

< 논문 >

Level Set Redistancing 알고리즘의 유한요소 이산화 기법에 대한 연구

최형권[†] · 강성우^{*} · 유정열^{**} · 이윤표^{***}
(2004년 11월 22일 접수, 2005년 4월 14일 심사완료)

Study on the Finite Element Discretization of the Level Set Redistancing Algorithm

HyoungGwon Choi, Sungwoo Kang, Jung Yul Yoo and Yoon Pyo Lee

Key Words : Finite Element Method(유한요소법), Level Set Method(Level Set 방법), Redistancing Algorithm(Redistancing 알고리즘), Streamline Upwind Petrov-Galerkin(유선상류 유한요소)

Abstract

A finite element discretization of the advection and redistancing equations of level set method has been studied. It has been shown that Galerkin spatial discretization combined with Crank-Nicolson temporal discretization of the advection equation of level set yields a good result and that consistent streamline upwind Petrov-Galerkin(CSUPG) discretization of the redistancing equation gives satisfactory solutions for two test problems while the solutions of streamline upwind Petrov-Galerkin(SUPG) discretization are dissipated by the numerical diffusion added for the stability of a hyperbolic system. Furthermore, it has been found that the solutions obtained by CSUPG method are comparable to those by second order ENO method.

1. 서 론

기포와 액체의 상호작용을 해석하는 수치해석 방법들로는 Level Set 방법,^(1,2) front-tracking 방법,⁽³⁾ volume of fluid(VOF) 방법⁽⁴⁾ 및 물체 적합격자계(body fitted coordinate) 방법⁽⁵⁾ 등이 있다. 물체 적합 격자계를 사용하는 방법은 상경계면을 따라서 생성된 격자계가 기체와 액상을 정확히 구분하는 방법으로서 상경계면의 표면장력을 가장 정확하게 처리 할 수 있으나 기포의 결합/분리

(merging/breaking)를 처리하는데 격자생성의 어려움이 따르고 매 시간 간격마다 격자를 다시 구성해야 하므로 비교적 단순한 문제 이외에는 사용에 제한이 따른다. Front-tracking 방법도 배경격자로는 정렬 격자계를 사용하지만 기포의 merging/breaking을 처리하는 데 어려움이 있고 차원 기포의 거동을 처리하는데 있어 많은 계산량이 필요하다. VOF 방법은 계면에서의 유량 출입을 대수적으로 처리하여 물리적인 이해가 명쾌하지만 정확한 질량 보존의 만족과 상경계면에서 곡률 반경의 정확한 예측을 위해서는 여러 가지 경우를 고려한 상당히 번거로운 계산 절차를 수행하여야 하는 단점이 있다.

위에 언급한 방법들에 비해 Level Set 방법은 이상유동에서 존재하는 불연속적인 계면을 연속함수(미분 가능한 함수)인 ϕ (Level Set function)를 이용하여 내재적으로 찾기 때문에 상경계면을 쉽고 효율적으로 찾을 수 있고 기포의 merging/breaking 및 3차원으로 코드 확장 등에 있어서 추

[†] 책임저자, 회원, 서울산업대학교 기계공학과

E-mail : hgchoi@snut.ac.kr

TEL : (02) 970-6312 FAX : (02) 949-1458

^{*} 회원, 서울대학교 대학원 기계항공공학부

^{**} 회원, 서울대학교 기계항공공학부

^{***} 회원, 한국과학기술원 열-유동제어 연구센터

가적인 문제점이 나타나지 않는 장점을 가진다. 반면에 Level Set 방법은 상경계면에서의 표면 장력을 정확히 예측하고 기포의 체적 보존을 위해서는 쌍곡선 형태(hyperbolic type)의 미분방정식인 Redistancing 방정식을 추가로 풀어야 하는 부담이 있다. 이 식은 매 시간 단계에서 Level Set 함수를 이송방정식(advection equation)에 의해 이동시킨 후 갱신된 상경계면을 구할 때마다 풀어야 한다. Level Set을 이용한 이상유동 계산결과의 정확성은 Redistancing 방정식의 해법에 크게 의존하므로⁽¹⁾ Level Set 기법의 적용에 있어서 Redistancing 방정식의 정확한 해법은 매우 중요한 부분이라 할 수 있다. 그런데, 쌍곡선 형태 미분방정식의 수치 해를 구할 때 인공점성이 과도하면 해가 수치 확산(numerical diffusion)에 의해 왜곡되고 인공 점성이 없으면 불연속면에서 진동(wiggle)이 생겨 부정확한 해를 주는 경우가 생긴다. 따라서, 기존에 발표된 유한차분법을 이용한 대부분의 연구들^(1,6,7)에서는 Redistancing 방정식의 해법을 위해 수치 확산이 많은 상류도식(upwind) 대신 ENO(essentially-non-oscillatory) 방법을 사용하여 만족할 만한 해를 얻었다.

