

## 운동자계 문제의 해석을 위한 유한요소법에 관한 연구

(The Study of Finite Element Method for Analyses of Travelling Magnetic Field Problem)

장호성\*

(Ho-Sung Chang)

### 요 약

1계 미분항이 포함되는 미분방정식의 수치해를 구하고자 할 때 중앙차분을 사용한 유한차분법이나 Galerkin법을 사용한 유한요소법은 그 해가 매우 불안하여 요소분할을 세밀하게 하여야만 해를 얻을 수 있다. 이러한 해의 불안정성이 일어나는 이유는 대류항의 크기가 커질수록 후류에서의 경계조건이 해의 급격한 변화를 요구하는데 수치해가 급격한 변화에 적응하지 못하기 때문이다. 이러한 문제를 해결하기 위해 1970년대부터 upwind법이 개발되어 왔다. 본 논문은 1계 미분항이 표현되는 속도기전력이 발생하는 전자계 문제를 유한요소법을 이용하여 해석할 때 발생하는 해의 진동 문제를 해결하기 위해 Heinrich에 의해 제안된 upwind법을 적용하였다.

### Abstract

This paper presents finite element analyses solution in the travelling magnetic field problem. The travelling magnetic field problem is subject to convective-diffusion equation. Therefore, the solution derived from Galerkin-FEM with linear interpolation function may oscillate between the adjacent nodes. A simple model with Dirichlet, Neumann and Periodic boundary condition respectively, have been analyzed to investigate stabilities of solutions. It is concluded that the solution of Galerkin-FEM may oscillate according to boundary condition and element type, but that of Upwind-FEM is stable regardless boundary condition.

Key Words : Finite element method, Galerkin method, Upwind method, Peclet number

### 1. 서 론

1계미분항으로 표현되는 속도기전력 문제는 Galerkin법으로 해석할 경우 도전율, 투자율, 속도 및 요소의 크기에 의해 결정되는 peclet number에

따라 해가 진동할 수 있으므로 해의 안정성이 떨어지게 된다[1]~[3]. 이러한 해의 불안정성을 해결하기 위하여 열전달, 유체역학 분야에서는 여러 가지의 upwind법이 제안되었다.

해의 진동문제는 유한차분법(Finite Difference Method)에서 먼저 알려졌다. 중앙차분법을 이용하여 해석할 때 peclet number가 일정 값 이상일 경우 해의 진동이 나타나고, 2계 미분항에는 중앙차분근사를, 1계 미분항에는 후퇴차분법을 적용하여 안정

\* 주저자 : 단국대학교 전기전자공학부 부교수

Tel : 02-709-2392, Fax : 02-709-2161

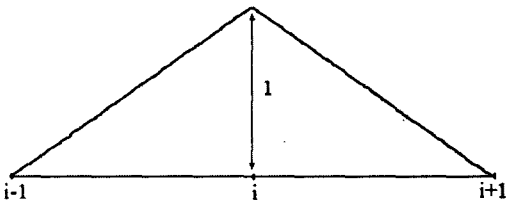
E-mail : hosung@dankook.ac.kr

접수일자 : 2005년 4월 18일

1차심사 : 2005년 4월 20일

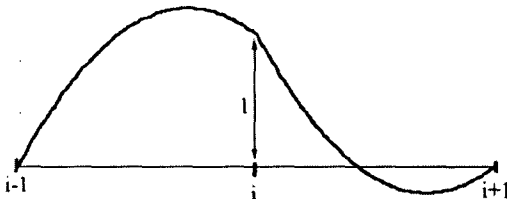
심사완료 : 2005년 5월 3일

된 해를 구할 수 있다. 유한요소법(Finite Element Method)에서 흔히 쓰이는 Galerkin법은 유한차분법의 중앙차분과 유사하게 된다. 따라서 유한요소법에서도 이러한 문제를 해결하기 위해 1970년대부터 여러 가지 방법이 개발되었다. O. C. Zienkiewicz에 의해 1차원문제에 대해 처음으로 upwind법을 유한요소법에 적용시키는 방법이 제안되었고, I. Christie에 의해 확립되었다[4]. 이 방법은 가중함수의 상류와 하류방향에 적당한 크기의 함수를 가감하여 상류쪽에 더 많은 가중을 주는 것이다. 이것은 J. C. Heinrich에 의해 2차원 문제로 확장되었다[5, 6].



