$  와  $y = g(x, u)$  를 주어졌을 때,  $\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + K(y - \hat{y})$  와 같이 이노베이션(innovation)을 포함하는 피드백 구조의 상태추정기(state estimator)를 구현함으로써 모든 상태변수들을 추출할 수 있다는 것은 교과서적인 사실이다. 시스템 모델이 선형인 경우, 이러한 상태추정기는 루엔버거 관측기(Luenberger observer) 형태로 귀착되며 극점배치(pole placement) 방법 등을 이용하여 상태 추정 피드백 루프(feedback loop)의 안정성을 보장하는 추정기의 게인(gain)  $K$  를 결정할 수 있다. 시스템 모델이 비선형인 경우에도 위와 같은 피드백 구조 하에서, 추정 상태변수들의 수렴을 위해 요구되는 피드백 게인을 결정하기 위한 적절한 방법을 제시함으로써 하나의 비선형 관측기(nonlinear observer)를 구성할 수 있다[1]. 또한 시스템 모델과 센서측정 모델이 확률적 모델(stochastic model)로써 주어진다면 프로세스 잡음(process noise)과 센서잡음(sensor noise)에 대한 공분산(covariance) 값을 바탕으로 칼만 필터(Kalman filter) 설계 절차에 따라 추정 오차의 분산(variance)을 최소화하는 최적의 추정기 게인을 결정할 수 있다[1].

이와 같이 보편적인 상태변수 추정 방법에서는 주어진 시스템 모델의 형태에 따라 상태추정기가 달리 설계될 수는 있겠으나 센서 측정값  $y$  와 그에 대응하는 추정값  $\hat{y}$  의 차를 피드백하여 추정 오차를 감소시킨다는 점에서는 근본적으로 동일하며, 주어진 문제에 대하여 추정기 게인을 어떠한 방법과 절차에 따라 결정하느냐에 따라 추정 성능의 차이가 발생

할 수 있다. 상태추정기에 피드백 입력이 필요한 근본적인 이유는 시스템의 설동(이후부터 모델링 오차 및 외란의 합으로 정의)에 의한 영향을 피드백에 의해 보상함으로써 추정 상태변수를 참값으로 수렴시키고자 하는 것이다. 그러나 시스템의 불확실성, 즉 설동(perturbation)의 크기 및 주파수가 매우 큰 경우에는 정적인 피드백 게인 값만으로는 동적인 설동의 영향을 보상하는 데는 분명한 한계가 있어 추정 성능 및 안정성을 보장할 수 없다는 문제가 발생한다. 따라서 이 논문에서는 모델링 오차 및 외란의 영향이 매우 큰 불확실한 시스템의 경우에 대하여 상태 추정 성능의 강인성(robustness)을 향상시키기 위한 방법을 제시하고자 한다.

한편, 기존의 여러 문헌에서 강인 상태 추정 방법의 개념을 제시하고 있다. 예를 들어 Slotine 등[2]과 Walcott & Zak[3]은 플랜트의 불확실성을 보상하기 위한 스위칭 함수가 포함된 슬라이딩 모드 관측기를 Lyapunov 안정성 조건을 이용하여 설계하였다. Moura 등[4]과 Chang 등[5]은 플랜트의 불확실성을 추정하기 위한 함수들을 제시하고 상태추정기에 점가함으로써 추정 성능의 강인성을 높이고자 하였다. Gu & Poon[6]은 파라미터 설동(parameter perturbation)이 있는 선형 시스템에 대하여 상태추정기의 Lyapunov 안정성을 보장하는 비선형함수를 결정하였다. Petersen & McFarlane[7] 및 Shaked & Souza[8]는 제한된 크기의 불확실성(Bounded uncertainty)에 대하여 제한된 크기의 상태 추정 오차 산출이 보장되는 칼만 필터를 설계하였다. 이러한 방법들은 표준적 상태추정기에 추정 성능의 강인성을 높이기 위한 함수들을 보충함으로써 추정 상태변수의 정확성을 높이고자 하는 공통점을 가지고 있다.

이 논문에서는 설동관측기(perturbation observer)의 개념[9]을 상태추정기 설계에 적용함으로써 시스템의 모델링 오차 및 외란에 대하여 강인한 성능을 보이는 상태추정기의 설계, 해석, 및 실험 결과를 다룬다. 이 논문은 상태추정기와 설동관측기 사이의 동적 연성(dynamic coupling)이 고려된 이산시간 형태의 순환적(recursive) 알고리즘을 제시한 점, 그 효과에 대한 이산시간 영역에서의 명확한 해석 및 실험적 검증을 제시

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2005. 2. 16., 채택확정 : 2005. 3. 31.

권상주 : 한국항공대학교 항공우주및기계공학부(sjkwon@hau.ac.kr)

한다는 점에서 기존의 연구 결과들[2-8]과는 뚜렷한 차별성을 보인다. 먼저, 2절에서는 상태추정기와 섭동관측기를 통합한 순환적 알고리즘 형태의 연합관측기를 구성하고 오차방정식, 안정성 조건, 및 민감도 함수를 유도한다. 3절에서는 2차 기계시스템에 대한 연합관측기의 설계 절차와 해석결과를 다룬다. 4절의 수치 예제 및 실험 결과를 통하여 제안된 연합관측기가 기계시스템의 상태추정 및 제어 문제에 잘 적용됨을 보인다. 마지막으로 5절에서 논문의 결론을 맺는다.