한편, Level Set을 이용하여 발표된 이상유동의 수치해석 방법들은 Pillapakam과 Singh⁽⁸⁾의 유한요소법을 이용한 해석 결과를 제외하면 대부분 배경격자계로 정렬 격자계를 사용하고 공간이산화로 유한체적법 또는 차분법을 사용하였다. Pillapakam과 Singh⁽⁸⁾은 처음으로 유한요소법과 비정렬 배경 격자계를 이용하여 Level Set 해석을 하였지만 Level Set 해석에 있어서 중요한 부분인 Redistancing 방정식의 해석 시에 쌍곡선 형태 미분방정식의 해법의 어려움 때문에 내재적 해석 대신 Galerkin 공간이산화에 의한 외재적인 방법을 채택하였다. 이 방법은 공간이산화시 쌍곡선형 방정식에 대한 수치적인 고려가 없으므로 상경계면의 시간에 따른 변화가 큰 문제의 해석에는 적용할 수 없다. 또한, Level Set 함수의 이송방정식을 이산화를 위하여 비정렬격자계에서는 구현하기가 상당히 번거로운 3차 정확도의 상류도식(upwind method)를 사용하였다.

본 연구에서는 비정렬 배경 격자계에서 Redistancing 방정식의 해를 얻기 위한 방법을 제시하기 위해서 쌍곡선 형태 미분방정식의 유한요소 공간이산화에 자주 사용되는 SUPG(streamline

upwind Petrov-Galerkin)⁽⁹⁾ 유한요소방법과 CSUPG (consistent streamline upwind Petrov-Galerkin) 유한요소방법을 이용하여 수치실험을 하고자 한다. 유동장이 미리 주어진 두 가지 표준예제에 대해서 SUPG와 CSUPG 기법의 Redistancing 방정식의 해법 성능을 비교하고 유한차분법에서 자주 사용되는 ENO의 결과와도 비교하고자 한다.

2. 수치 해석 방법

2.1 Level Set 함수의 이송방정식의 이산화

Level Set 함수의 이송방정식은 아래와 같은 쌍곡선형 미분방정식으로 표시된다.

$$\phi_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\phi = 0 \quad (1)$$

공간이산화는 기저함수로 선형함수를 사용한 Galerkin 방법을 사용하며 시간 이산화로는 1차 정확도인 backward Euler 방법과 2차 정확도인 Crank-Nicolson 방법을 각각 사용한다. 식 (1)을 Galerkin 방법을 이용하여 반이산화(semi-discretization) 하면 다음과 같이 서술된다.

허용되는 모든 가중함수 $w \in V$ 대해서 다음의 식을 만족하는 $\phi \in H^1(\Omega)$ 를 찾는다.

$$\int_{\Omega} w(\phi_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\phi) d\Omega = 0 \quad (2)$$

여기서 H^1 공간은 함수의 일계도함수가 적분 가능한 공간을 의미하고, $V = \{w | w \in H^1(\Omega), w = 0 \text{ on } \Gamma_g\}$ 이고, Γ_g 는 Dirichlet 경계조건이 주어지는 경계이다. 식 (2)를 가우스 적분을 이용하여 적분하면 ϕ 에 대한 비대칭 행렬이 얻어지고 이 행렬은 ILU(incomplete LU) 예조건화와 Bi-CGSTAB을 이용하여 푼다.

2.2 Level Set 함수의 Redistancing 알고리즘

Level Set 함수 ϕ 가 이송 방정식인 식 (1)에 의해 확산 오차(dissipation error)와 위상 오차(dispersion error) 없이 정확히 이송된다면, 상경계면($\phi=0$)은 정확히 추적되지만, 일반적으로 Redistancing 기법이 적용되지 않으면 공간상의 임의의 한 점에서의 ϕ 값은 초기의 함수 값과는

달리 상경계면까지의 최단거리를 나타내지 않는다. 상경계면 부근의 Level Set 함수가 최단거리를 나타내지 않게 되면 결국은 상경계면에서 곡률 계산에 오차가 생겨 표면장력을 부정확하게 예측하게 되고 비압축성의 기포나 액적의 체적이 변하게 된다. 따라서, 이송방정식을 푼 후의 Level Set 함수가 새로운 상경계면으로부터의 최단 거리를 나타내는 함수가 되기 위해서는 아래의 식을 내재적으로 푸는 것이 필요하다.

$$\begin{aligned} \phi_t &= S(\phi_0)(1 - |\nabla\phi|) \\ S(\phi_0) &= 2(H(\phi_0) - 0.5) \end{aligned} \tag{3}$$

여기서, ϕ_0 는 주어진 속도장을 이용하여 상경계면을 이송방정식에 의해 이송시킨 직후의 Level Set 함수의 분포를 나타내며 S는 상경계면 내부에서는 음수, 외부에서는 양수의 값을 가지는 부호함수이다. H는 불연속적인 상경계면에서 발생하는 수치적인 불안정성을 제거하기 위해 상경계면에 일정한 가상두께를 주기 위해 도입한 함수로 다음과 같이 표시된다.