(a) Galerkin법의 가중함수

(a) Weighting function of galerkin method



(b) Heinrich의 가중함수

(b) Heinrich's weighting function

그림 1. 가중함수

Fig. 1. Weighting function

본 논문에서는 간단한 1차원 미분방정식에 앞에서 언급된 방법들을 적용시켜 해를 구하고 그 안정성을 비교하였으며, 속도기전력문제를 와전류제동기를 해석대상으로 하여 2차원 유한요소법을 이용하여 해를 구할 때 J. C. Heinrich에 의해 제안된 upwind법을 적용시켜 안정된 해를 구해보았다. 또한 요소형상, 및 경계조건에 따른 Galerkin법과 upwind법의 해의 안정성을 고찰하였다. 요소형상으로는 직사각형 요소와 삼각형 요소를 사용하여 각각의 경우에 대해 고정경계조건, 자연경계조건, 주기경계조건을 적용시켜 경계조건이 해의 안정성에 미치는

영향도 검토하였다. 또한 자기벡터 포텐셜 및 힘의 크기도 비교 검토하였다.

## 2. 일차원 문제

### 2.1 정식화

앞에서 언급한 후퇴차분법과 upwind법을 이용해서 (2.1)의 1계 미분항을 포함한 1차원 미분방정식의 해를 구하고 그 안정성을 중앙차분법과 Galerkin법에 의한 것과 비교해 보겠다. 해석영역은 x의 최소값이 0이고, 최대값이 1이다. 0과 1사이의 영역을 10개의 같은 크기의 요소로 분할하였으며, 경계치는  $\phi(0)=1, \phi(1)=0$ 이다.

$$k \frac{d^2\phi}{dx^2} - u \frac{d\phi}{dx} = 0 \quad (2.1)$$

이 미분방정식을 풀기 위해 Heinrich에 의해 제안된 가중함수를 이용한 upwind법을 적용시켜 식 (2.2)와 같이 정식화를 하면 식 (2.3)과 같은 결과를 얻을 수 있다. 식 (2.3)에서 a의 값이 0일 경우 Galerkin법에 의한 정식화 결과식이 되고, a의 값이 1일 경우 후퇴차분법에 의한 결과 식이 된다[2].

$$k \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{\partial R_{je}^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial L_{je}^{(1)}}{\partial x} \right\} A_{je} dx + u \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 R_{je}^{(1)} \frac{\partial L_{je}^{(1)}}{\partial x} A_{je} dx = 0 \quad (2.2)$$

$$\left(1 + \frac{\lambda}{2}(1+a)\right)\phi_{i-1} - (2+\lambda a)\phi_i + \left(1 + \frac{\lambda}{2}(a-1)\right)\phi_{i+1} = 0; \lambda = \frac{u\Delta x}{k} \quad (2.3)$$

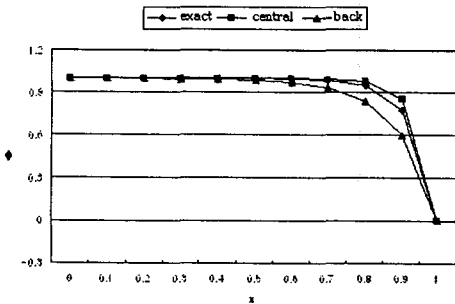
여기서,  $L_{je}^{(1)}$ 은 그림 1(a)와 같이 i번째 절점에서 1의 값을 가지고 i-1번째와 i+1번째 절점에서 0의 값을 가지는 1차선형의 형상함수이다. 이것은 Galerkin법에서 가중함수로 쓰이는 것으로 i번째 절점을 중심으로 좌우 대칭을 이룬다. 그리고  $R_{je}^{(1)}$ 은 Heinrich에 의해 제안된 가중함수로서 그림 1(a)의 형상함수에 식 (2.4)과 식 (2.5)의 함수의 곱을 가감하여 그림 1(b)와 같이 비대칭 함수가 된다. 여기서  $\lambda$ 는 pecllet

운동자계 문제의 해석을 위한 유한요소법에 관한 연구

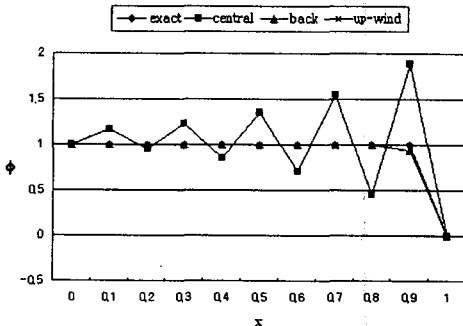
number로 식 (2.3)에 나타낸 것과 같이 미분방정식의 계수값과 요소의 크기 h에 의해 결정되며, λ의 크기에 따라 해의 진동이 결정된다. 이 값은 2차원 문제에서 제시되는 peclet number와 상응하는 값이다.

$$\alpha = \coth\left(\frac{\lambda}{2}\right) - \frac{2}{\lambda} \quad (2.4)$$

$$f(x) = \frac{-3}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)(x - x_2) \quad (2.5)$$



(a) λ = 1.5



(b) λ = 15

그림 2. λ의 크기에 따른 해  
Fig. 2. Solution according to the magnitude of λ

2.2 해석결과

식 (2.6)은 식(2.3)으로부터 구한 각 절점의 ϕ의 값이다. 이 식에서 알 수 있듯이 α=0(중앙차분법, galerkin법)이고 λ>2일 경우 지수항이 음수가 되어 해가 진동하게 된다. α=1(후퇴차분법)일 경우 지수항이 항상 양수이므로 해가 진동하지 않는다. 식 (2.7)은 식 (2.1)의 미분방정식의 이론적 해로서 정확

한 해라고 볼 수 있다.