## II. 연합관측기 설계 및 해석

### 1. 섭동관측기(perturbation observer)

먼저, 다음과 같은 임의 플랜트에 대한 선형 이산 상태공간 모델(discrete state-space model)을 고려하자.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + \Gamma w_k \\ y_k &= Cx_k + v_k \end{aligned} \quad (1)$$

위에서  $x_k \in \mathbb{R}^n$ 은 상태변수,  $u_k \in \mathbb{R}^r$ 은 제어입력,  $y_k \in \mathbb{R}^l$ 은 측정값,  $w_k \in \mathbb{R}^p$ 은 선형모델에 대한 섭동(즉, 모델링 오차 및 외란의 합),  $v_k \in \mathbb{R}^l$ 은 측정 잡음을 나타낸다. 한편, (1)을 이용하면 플랜트의 섭동은 다음과 같은 등가 식으로 표현된다.

$$w_k = w_{eq}(k) = \Gamma^+ (x_{k+1} - Ax_k - Bu_k) \quad (2)$$

여기서  $\Gamma^+ = (\Gamma^T \Gamma)^{-1} \Gamma^T \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 은  $n = \dim(x_k) > p = \dim(w_k)$  일 때의  $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times p}$ 에 대한 좌측 의사 역행렬(left pseudo-inverse matrix)이다. 시스템 입출력의 인과성(causality)을 고려 하면 공칭 모델(nominal model)에 대한 플랜트의 섭동은 다음 식에 의해 간접적으로 추정할 수 있다[9].

$$\hat{w}_k = w_{eq}(k-1) = \Gamma^+ (x_k - Ax_{k-1} - Bu_{k-1}) \quad (3)$$

위 식은 역 플랜트 모델을 포함하고 있어 고주파 통과 필터 특성을 갖게 되므로 (3)을 실제로 구현하기 위해서는 다음과 같이 저역통과필터 인자를 첨가해야 한다.

$$\hat{w}_k = Q \cdot w_{eq}(k-1) \quad (4)$$

위에서  $Q = \text{diag}\{Q_1, Q_2, \dots, Q_p\}$ 은 (3)의 각 성분에 적용되는 저역통과필터(low pass filter, LPF)들로 구성되는 대각행렬이다. 각 필터는 일단 단위 DC 계인,  $Q_i(1) = 1$  ( $i = 1, \dots, p$ )을 가져야 하며 다음과 같이 일반적인 이산시간 험수 형태를 취할 수 있다.

$$Q_i(z) = \frac{\sum_{k=1}^m b_k z^{-(k-1)}}{1 - \sum_{k=1}^m a_k z^{-k}} \quad (i = 1, \dots, p) \quad (5)$$

(4)에서 LPF  $Q$ 는  $Q(z) = H(zI - F)^{-1}G$  와 같이 상태공간 식으로 구현될 수 있다. 결과적으로, (1)의 플랜트 모델과 (5)의 저역통과필터 형태가 주어지면 (4)의 섭동관측기(perturbation observer)는 (3)과 함께 다음과 같은 이산 시간(discrete time) 형태로 주어진다[9].

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_k &= F\hat{\eta}_{k-1} + Gw_{eq}(x, k-1) \\ \hat{w}_k &= H\hat{\eta}_k \end{aligned} \quad (6)$$

[9]의 결과에 의하면 필터의 차수와 형태에 따라 섭동 추정 성능이 많이 달라짐을 알 수 있다. 한편, (5)에서 각 필터  $Q_i(z)$  ( $i = 1, \dots, p$ )의 차수(order)가  $m_i$ 이고  $q = \sum_{i=1}^p m_i$ 라고 하면 (6)의 벡터  $\eta$ 의 차원은  $\eta \in \mathbb{R}^q$ 이다. 그리고 (4)의 모든 입력 채널에 1차 필터  $Q_i(z) = b_i/(1 - a_i z^{-1})$  가 사용되는 경우에는  $q = p$ ,  $H = I_p$  (단위행렬)이 된다.

관찰(remark) 1: 섭동관측기 (6)을 적용하기 위해서는 기본적으로 섭동의 크기는 제한되어 있고(bounded) 허용할만하다는(admissible) 가정, 즉, 섭동의 크기와 주파수 스펙트럼이 시스템 대역(bandwidth)에서 크게 벗어나지 않는다는 가정이 필요하다. 한편, 섭동관측기의 개념은 [10-14] 등과 같은 여러 문헌에서 나타나고 있으며 여러 가지 다른 명칭과 방법으로 유도되고 있음을 알 수 있다. 이 절에서의 설명은 기존의 여러 섭동 관측기법들에 대한 통합적 시각에 해당된다.

### 2. 연합관측기(combined observer)

출력 피드백(output feedback) 조건에서 (6)을 구현하기 위해서는 상태변수의 추정치들이 요구되며, 섭동관측기 (6)은 다음과 같이 다시 정리된다.

$$\begin{aligned} w_{eq}(\hat{x}, k-1) &= \Gamma^+ (\hat{x}_k - A\hat{x}_{k-1} - Bu_{k-1}) \\ \hat{\eta}_k &= F\hat{\eta}_{k-1} + Gw_{eq}(\hat{x}, k-1) \\ \hat{w}_k &= H\hat{\eta}_k \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, 선형 모델 (1)에 대하여 표준적 상태추정기(이른바 Luenberger observer)와 섭동관측기를 통합한 연합관측기(combined observer)를 다음과 같이 정의한다.

$$\hat{x}_{k+1} = Ax_k + Bu_k + L(y_k - C\hat{x}_k) + \Gamma\hat{w}_k \quad (8)$$

그림 1은 (7)과 (8)에 대한 도식으로서 연합관측기 내에서 상태추정기는 섭동관측기에 상태변수 추정치를 제공하고 섭동관측기는 상태추정기에 섭동의 추정치를 제공함으로써 상호 보완적인 관계를 취하고 있음을 보이고 있다. 즉 (7)과 (8)의 합은 플랜트의 상태변수와 공칭모델에 대한 섭동을 동시에 추정하기 위한 순환적 알고리즘(recursive algorithm)이다. 결국,

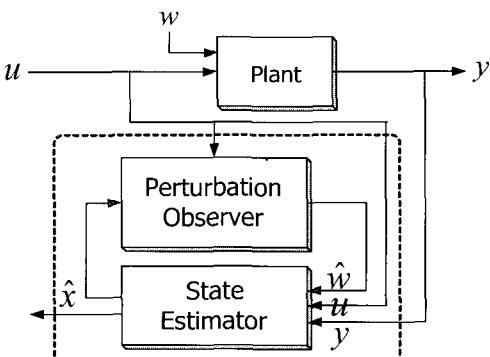


그림 1. 연합관측기.

Fig. 1. Combined observer.