그림 2(a)와 (b)에는 단순히 해의 진동여부를 보여주기 위해 λ가 2보다 작은 1.5와 2보다 큰 15일 때 식 (2.2)의 해를 나타내었다. 그림에서와 같이 λ=1.5일 때는 Galerkin법의 해도 진동하지 않는 것을 볼 수 있다. λ=15(λ>2)일 경우 Galerkin법으로 해석할 경우 해가 진동하는 것을 볼 수 있다. 하지만 upwind 법이나 후퇴차분법에 의한 해는 peclet number(λ)에 관계없이 진동하지 않는 것을 볼 수 있다.

$$\phi_i = C_1 + C_2 \left[ \frac{1 + (\alpha + 1)(\lambda/2)}{1 + (\alpha - 1)(\lambda/2)} \right]^i \quad (2.6)$$

$$\phi = D_1 + D_2 e^{-\frac{\lambda}{k}x} \quad (2.7)$$

3. 2차원 문제

3.1 지배방정식

속도기전력항을 포함하는 문제의 Maxwell 전자 방정식은 식 (3.1)과 같다.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_0 + \vec{J}_e \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.2)$$

식 (3.2)는 속도기전력항을 나타낸다. 여기서 ∇ϕ를 고려하지 않는다면 속도기전력항은 식 (3.3)과 같이 되고 와전류의 식은 (3.4)와 같이 된다.

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} \quad (3.3)$$

$$\vec{J}_e = \sigma \vec{E} = \sigma (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.4)$$

식 (3.4)를 식 (3.1)에 대입하고 벡터포텐셜  $\vec{A}$ 를 계변수로 하는 지배방정식을 유도하면 식 (3.5)와 같이 된다.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{A}) = \vec{J}_0 + \sigma (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.5)$$

속도가 x방향 성분만 가진다고 보고, 2차원문제에

서는 자기벡터포텐셜  $\vec{A}$ 가 z방향성분만 존재한다고 가정하면, 속도기전력항은 아래의 식 (3.6)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \nabla \times v\vec{B} &= v_x \vec{a}_x \times (\nabla \times \vec{A}) \\ &= v_x \vec{a}_x \times \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} \vec{a}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \vec{a}_y \right) \\ &= -v_x \frac{\partial A_z}{\partial x} \vec{a}_z \end{aligned} \quad (3.6)$$

식 (3.6)을 식 (3.5)에 대입하고, Coulomb gauge 조건 ( $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ )을 적용하면, 식 (3.7)과 같은 와전류계동기의 2차원 해석을 위한 특성방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right] + J_0 - \sigma v_x \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \quad (3.7)$$

여기서 A는 자기벡터 포텐셜을 나타내고,  $J_0$ 는 계자전류밀도,  $\sigma$ 는 도전율,  $\mu$ 는 투자율,  $v_x$ 는 자계의 x방향으로의 운동속도이다.

### 3.2 삼각형요소에 대한 정식화

지배방정식 (3.7)을 1차 삼각형 요소를 사용하여 Galerkin법에 의해 정식화하면 식 (3.8)과 같이 선형화된 1차 편미분 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial N_{je}}{\partial x} \frac{\partial N_{ie}}{\partial x} + \frac{\partial N_{je}}{\partial y} \frac{\partial N_{ie}}{\partial y} \right\} A_{je} ds \\ + \sigma v_x \int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^3 N_{je} \frac{\partial N_{ie}}{\partial x} A_{je} ds \\ - J_0 \int_{\Omega^e} N_{ie} ds = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

여기서  $\Omega^e$ 는 요소의 영역이고, 1차 보간함수  $N_j$ 는 식 (3.9)와 같고, 그 계수 값은 식 (3.10)~(3.12)와 같이 요소의 각 절점좌표  $(x_{j1}, y_{j1})$ ,  $(x_{j2}, y_{j2})$ ,  $(x_{j3}, y_{j3})$ 로부터 구할 수 있다. 식 (3.13)은 요소의 단면적이다.

$$N_{je} = (a_{je} + b_{je}x + c_{je}y) / 2\Delta^e \quad (3.9)$$

$$a_{je} = x_{je}y_{ke} - x_{ke}y_{je} \quad (3.10)$$

$$b_{je} = y_{je} - y_{ke} \quad (3.11)$$

$$c_{je} = x_{ke} - x_{je} \quad (3.12)$$

$$\Delta^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_{je} & y_{je} \\ 1 & x_{ke} & y_{ke} \\ 1 & x_{le} & y_{le} \end{vmatrix} \quad (3.13)$$

요소 방정식으로 구성된 식(3.8)을 행렬식으로 나타내면 식 (3.14)가 되고, 요소행렬의 계수 값은 각각 식 (3.15)~(3.17)이 된다.

$$[s]^e [A]^e = \left\{ \frac{1}{4\Delta\mu} [K_{ij}]^e - \sigma^e \frac{v_x}{6} [T_{ij}]^e \right\} [A]^e = [f]^e \quad (3.14)$$

$$[K_{ij}]^e = \begin{pmatrix} b_{1e}b_{1e} + c_{1e}c_{1e} & b_{1e}b_{2e} + c_{1e}c_{2e} & b_{1e}b_{3e} + c_{1e}c_{3e} \\ b_{1e}b_{2e} + c_{1e}c_{2e} & b_{2e}b_{2e} + c_{2e}c_{2e} & b_{2e}b_{3e} + c_{2e}c_{3e} \\ b_{1e}b_{3e} + c_{1e}c_{3e} & b_{2e}b_{3e} + c_{2e}c_{3e} & b_{3e}b_{3e} + c_{3e}c_{3e} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$[T_{ij}]^e = \begin{pmatrix} b_{1e} & b_{2e} & b_{3e} \\ b_{1e} & b_{2e} & b_{3e} \\ b_{1e} & b_{2e} & b_{3e} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$$[f]^e = J_0^e \frac{\Delta^e}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

식 (3.14)를 전체 요소에 대해 적용하여 계방정식 (system matrix)을 구할 수 있다.

### 3.3 직사각형요소에 대한 정식화

#### 3.3.1 정식화

식 (3.7)을 그림 3(a)와 같은 직사각형요소를 사용하여 upwind법에 의해 정식화하면 식 (3.18)과 같이 1차편미분 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^4 \left\{ \frac{\partial R_{je}}{\partial x} \frac{\partial L_{je}}{\partial x} + \frac{\partial R_{je}}{\partial y} \frac{\partial L_{je}}{\partial y} \right\} A_{je} ds \\ + \sigma v_x \int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^4 R_{je} \frac{\partial L_{je}}{\partial x} A_{je} ds \\ - J_0 \int_{\Omega^e} R_{je} ds = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

식 (3.18)을 그림 3(b)와 같이 무차원좌표계로 변환된 요소에 적용하면 식 (3.19)과 같은 요소방정식이 된다.

운동장계 문제의 해석을 위한 유한요소법에 관한 연구

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^4 \left\{ \left( A_{11} \frac{\partial R_{ie}}{\partial \xi} + A_{12} \frac{\partial R_{ie}}{\partial \eta} \right) \left( A_{11} \frac{\partial L_{ie}}{\partial \xi} + A_{12} \frac{\partial L_{ie}}{\partial \eta} \right) \right\} \\ & + \left( A_{21} \frac{\partial R_{ie}}{\partial \xi} + A_{22} \frac{\partial R_{ie}}{\partial \eta} \right) \left( A_{21} \frac{\partial L_{ie}}{\partial \xi} + A_{22} \frac{\partial L_{ie}}{\partial \eta} \right) A_{ie} \frac{d\xi d\eta}{J_D} \\ & - \sigma \nu \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^4 R_{ie} \left( A_{11} \frac{\partial L_{ie}}{\partial \xi} + A_{12} \frac{\partial L_{ie}}{\partial \eta} \right) A_{ie} d\xi d\eta \quad (3.19) \\ & = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J_D R_{ie} J_D d\xi d\eta \end{aligned}$$

여기서 직교좌표계를 무차원 좌표계로 변환할 때 요소내의 임의의 점(x, y)는 변환된 요소내의 점(ξ, η)를 써서 식 (3.20)와 (3.21)으로 나타낼 수 있고, 식 (3.22)과 (3.23)와 같이 요소의 각 절점의 좌표 (x<sub>ie</sub>, y<sub>ie</sub>)와 형상함수 N<sub>ie</sub>에 의해 정의된다.

$$x = C_1 + C_2 \xi + C_3 \eta + C_4 \xi \eta \quad (3.20)$$

$$y = D_1 + D_2 \xi + D_3 \eta + D_4 \xi \eta \quad (3.21)$$

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i^e(\xi, \eta) x_{ie} \quad (3.22)$$

$$y = \sum_{i=1}^4 N_i^e(\xi, \eta) y_{ie} \quad (3.23)$$

### 3.3.2 좌표변환 matrix

식 (3.18)에서 형상함수와 가중함수의 편미분을 무차원 좌표계로 변환하는 식은 식 (3.24)와 같이 chain rule에 의한 Jacobian matrix를 이용하여 얻을 수 있다[7].