연합관측기는 개인 상태추정기(robust state estimator)의 의미와 함께 출력 피드백 섭동관측기(output feedback perturbation observer)의 의미를 동시에 갖는다.

관찰(remark) 2: 상태 추정 오차 및 섭동 추정 오차를 각각  $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$  와  $\tilde{w}_k = w_k - \hat{w}_k$  와 같이 정의할 때, (1)과 (8)로부터 다음과 같은 상태변수 추정 오차방정식을 얻을 수 있다.

$$\tilde{x}_{k+1} = (A - LC)\tilde{x}_k - Lv_k + \Gamma\tilde{w}_k. \quad (9)$$

이 식을 Luenberger observer의 오차방정식과 비교하면 시스템의 불확실성 항이  $\Gamma w_k$ 에서  $\Gamma\tilde{w}_k$ 로 변경되었음을 알 수 있다. 따라서 연합관측기 내에서 섭동관측기 (7)이 작동하여 섭동 추정 오차의 놈(Norm)  $\|\tilde{w}_k\|$ 가 감소할수록 상태 추정 오차도 따라서 감소하게 된다.

### 3. 안정성(stability)

(1)의 둘째 식과 (8)을 이용하면 (7)의 첫번째 등가 섭동(equivalent perturbation) 식은 다음 식과 표현되고,

$$w_{eq}(\hat{x}, k) = \Gamma^+ (LC\tilde{x}_k + Lv_k + \Gamma H\eta_k) \quad (10)$$

(7)의 둘째 식으로부터는 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\hat{\eta}_{k+1} = (F + GH)\hat{\eta}_k + G\Gamma^+ L(C\tilde{x}_k + v_k) \quad (11)$$

그리고 섭동 추정 오차의 정의,  $\tilde{w}_k = w_k - \hat{w}_k = H(\eta_k - \hat{\eta}_k)$ 를 이용하면 섭동 추정 오차방정식이 다음과 같이 유도된다.

$$\tilde{\eta}_{k+1} = (F + GH)\tilde{\eta}_k - G\Gamma^+ L(C\tilde{x}_k + v_k) + \eta_{k+1} - (F + GH)\eta_k \quad (12)$$

마지막으로 (9)와 (12)를 결합하면 상태 추정 오차와 섭동 추정 오차가 상호 연성된(coupled) 다음 오차방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{k+1} \\ \tilde{\eta}_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - LC & \Gamma H \\ -G\Gamma^+ LC & F + GH \end{bmatrix}}_{\triangleq A_o} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{\eta}_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L \\ G\Gamma^+ L \end{bmatrix} v_k + \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_{k+1} - (F + GH)\eta_k \end{bmatrix} \quad (13)$$

단, 여기서  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{\eta} \in \mathbb{R}^q$  이므로  $A_o \in \mathbb{R}^{n+q}$ 이다.

연합관측기의 설계 변수들(design parameters)은 (8)의 피드백 개인 행렬  $L$ 과 (5)의 필터 파라미터로 구성되는 (7)의 행렬  $(F, G, H)$ 이다. 이 설계 변수들은 오차방정식 (13)이 안정하기 위한 조건:

$$|\lambda_i(A_o)| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n+q) \quad (14)$$

즉,  $A_o$ 의 모든 고유치의 크기가 1보다 작다는 조건이 만족되도록 결정되어야 한다.

일반적인 다변수 시스템에 대하여 고차의 필터를 사용할 경우에는 고유값 지정(eigenvalue assignment) 방법 등을 통해 위 설계변수들을 결정할 수 있겠으나 이는 상당히 복잡한 과정이 될 것이다. 그러나 다음 절에서 다루는 단일입출력 시스템의 경우에 1차 필터를 채택하면 문제는 매우 단순해진다. 한 가지 더 주목할 것은 섭동관측기 (7)를 개인 상태 추정을 위하여 연합관측기에 사용할 때, 저역통과필터 (5)는 자체

적인 안정성뿐 아니라 오차방정식 (13)의 안정성이 보장되도록 필터의 인자(parameter)들을 상태추정기 개인과 함께 결정해야 한다는 점이다.

### 4. 민감도(sensitivity)

오차방정식 (13)에 대하여 z-변환(z-transform)을 취하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(z) \\ \tilde{\eta}(z) \end{bmatrix} = (zI - A_o)^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ zI - F - GH \end{bmatrix} \eta(z) - \begin{bmatrix} L \\ G\Gamma^+ L \end{bmatrix} v(z) \right\} \quad (15)$$

위 식에서 역행렬  $(zI - A_o)^{-1}$ 은 분할 행렬(partitioned matrix)에 대한 역행렬 정리(matrix inversion lemma)를 이용하면 다음과 같이 기술된다.

$$(zI - A_o)^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\Delta}^{-1} & \hat{\Delta}^{-1}\Gamma H(zI - F - GH)^{-1} \\ -(zI - F - GH)^{-1}G\Gamma^+ L C \hat{\Delta}^{-1} & \Delta^{-1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

단, 여기서

$$\begin{aligned} \hat{\Delta} &= (zI - A + LC) + \Gamma H(zI - F - GH)^{-1}G\Gamma^+ LC \\ \Delta &= (zI - F - GH) + G\Gamma^+ LC(zI - F - GH)^{-1}\Gamma H \end{aligned} \quad (17)$$

따라서 (15)는 다음 4가지의 민감도 함수(sensitivity function)와 함께 아래와 같이 정리된다.