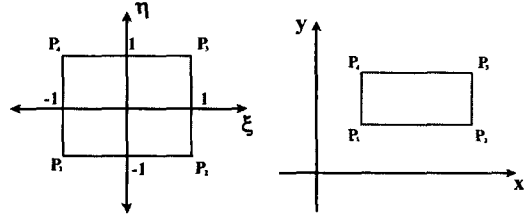
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} &= \frac{1}{J_D} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{J_D} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.25) \end{aligned}$$

$$J_D = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

식 (3.25)에서 Jacobian matrix의 역행렬의 값은 식 (3.22)과 (3.23)을 이용하여 식 (3.27)~식 (3.30)와

같이 구할 수 있다. 여기서 a와 b는 각각 직사각형 요소의 가로변의 길이와 세로변의 길이를 나타낸다.



(a) x-y 좌표계 (a) x-y coordinate  
(b) 무차원 좌표계 (b) Local coordinate

그림 3. 요소의 좌표 변환  
Fig. 3. Transformation of element

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial \eta} N_i(\xi, \eta) y_{ie} \\ &= \frac{1}{4} [(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \xi - y_1 - y_2 + y_3 + y_4] \quad (3.27) \\ &= \frac{1}{4} (-y_1 - y_2 + y_3 + y_4) = \frac{1}{2} b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{12} &= -\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial \xi} N_i(\xi, \eta) y_{ie} \\ &= \frac{1}{4} [(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \eta - y_1 + y_2 + y_3 - y_4] \quad (3.28) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{21} &= -\frac{\partial x}{\partial \eta} = -\sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial \eta} N_i(\xi, \eta) x_{ie} \\ &= -\frac{1}{4} [(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \xi - x_1 - x_2 + x_3 + x_4] \quad (3.29) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{22} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial \xi} N_i(\xi, \eta) x_{ie} \quad (3.30) \\ &= \frac{1}{4} (-x_1 + x_2 + x_3 - x_4) = \frac{1}{2} a \end{aligned}$$

### 3.3.3 무차원 좌표계에서의 형상함수 및 가중함수

식 (3.18)에서 R<sub>ie</sub>는 직사각형 요소의 upwind 가중함수, L<sub>ie</sub>는 형상함수이다. 이 식을 무차원좌표계 (ξ-η)로 변환하면 그 값은 각각 식 (3.31)~(3.34), (3.35)~(3.38)과 같다.

$$R_{1e} = \frac{1}{4} (1 - \xi - 2\alpha F(\xi))(1 - \eta) \quad (3.31)$$

$$R_{2e} = \frac{1}{4} (1 + \xi - 2\alpha F(\xi))(1 - \eta) \quad (3.32)$$

$$R_{3e} = \frac{1}{4} (1 + \xi - 2\alpha F(\xi))(1 + \eta) \quad (3.33)$$

$$R_{4e} = \frac{1}{4}(1 + \xi - 2aF(\xi))(1 + \eta) \quad (3.34)$$

$$L_{1e} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (3.35)$$

$$L_{2e} = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (3.36)$$

$$L_{3e} = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (3.37)$$

$$L_{4e} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (3.38)$$

여기서 pecllet number에 의해 결정되는 upwind factor  $a$ 와  $F(\xi)$ 는 앞의 1차원 문제에서 제안된 식 (2.4)와 (2.5)를 사용하였다. 해석모델로서  $x$ 방향의 속도만을 갖는 모델을 사용할 경우 식 (3.31)~(3.34)에서와 같이  $x$ 방향( $\xi$ 방향)으로만 upwind법을 적용시키면 된다.

식 (3.31)~(3.34)에서  $a$ 를 0으로 두면 직사각형 요소에 대한 형상함수가 되어 식 (3.19)는 Galerkin 법에 의한 정식화결과와 같게 된다.

식 (3.40)은 Peclet number를 구하는 식이다. 여기서  $\sigma$ 는 레일의 도전율,  $\mu$ 는 투자율,  $v_x$ 는 전자석의 운동속도, 그리고  $h$ 는  $x$ 방향(운동방향)으로의 요소의 크기를 나타낸다.

$$a = \coth\left(\frac{Pe}{2}\right) - \frac{2}{Pe} \quad (3.39)$$

$$Pe = \sigma\mu v_x h \quad (3.40)$$

### 3.3.4 요소행렬

요소 방정식으로 구성된 식(3.19)를 행렬식으로 나타내면 식 (3.41)이 되고, 요소행렬의 계수 값은 각각 식 (3.42)~(3.44)이 된다.

$$\left[ \frac{1}{4s} e_{\mu} [M_{ij}]^e + \frac{\sigma v_x b}{12} [G_{ij}]^e \right] A^e = \frac{abJ_0}{4} [f_{ij}]^e \quad (3.41)$$

$$[M_{ij}]^e = \begin{bmatrix} 2k + (\frac{4}{3} - a)a^2 & -2k + (\frac{2}{3} - a)a^2 & -k - (\frac{2}{3} - a)a^2 & k - (\frac{4}{3} - a)a^2 \\ -2k + (\frac{2}{3} + a)a^2 & 2k + (\frac{4}{3} + a)a^2 & k - (\frac{4}{3} + a)a^2 & -k - (\frac{2}{3} + a)a^2 \\ -k - (\frac{2}{3} + a)a^2 & k - (\frac{4}{3} + a)a^2 & 2k + (\frac{4}{3} + a)a^2 & -2k + (\frac{2}{3} + a)a^2 \\ k - (\frac{4}{3} - a)a^2 & -k - (\frac{2}{3} - a)a^2 & -2k + (\frac{2}{3} - a)a^2 & 2k + (\frac{4}{3} - a)a^2 \end{bmatrix}$$

여기서  $k = \frac{2}{3} b^2$  (3.42)

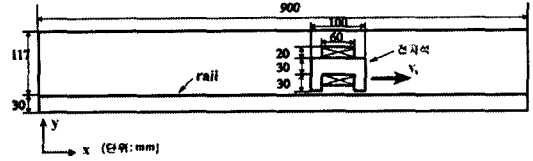
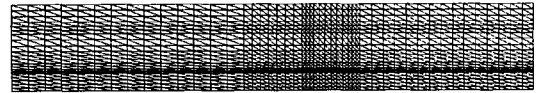
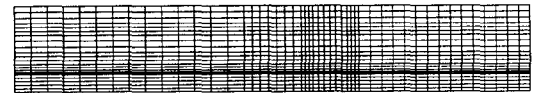


그림 4. 해석모델  
Fig. 4. Analysis model



(a) 삼각형요소  
(a) Triangle element



(b) 직사각형요소  
(b) Tetragonal element

그림 5. 요소분할 모델  
Fig. 5. Mesh model

$$[G_{ij}]^e = \begin{bmatrix} -(2-2a) & (2-2a) & (1-a) & -(1-a) \\ -(2+2a) & (2+2a) & (1+a) & -(1+a) \\ -(1+a) & (1+a) & (2+2a) & -(2+2a) \\ -(1-a) & (1-a) & (2-2a) & -(2-2a) \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

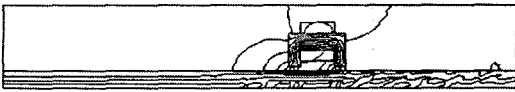
$$[f_{ij}]^e = \begin{bmatrix} 1-a \\ 1+a \\ 1+a \\ 1-a \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

## 4. 해석결과 및 검토

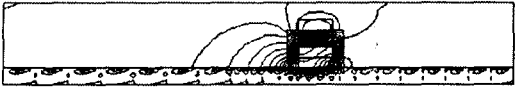
### 4.1 해석모델

그림 4는 요소의 형태 및 경계조건에 대한 해의 안정성을 검토하기 위한 와전류제동기의 모델을 간단히 나타낸 것이다. 전자석이  $x$ 방향으로 일정한 속도로 운동하고 레일에 속도기전력에 의한 와류가 발생한다.

그림 5는 해석모델의 요소분할 그림이다. 그림 5(a)와 (b)는 각각 삼각형요소 및 직사각형요소로 분할된 요소분할도이다. 각각 요소수는 1056개, 2112개이고, 절점수는 두 요소 모두 1127개이다. 이때  $Pe$ 의 최대값은  $5637(\sigma=0.157 \times 10^7, \mu=1000 \times 4\pi \times 10^{-7})$ ,



(a) 방법 1  
(a) Method 1

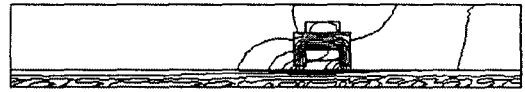


(b) 방법 2  
(b) Method 2



(c) 방법 3  
(c) Method 3

그림 6. 고정경계조건 문제  
Fig. 6. Dirichlet boundary condition problem



(a) 방법 1  
(a) Method 1



(b) 방법 2  
(b) Method 2



(c) 방법 3  
(c) Method 3

그림 7. 자연경계조건 문제  
Fig. 7. Neumann boundary condition problem

$v_x=100[m/s]$ ,  $h=0.028[m]$ 이다.

## 4.2 해석결과 및 검토

본 연구에서는 요소의 형상과 경계조건이 수치적 해의 안정성에 어떠한 영향을 미치는 지에 대해 알아보기 위해 그림 2의 모델에 대하여 고정경계조건, 자연경계조건, 주기경계조건을 적용하고 다음의 3가지 방법에 의해 유한요소해석을 수행하였다.