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(z) \\ \tilde{\eta}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{\tilde{x}\eta}(z) & S_{\tilde{x}v}(z) \\ S_{\tilde{\eta}\eta}(z) & S_{\tilde{\eta}v}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(z) \\ v(z) \end{bmatrix} \quad (18)$$

여기서 민감도 함수들은 다음과 같이 유도된다.

$$S_{\tilde{x}\eta}(z) = \hat{\Delta}^{-1}\Gamma H \quad (19)$$

$$S_{\tilde{x}v}(z) = -\hat{\Delta}^{-1} [I + \Gamma H(zI - F - GH)^{-1}G\Gamma^+] L \quad (20)$$

$$S_{\tilde{\eta}\eta}(z) = \hat{\Delta}^{-1}(zI - F - GH) \quad (21)$$

$$S_{\tilde{\eta}v}(z) = [(zI - F - GH)^{-1}G\Gamma^+ LC \hat{\Delta}^{-1} - \Delta^{-1}G\Gamma^+] L \quad (22)$$

한편, (19) 및 (20)은 각각 섭동(perturbation) 및 센서잡음(sensor noise)에 대한 상태 추정 오차의 민감도를 나타내고, (21) 및 (22)는 각각 섭동 및 센서잡음에 대한 섭동 추정 오차의 민감도를 나타낸다. (19), (20)을 통해서는 (7)의 섭동관측기가 상태 추정 성능의 개인성에 기여하는 정도를 분석할 수 있고, (21), (22)을 통해서는 상태추정기가 연합된 출력 피드백(output feedback) 섭동관측기 (7)과 상태 피드백(state feedback) 섭동관측기 (6)의 차이를 비교 분석할 수 있다.

### III. 2 차 시스템에 대한 응용

많은 기계 시스템(mechanical systems)들은 단순한 2차 시스템(2nd order system)으로 모델링 될 수 있다. 여기서는 단일입출력(SISO) 경우의 2차 시스템에 대한 연합관측기 설계 절차를 제시하고 민감도 해석을 통하여 그 특성을 분석한다.

#### 1. 설계 절차(design procedure)

우선 시스템 식별(identification)을 통하여 관성(inertia)의 크기 만을 알 수 있다는 가정 하에 기계 시스템에 대한 공칭모델(nominal model)로서 순수 관성 항(pure inertia term) 만을 갖는 2차식  $M\ddot{y} = u + w$ 를 고려한다. 여기서  $u$ 는 구동 입력력

이고  $w$  는 관성 모델링 오차, 마찰력, 기타 비선형적 영향 및 외란(disturbance)을 포함하는 양으로서 순수 관성 시스템(pure inertia system)에 대한 섭동을 나타낸다. 이 모델을 이산화(discretization)하면 플랜트 모델 (1)은 다음과 같은 행렬을 갖는다[15].

$$A = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \Gamma = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} 0.5h^2 \\ h \end{bmatrix}, C = [1 \ 0] \quad (23)$$

단,  $h$  는 샘플링(sampling) 시간이다. 여기서 (5)의 섭동관측기를 위한 필터로서 다음의 1차 필터를 적용한다면

$$Q_l(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}} \quad (24)$$

섭동  $w (= \eta)$  의 차원은 1이고 (즉,  $q = 1$ ), 섭동관측기 (7)의 파라미터들은 다음 값들을 갖는다.

$$F = a, G = b, H = 1. \quad (25)$$

이어서 상태추정기 개인 행렬을  $L = [\ell_1 \ \ell_2]^T$  라고 두면, 연합관측기에 대한 오차방정식 (13)은 다음과 같이 3차의 특성 방정식(characteristic equation)을 갖는다.

$$\begin{aligned} D(z) &= \det(zI - A_O)^{-1} \\ &= (z - a - b)[z^2 + (\ell_1 - 2)z + 1 - \ell_1 + h\ell_2] \\ &\quad + \frac{1}{2}h^2\alpha\beta b(z+1) \\ a &= \frac{1}{2}h^2\ell_1 + h\ell_2, \quad \beta = 1/\left(\frac{1}{4}h^4 + h^2\right) \end{aligned} \quad (26)$$

문제를 단순화하기 위하여 오차방정식에 (13)에 대한 희망(desired) 특성 방정식을 다음과 같이 두고

$$D_d(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_d)^2 \quad (27)$$

극점배치기법  $D(z) = D_d(z)$  을 적용하면 연합관측기 설계 파라미터에 대하여 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \ell_1 &= 3 - \lambda_1 - 2\lambda_d \\ \ell_2 &= \frac{1}{2h}(\lambda_d - 1)[\lambda_1(\lambda_d + 3) + \lambda_d - 5] \\ b &= \frac{1}{h^2\alpha\beta}(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_d)^2 = 1 - a \end{aligned} \quad (28)$$

위 마지막 식의 마지막 항은 필터 (24)의 DC 개인이  $Q_l(1) = 1$  이므로  $a + b = 1$  이라는 점에서 나온 것이다.

위 식에서  $\lambda_1 \rightarrow 1$  이면  $a \rightarrow 1, b \rightarrow 0$  이 되어 섭동관측기 필터 (24)의 절단주파수(cut-off frequency)  $\omega_c$  가 영으로 접근하게 되고 극단적으로  $\lambda_1 = 1$  이면 연합관측기 내에서 섭동관측기는 전혀 작동하지 않게 된다. 한편,  $\lambda_1 \rightarrow 1$  이면 피드백 개인은 다음 식으로 접근하는데

$$\ell_1 = 2(1 - \lambda_d), \quad \ell_2 = \frac{1}{h}(1 - \lambda_d)^2 \quad (29)$$

이것은  $z = \lambda_d$  지점에 두 개의 극점을 갖는 표준적 상태추정기 즉, Luenberger observer 경우에 해당된다.

## 2. 민감도 해석(Sensitivity Analysis)

2차 기계 시스템 및 1차 저역통과필터에 대한 이산시간 모델 (23) 및 (25)를 민감도 함수 (19)와 (20)에 적용하면 시스템

의 섭동( $w$ ) 및 센서잡음( $v$ )에 대한 상태 추정 오차의 민감도 함수는 각각 다음과 같이 정리된다.

$$S_{\tilde{x}w}(z) = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{x}_1(z)}{w(z)} \\ \frac{\tilde{x}_2(z)}{w(z)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2M} \frac{(z-a-b)(z+1)}{D(z)} \\ \frac{h}{M} \frac{(z-a-b)(z+\ell_1-1-\frac{1}{2}h\ell_2)}{D(z)} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$S_{\tilde{x}v}(z) = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{x}_1(z)}{v(z)} \\ \frac{\tilde{x}_2(z)}{v(z)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(z-a-b)(\ell_1 z - \ell_1 + h\ell_2) + \frac{1}{2}bh^2\alpha\beta}{D(z)} \\ -\frac{(z-1)[\ell_2(z-a-b) + b\alpha\beta]}{D(z)} \end{bmatrix} \quad (31)$$

단,  $x_1$  은 위치(position),  $x_2$  는 속도(velocity)를 나타내고  $D(z)$  는 (26)으로 주어졌다.