- (1) 방법 1 : 삼각형요소, Galerkin법
- (2) 방법 2 : 직사각형요소, Galerkin법
- (3) 방법 3 : 직사각형요소, upwind법

결과로 보인 그림 9, 10, 11, 12의 그래프는 Origin이라는 그래프 작성툴을 이용하였다.

### 4.2.1 자속 분포도

그림 6, 7, 8은 각각 고정경계조건, 자연경계조건, 주기경계조건을 적용시키고, 위의 세가지 방법에 의해 해석된 자속분포도이다. 그림 6은 해석모델의 4개의 경계면에 고정경계조건을 적용시켜 해석했을 때 자속분포도이다. 그림 6(a)와 (b)는 각각 방법 1

과 2를 적용시킨 결과 자속분포도에 비정상적인 맴돌이가 발생하는 것을 알 수 있다. 이것은 인접한 절점사이에서 자기벡터 포텐셜이 진동하기 때문에 일어나는 현상이다. 그림 6(c)는 방법 3에 의한 해석결과로써 레일부분의 포텐셜의 진동이 억제되어 정상적인 자속 분포를 나타내고 있다.

그림 6에서 레일의 자속이 늘어지는 쪽의 경계면에 고정경계조건을 주었기 때문에 해의 급격한 변화가 요구되고, 수치해가 이 급격한 변화에 적용하지 못하기 때문에 진동하게 된다. 이것은 그림 9의 벡터 포텐셜 분포에서 잘 볼 수 있다. 이러한 이유에서 그림 7은 레일의 뒤쪽 즉 자속이 늘어지는 쪽의 경계면에 자연경계조건을 적용시키고 나머지 면에는 고정경계조건을 적용시켜 앞에서 언급한 3가지의 방법으로 해석한 결과이다. 그림 7(a)와 (b)에서 자연경계조건을 적용시킴으로써 자속의 맴돌이 현상이 줄어든 것을 알 수 있다. 이것은 고정경계조건일 때와 비교하면 해의 진동이 거의 없어진 것이라고 볼 수 있다. 그림 7(c)는 upwind법을 적용시킨 결과로써 자속의 맴돌이가 완전히 없어진 것을 볼 수 있다.

그림 8은 해석모델의 양 옆면에 주기경계조건을 적용하였을 경우이다. 그림 8(a)와 (b) 모두 Galerkin법으로 해석한 결과이지만 그림 8(a)의 경우 비정상

적인 자속분포가 발생하고 그림 8(b)의 경우는 정상적인 자속분포가 나타나는 것을 볼 수 있다. 이것으로 볼 때 요소의 형상 또한 해의 안정성에 영향을 미치는 것을 볼 수 있다.

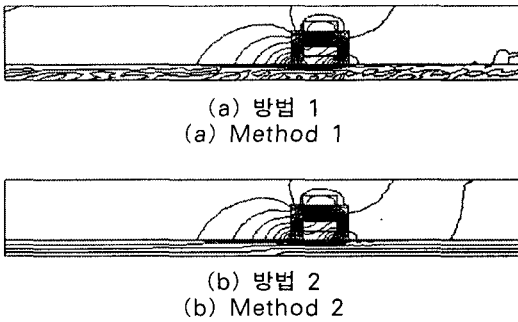


그림 8. 주기경계조건 문제  
Fig. 8. Periodic boundary condition problem

#### 4.2.2 자기벡터포텐셜 분포

그림 9는 고정경계조건을 적용하여 해석한 경우 rail 중앙에서의 자기벡터 포텐셜 그래프이다. 방법 1과 2를 적용한 경우 해의 오실레이션이 발생하지만 방법 3을 적용한 경우 해의 진동이 없어지는 것을 알 수 있다. 레일의 왼쪽 경계면( $x=0$ )에서 고정경계조건으로 인해 벡터포텐셜의 크기가 급격히 0으로 줄어든 것을 볼 수 있다.

그림 10과 11은 자연경계조건과 주기경계조건을 적용하였을 경우 레일 중앙에서의 자기벡터포텐셜의 그래프이다. 삼각형요소를 사용한 경우가 직사각형요소를 사용한 경우보다 진동이 심하게 일어나는 것을 볼 수 있다.

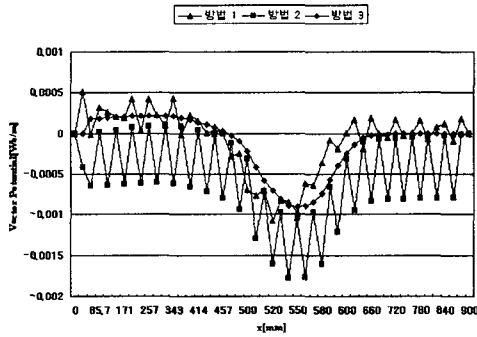


그림 9. 벡터포텐셜 분포(고정경계조건)  
Fig. 9. Vector potential distribution(Dirichlet boundary condition)