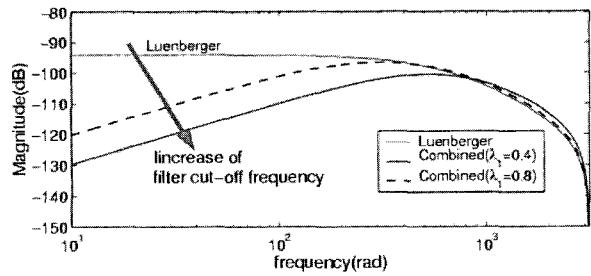
위 두 식을 분석하면, 먼저 섭동관측기 필터 (24)의 절단주파수(cut-off frequency)가 증가할수록( $\omega_c \rightarrow \infty$ ), 즉 (24)에서  $a \rightarrow 1, b \rightarrow 0$  또는  $\lambda_1 \rightarrow 1$  일수록, i) 저주파 영역에서  $\|S_{\tilde{x}w}(z)\|$  는 감소한다. 즉, 허용할만한 섭동에 대하여 상태추정오차는 감소한다. ii) 고주파 영역에서  $\|S_{\tilde{x}v}(z)\|$  는 증가한다. 즉, 섭동관측기를 도입할 때 필터 (24)의 절단주파수를 지나 치게 크게 하면 센서잡음은 크게 증폭될 수 있다. 역으로, 섭동관측기 필터의 절단 주파수(cut-off frequency)가 영으로 접근할수록(즉, (24)에서  $a \rightarrow 1, b \rightarrow 0$  또는  $\lambda_1 \rightarrow 1$  일수록), 위 함수들은 다음의 Luenberger observer 경우로 귀착된다.

$$S_{\tilde{x}w}(z) = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{x}_1(z)}{w(z)} \\ \frac{\tilde{x}_2(z)}{w(z)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2M} \frac{(z+1)}{\det(zI - A + LC)} \\ \frac{h}{M} \frac{(z+\ell_1-1-\frac{1}{2}h\ell_2)}{\det(zI - A + LC)} \end{bmatrix} \quad (32)$$

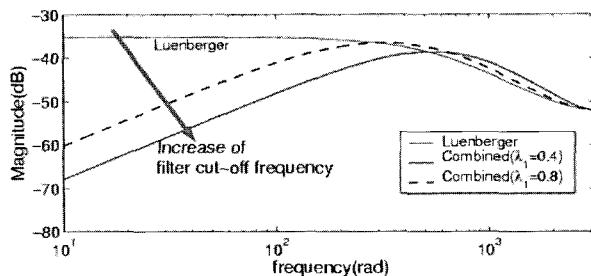
$$S_{\tilde{x}v}(z) = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{x}_1(z)}{v(z)} \\ \frac{\tilde{x}_2(z)}{v(z)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(\ell_1 z - \ell_1 + h\ell_2)}{\det(zI - A + LC)} \\ \frac{-\ell_2(z-1)}{\det(zI - A + LC)} \end{bmatrix} \quad (33)$$

섭동관측기 필터의 절단주파수 변동에 대한 위 분석결과는 그림 2, 3의 주파수응답 선도에서 다시 확인할 수 있다. 그림 2, 3은 각각 섭동 및 센서잡음에 대한 위치 추정 오차( $\tilde{x}_1$ )와 속도 추정 오차( $\tilde{x}_2$ )의 민감도를 나타낸다. 이 때 사용된 (23)의 플랜트 파라미터는  $M = 0.202(Volt/m/sec^2)$ ,  $h = 1m/sec$ 이며 (27)의 관측기 개인 값들은 관측기 극점을  $\lambda_d = 0.5, 0.5$  와 임의  $\lambda_1$ 에 배치함으로써 결정되었다.

그림 2에서 연합관측기의 고유값  $\lambda_1$  이 감소할수록(즉, 섭동관측기 필터의 절단주파수  $\omega_c$  가 증가할수록),  $\omega_c$  이하의 저주파 영역에서 섭동에 대한 추정 오차의 민감도가 감소하므로 그만큼 강인한 상태 추정 성능을 기대할 수 있다. 그러나 그림 3은 필터의 절단주파수  $\omega_c$  가 증가할수록 고주파 영역에서 센서 잡음(noise)에 대한 민감도가 증가하여 추정치에 포함되는 잡음의 크기가 상대적으로 커질 수 있음을 의미한다. 결국, 하드웨어 구현 단계에서는 합리적인 개인 조정(gain tuning) 과정을 거쳐 센서 잡음의 성질을 고려한 최적의



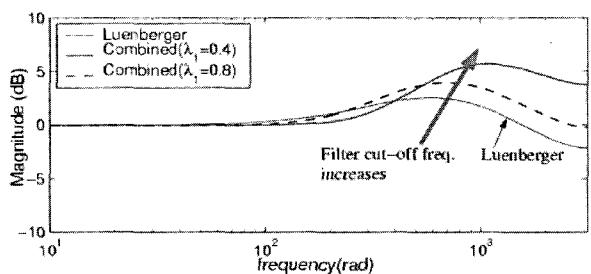
Sensitivity to perturbation: (a) position estimation error



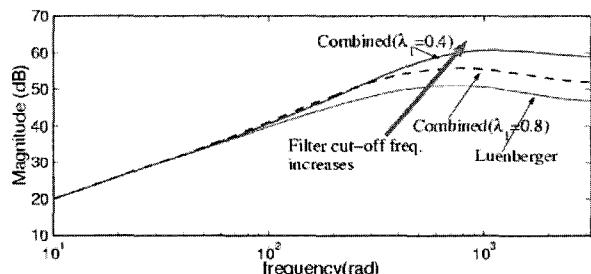
Sensitivity to perturbation: (b) velocity estimation error

그림 2. 섭동에 대한 연합관측기의 주파수 응답.

Fig. 2. Frequency response to perturbation.



Sensitivity to sensor noise: (a) position estimation error



Sensitivity to sensor noise: (b) velocity estimation error

그림 3. 센서 잡음에 대한 연합관측기의 주파수 응답.

Fig. 3. Frequency response to sensor noise.

관측기 파라미터들을 설정해야 하며, 앞 절의 극점배치 방법은 2차 시스템에 대한 연합관측기 설계를 위한 한가지 예에 해당된다.

#### IV. 수치예제 및 실험

##### 1. 수치 예제

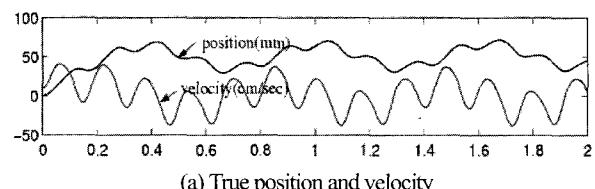
먼저 시뮬레이션을 통해서 연합관측기의 효과를 검증한다. 대상 시스템은 다음 절 그림 6의 XY 위치결정 스테이지로서 하단의 X-축에 대한 2차 시스템 모델은  $M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) =$

$u(t) + d(t) - C_f(t)$ 로 주어진다. 여기서  $u(t)$ 는 구동기 입력,  $d(t)$ 는 외란(disturbance)을 나타내고 시스템 식별 결과, 관성  $M=0.202 [V/(m/sec^2)]$ , 접성마찰계수(즉, 댐핑계수)  $c=2.25 [V/(m/sec)]$ , Coulomb 마찰력  $C_f=0.11 (\dot{y}>0), -0.13 (\dot{y}<0)$ 의 값을 얻었다.

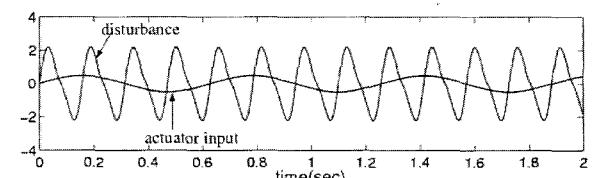
여기서 순수관성모델  $M\ddot{y} = u + w$ 를 관측기 설계를 위한 공칭(nominal) 모델로서 정하면 이산 상태공간식 (1)은 (23)과 같은 행렬을 갖게 되고, 관성 모델링 오차를 무시한다면 공칭모델에 대한 섭동(perturbation)은  $w(t) = d(t) - c\dot{y}(t) - C_f(t)$ 와 같이 표현된다. 기타, 시뮬레이션 초기치는  $y(0)=0$ ,  $\dot{y}(0)=10 \text{ cm/sec}$ , 샘플링 시간은  $h=1 \text{ ms}$ 이고, 위치 측정에 대한 센서 모델은  $y_m(t)=y(t)+v(t)$ 로 주어진다. 단 랜덤 노이즈  $v \sim N(0, \sigma^2)$ 는 0-평균,  $\sigma=5 \times 10^{-6}$ 의 표준 편차를 갖는다. 한편 (28)의 연합관측기 개인을 결정하기 위하여 (27)의 극점을  $\lambda_d=0.5, 0.5$ ,  $\lambda_1=0.6$ 에 배치하였다.

먼저, 구동기 입력과 외란을 그림 4(b)와 같이  $u(t)=0.5\sin(10t)[V]$ ,  $d(t)=2\sin(40t)+0.5\sin(80t)[V]$ 의 함수 형태로 시스템에 인가하였을 때, 시간에 대한 시스템의 위치 및 속도 응답은 그림 4(a)와 같다. 이러한 입력 및 위치/속도의 시간 프로파일에 대한 연합관측기의 상태변수 추정 오차와 섭동 추정 오차가 그림 5에 나타나 있다. 그림과 같이 연합관측기는 Luenberger observer에 비하여 상태추정오차의 크기를 크게 감소시킨다. 그러나 추정오차의 잡음에 대한 증폭도는 연합관측기가 상대적으로 심함을 알 수 있는데 이는 앞 절의 그림 3 주파수 응답에 대한 분석 내용과 일치한다. 개인 조정 과정에서 상태 추정치의 정확도를 약간 더 포기한다면 잡음에 대한 증폭은 그 만큼 완화시킬 수 있다.

한편, 그림 5(c)와 같이 실시간으로 추정된 섭동을 그림 1과 같이 연합관측기 내 상태추정기에 입력함으로써 상태추종 성능을 향상시킬 수 있을 뿐 아니라, 피드백 제어 루프에 섭동 추정치의 음의 양을 부가적 제어 입력으로서 인가하면 공칭 모델(nominal model)에 대한 시스템의 섭동을 보상하는 효과를 가져오게 되어 일반적인 PID 제어기와 비교하여 매우 우수한 제어 성능을 구현할 수 있다[9].



(a) True position and velocity



(b) actuator input and disturbance (Volt)

그림 4. (a) 위치, 속도 응답 (b) 구동기 입력 및 외란.

Fig. 4. (a) Position and velocity response (b) actuator input and disturbance.

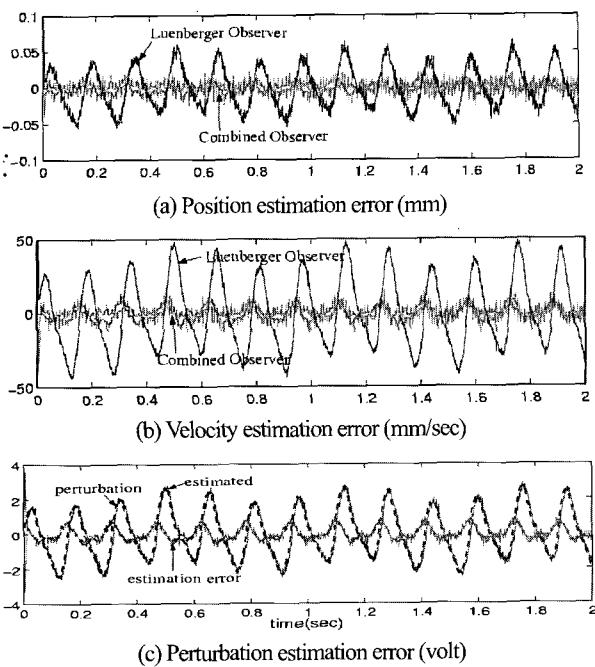


그림 5. 연합관측기 성능 비교.