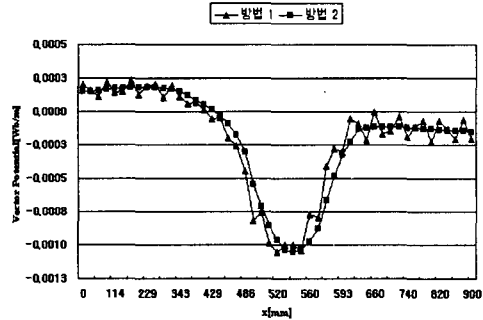


그림 11. 벡터포텐셜 분포(주기경계조건)  
Fig. 11. Vector potential distribution(Periodic boundary condition)

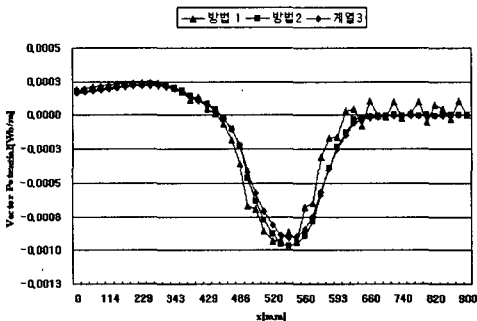


그림 10. 벡터포텐셜 분포(자연경계조건)  
Fig. 10. Vector potential distribution(Neumann boundary condition)

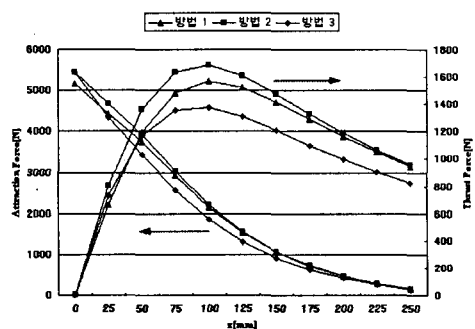


그림 12. 속도에 따른 힘특성  
Fig. 12. Force performance according to velocity



## 운동자계 문제의 해석을 위한 유한요소법에 관한 연구

따른 힘특성이다. 방법 1을 적용시킨 경우는 방법 3을 적용시킨 경우보다 힘이 최대 14[%]정도 크게 계산되며 방법 2의 힘은 최대 18[%]정도 크게 계산됨을 볼 수 있다.

### 5. 결 론

본 논문에서는 속도기전력항을 포함하는 운동자계문제를 Galerkin법과 upwind법을 적용시켜 해석하여 경계조건과 요소의 형상이 해석에 미치는 영향에 대해 고찰해 보았다. 그 결과 Galerkin법으로 해석할 때 고정경계조건일 경우 레일의 왼쪽( $x=0$ )부분 즉 자속이 늘어지는 부분의 해가 급격하게 변하므로 해가 진동하는 것을 볼 수 있었고, 자연경계조건과 주기경계조건일 경우 이러한 현상이 없어진 것을 알 수 있었다. 그렇지만 삼각형 요소를 사용할 경우 자연경계조건과 주기경계조건을 적용하더라도 해의 진동이 완전히 없어지지 않았다. upwind법(직사각형요소)으로 해석할 경우 경계조건에 관계없이 진동이 억제되어 안정한 해를 얻을 수 있음을 확인하였다.

### References

- [1] T. Funukawa, K. Kbmia, I. Muta, "An Upwind Galerkin Finite Element Analysis of Linear Induction Motor", IEEE Trans on Magn, Vol.26, No.2, pp.662-665, 1990.
- [2] M. Ito, T. Takahashi, M. Odamura, "Up-wind finite element solution of travelling magnetic field problems", IEEE Trans on Magn., Vol.28, No.2, pp. 1605-1610, 1992.

- [3] T. Todaka, M. Enokizono, "Traveling magnetic field analysis of electromagnetic retarder by using upwind finite element method", Proc. ICEE 98, Vol.1, pp.693-696, 1998.
- [4] I. Christie, D. F. Griffiths, A. R. Mitchell, "Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.10, pp.1389-1396, 1976.
- [5] J. C. Heinrich, P. S. Huyakom and O.C Zienkiewicz, "An up-wind finite element scheme for two-dimensional convective transport equation", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, pp.131-143, 1977.
- [6] 민준기, "최적가중함수를 이용한 대류항이 큰 전달방정식의 UPWIND유한요소해석", 한국과학기술원 석사학위논문, 1990.
- [7] 임 달 호, "전기계의 유한요소법", 동명사.

### ◇ 저자소개 ◇

#### 장호성 (張漢星)

1955년 3월 28일생. 1978년 서강대학교 전자공학과 공학사. 1985년, 1993년 오레곤주립대학교 전자공학과에서 공학석사 및 공학박사학위 취득. 1994~2000년 한양대학교 전기전자공학부 전임강사, 조교수. 2000년~현재 단국대학교 전기전자공학부 부교수.