Fig. 5. Performance of combined observer.

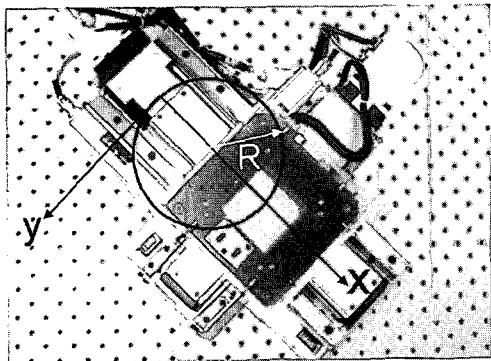


그림 6. XY 위치결정시스템.

Fig. 6. XY positioning system.

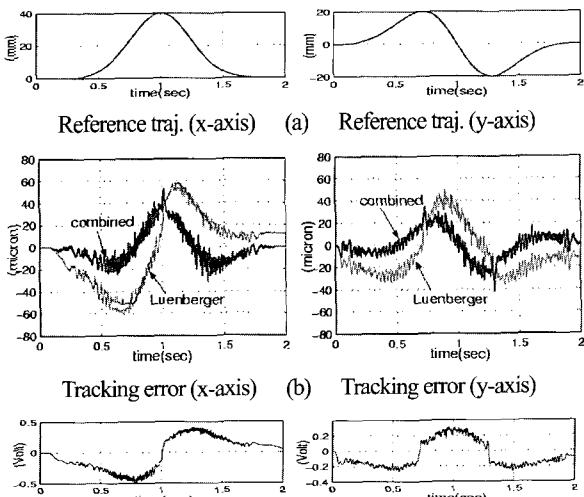


그림 7. 원궤적 추종 실험 결과.

Fig. 7. Circle trajectory tracking experiment.

## 2. 실험적 고찰

연합관측기의 상태변수 추정 성능을 실험적으로 검증하기 위해서는 외부의 측정센서를 이용하여 시스템 상태변수의 참값을 알 수 있어야 하지만, 여기서는 표준 상태추정기와 연합관측기를 통해 추정된 상태변수를 각각 피드백 제어입력 계산에 이용한 후 각각의 제어 성능을 비교함으로써 상태 추정 성능을 비교하도록 한다. 피드백 되는 상태변수 값이 정확할수록 제어오차 계산이 정확하고 따라서 제어 성능도 향상될 것이므로 이러한 비교는 타당하다고 할 수 있다. 실험 대상 플랜트는 그림 6의 XY 위치결정시스템으로서 각 축은 그림 7(a)에 보인 반경 20 mm의 원에 해당하는 궤적을 추종하도록 한다.

앞 절의 시뮬레이션에서와 같이 관측기 설계를 위한 공칭 모델은 순수 관성모델  $M\ddot{y} = u + w$ 로 하며, 궤적추종 제어기 역시 이 모델을 근거로 설계한다. 즉 각 축의 관성 이외에는 시스템에 대하여 알려진 정보가 없다고 가정한다. 각 축의 궤적추종 제어기는 PD 제어기에 섭동보상기가 더해진  $u_k = K_p e_k + K_D \dot{e}_k - \hat{w}_k$ 의 형태를 갖는다. 이것은 연합관측기의 섭동 추정치를 제어입력 계산에도 이용함으로써 시스템 모델링 오차 및 외란에 강인한 제어 성능을 구현하고자 하는 것이다. 위치 추종 오차( $e_k$ )는 모터의 엔코더 값을 읽어서 계산하고 속도 추종 오차( $\dot{e}_k$ )는 상태추정기의 속도 추정값을 이용하여 계산한다.

그림 7(b)의 실험결과를 보면 연합관측기의 추정치 ('combined')를 사용하였을 때가 표준 상태추정기의 추정치 ('Luenberger')를 사용한 경우보다 궤적 추종 성능이 우수함을 알 수 있다. Luenberger의 경우에 추종 오차에 오프셋이 발생한 이유는 위치결정시스템 불확실성의 대부분을 차지하는 각 축의 마찰력이 상태추정기 모델에 반영되지 않아 상태변수의 추정값과 실제값의 차이가 많이 발생한 결과이다. 그러나 combined의 경우는 미지의 마찰력이 섭동관측기에 의해 추정되고 (8)과 같이 상태추정기에 더해짐으로써 실제 동역학과 추정기 모델 사이의 동적 오차를 최소화시킴으로써 보다 정확한 상태 추정치가 산출되었기 때문에 궤적 추종 오차도 감소한 것이다. 그림 7(c)는 연합관측기 내 섭동을 나타내는데 이것은 거의 각 축의 점성 마찰력(viscous friction)과 Coulomb 마찰력을 합친 양에 해당된다. 사실 공칭 모델에 대한 시스템의 섭동이 크면 클수록 연합관측기의 상태 추정 효과 및 그에 따른 제어 성능은 더욱 향상될 것이다.

관찰(remark) 3: 앞 절의 (4), (7), (8)을 이용하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{w}_k &= Q \cdot w_{eq}(\hat{x}, k-1) = Q \cdot \Gamma^+ (\hat{x}_k - A\hat{x}_{k-1} - Bu_{k-1}) \\ &= Q \cdot \Gamma^+ (\Gamma \hat{w}_{k-1} + L\tilde{y}_{k-1}) \end{aligned} \quad (34)$$

단,  $\tilde{y}_k = y_k - C\hat{x}_k$ 는 측정치와 추정된 측정치 사이의 오차(즉 이노베이션)를 의미한다. 위 식은 섭동관측기가 상태추정기의 이노베이션을 적분하는 성질을 가지고 있음을 의미하며, LPF Q는 일종의 적분계인 역할을 하고 있음을 알 수 있다. 위 식을 다시 (8)에 대입하면,

$$\hat{x}_{k+1} = \underbrace{A\hat{x}_k + Bu_k + L\tilde{y}_k}_{\text{Luenberger observer}} + Q \cdot (\Gamma\hat{w}_{k-1} + L\tilde{y}_{k-1}) \quad (35)$$

위 식과 같이 Luenberger observer를 비롯한 기존의 상태추정기는 이노베이션에 상수의 게인( $L$ )을 곱하여 피드백하는 일종의 비례제어의 성격을 가진다. 따라서, 근본적으로 시스템 모델에 대한 섭동의 크기가 큰 경우에는 상당한 추정 오차가 발생할 수밖에 없다. 반면, 앞 절의 시뮬레이션과 실험 결과와 같이 연합관측기가 표준 상태추정기에 비하여 개인한 추정 성능을 보이는 이유는 연합관측기 내부 섭동관측기의 적분 효과에 있다고 분석할 수 있다.

## V. 결론

이 논문에서는 상태추정기에 섭동관측기를 결합한 연합관측기(combined observer)를 통하여 시스템 모델링 오차 및 외란에 개인한 상태 추정 성능을 구현할 수 있음을 보였다. 특히 수치예제 및 실험결과를 통하여 연합관측기가 기계시스템에 잘 적용됨을 알 수 있었다. 시스템의 불확실성이 증가 할수록 제안된 연합관측기의 효과는 더욱 커진다. 그리고 연합관측기는 개인 상태추정기의 의미와 함께 출력 피드백(output feedback) 섭동관측기의 의미를 갖는다는 점에서 그 의미가 더 크다고 할 수 있다. 사실 상태추정기의 성능은 추정기 구조에 실제 플랜트에서 발생하는 동특성들(예를 들어, 기계시스템의 경우 구동기 포화, 마찰력, 히스테리시스 현상 등)을 얼마나 잘 모사해서 반영하느냐에 매우 많이 의존한다[1]. 결론적으로 섭동관측기는 연합관측기 내부에서 실제 플랜트에 대하여 모델링 되지 않은 동적 현상들을 재현하는 기능과 예측된 측정오차(predicted measurement error), 즉 이노베이션(innovation)을 적분하는 성질을 발휘함으로써 상태 추정 성능의 개인성(robustness)을 이루한다고 말할 수 있다.

## 참고문헌

- [1] B. Friedland, *Advanced Control System Design*, Prentice-Hall, 1996.
- [2] J.-J. E. Slotine, J. K. Hedrick, and E. A. Misawa, "Sliding mode control with sliding perturbation observer," *ASME J. Dyn. Sys., Meas., and Contr.*, vol. 109, pp. 245-252, Sep., 1987.
- [3] B. L. Walcott, and S. H. Zak, "Combined observer-controller synthesis for uncertain dynamical systems with applications," *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 18, pp. 88-104, Feb., 1988.
- [4] J. T. Moura, H. Elmali, and N. Olgac, "Sliding mode control with sliding perturbation observer," *ASME J. Dyn. Sys., Meas., and Contr.*, vol. 119, pp. 657-665, Dec., 1997.
- [5] P. H. Chang, J. W. Lee, and S. H. Park, "Time delay observer: a robust observer for nonlinear plants," *ASME J. Dyn. Sys., Meas., and Contr.*, vol. 119, pp. 521-527, Sep., 1997.
- [6] D.-W. Gu and F. W. Poon, "A robust state observer scheme," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 46, no. 12, pp. 1958-1963, Dec., 2001.
- [7] I. R. Petersen, and D. C. McFarlane, "Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 39, no. 9, pp. 1971-1977, Sep., 1994.
- [8] U. Shaked and C. E. de Souza, "Robust minimum variance filtering," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 43, no. 11, pp. 2474-2483, Nov., 1995.
- [9] S. J. Kwon and W. K. Chung, "A discrete-time design and analysis of perturbation observer for motion control applications," *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, vol. 11, no. 3, pp. 399-407, May, 2003.
- [10] T. Umeno and Y. Hori, "Robust speed control of DC servomotors using modern two degree-of-freedom controller design," *IEEE Trans. on Indust. Elec.*, vol. 38, no. 5, pp. 363-368 Oct., 1991.
- [11] K. Ohnishi, M. Shibata, and T. Murakami, "Motion control for advanced mechatronics," *IEEE/ASME Trans. on Mechatronics*, vol. 1, no. 1, pp. 56-67. Mar., 1996.
- [12] R. G. Morgan and U. Ozguner, "A decentralized variable structure control algorithm for robotic manipulators," *IEEE J. Robot. and Auto.*, vol. RA-1, no. 1, pp. 57-65, Mar., 1985.
- [13] T. C. Hsia, "A new technique for robust control of servo systems," *IEEE Trans. on Indust. Elec.*, vol. 36, no. 1, pp. 1-7, Feb., 1989.
- [14] K. Youcef-Toumi and O. Ito, "A time delay controller for systems with unknown dynamics," *ASME J. Dyn. Sys., Meas., and Contr.*, vol. 112, pp. 133-142. Mar., 1990.
- [15] K. J. Astrom and B. Wittenmark, *Computer-Controlled Systems: Theory and Design*, 3rd ed., Prentice-Hall, 1997.



## 권상주

1966년 5월 29일생(음력). 1989년 서울대학교 조선공학과 공학사. 1991년 포항공대 기계공학과 공학석사. 1991~1997년 국방과학연구소(ADD) 연구원. 2002년 포항공대 기계공학과 공학박사. 2003년 한국과학기술연구원. 2004년 한국생산기술연구원 선임연구원. 2004년 9월~현재 한국항공대학교 항공우주기계공학부 전임강사. 관심분야는 지능형 로봇, 비행로봇, 마이크로/나노 메카트로닉스, 개인제어 및 추정이론, 반도체 및 FPD 생산 로봇의 초정밀 비주얼 얼라인먼트 문제, RFID 센서 기반 이동로봇 위치추정 문제 등.