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{if } \phi < -\epsilon \\ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\phi}{\epsilon} + \frac{1}{\pi} \sin(\pi\phi/\epsilon) \right] & \text{if } |\phi| \leq \epsilon \\ 1 & \text{if } \phi > \epsilon \end{cases}$$

본 연구에서 상경계면의 가상두께를 설정하기 위해 이전의 연구 결과를 참고하여 $\epsilon = 1.5\Delta x$ [Δx 는 유한요소(격자)의 특성길이]로 주었다. 가상 두께를 더 크게 주면 상 경계면의 두께가 실제 물리적인 현상보다 과장되어 해가 부정확해지며, 너무 작게 되면 특이(singularity)가 수치 불안정성을 야기한다. 쌍곡선 형태의 미분방정식인 식 (3)을 푸는 대신에 공간상의 한 점에서 상경계면까지의 최단거리 ϕ 를 직접 계산할 수도 있으나 이는 상당히 많은 계산 량을 요구하고 격자가 성긴 경우에는 부정확한 해를 줄 수 있다. 식 (3)이 수렴하면 ϕ 는 $|\nabla\phi| = 1$ 로 수렴을 하여 상경계면까지의 최단거리를 나타내게 된다. 식 (3)을 수치적으로 해석하기 위해 식 (3)을 아래와 같은 형태로 다시 쓴다.⁽¹⁾

식 (4)는 비선형 쌍곡선형 편미분 방정식이며 u_c 벡터는 단위벡터로 상경계면 선상에서 수직방향으로 멀어지는 방향을 향한다. SUPG 및 CSUPG

$$\begin{aligned} \phi_t + u_c \cdot \nabla\phi &= S(\phi_0) \\ u_c &= S(\phi_0)(\nabla\phi / |\nabla\phi|) \end{aligned} \tag{4}$$

유한요소법을 사용하여 공간 이산화시 기저 함수는 H^1 공간에 속하는 선형함수를 택한다. 시간 이산화는 두 방법 모두 Crank-Nicolson 방법을 이용하였다. SUPG 유한요소법을 이용하여 식 (4)를 반이산화 하면 다음과 같이 표현된다. 허용되는 모든 가중함수 $w \in V$ 대해서 다음의 식을 만족하는 $\phi \in H^1(\Omega)$ 를 찾는다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [w(\phi_t + u_c \cdot \nabla\phi - S(\phi_0)) \\ + \tilde{p}u_c \cdot \nabla\phi] d\Omega = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

CSUPG 유한요소법을 이용하여 식 (4)를 반이산화 하면 다음과 같이 표현된다.

허용되는 모든 가중함수 $w \in V$ 대해서 다음의 식을 만족하는 $\phi \in H^1(\Omega)$ 를 찾는다.

$$\int_{\Omega} (w + \tilde{p})(\phi_t + u_c \cdot \nabla\phi - S(\phi_0)) d\Omega = 0 \tag{6}$$

여기서 H 공간은 함수의 일계도함수가 적분 가능한 공간을 의미하고 $V = \{w | w \in H^1(\Omega), w = 0 \text{ on } \Gamma_g\}$ 이다. 또한, \tilde{p} 는 쌍곡선형 미분 방정식의 공간이산화 시 추가되는 섭동 가중함수 (perturbation weight function)로 다음과 같이 표시된다.

$$\tilde{p} = c_i u_c \cdot \nabla w \tag{7}$$

이에 대한 상세한 내용은 문헌⁽⁹⁾를 참고한다. 식 (5)와 (6)을 가우스 적분을 이용하여 적분하면 ϕ 에 대한 비대칭 행렬이 얻어지고 이 행렬은 ILU(incomplete LU) 예조건화와 Bi-CGSTAB을 이용하여 푼다.

2.3 전체적인 알고리즘

본 연구에서 사용한 전체 알고리즘은 다음과 같이 정리된다. 매 시간마다 새로운 상경계면을 구하고 ϕ 를 다시 초기화하기 위해서 다음의 질

차를 반복한다.

(a) Level Set 함수 ϕ 에 대한 이송 방정식을 기지의 속도장을 이용하여 풀어 새로운 시간단계에서의 갱신된 상 경계면을 구한다.

(b) Level Set 함수 ϕ 가 상경계면까지의 최단거리를 나타내도록 Redistancing 알고리즘을 적용한다.

(c) 다음 시간 단계로 전진하여 (a)과 (b)를 반복한다.

3. 계산 결과 및 토의

3.1 이송방정식의 이산화 영향

본 절에서는 Redistancing 방정식에 대한 SUPG와 CSUPG 공간이산화 기법의 성능을 실험하기에 앞서 Level Set 함수의 이송방정식에 적합한 시간 및 공간 이산화 기법을 찾는다.

두 시간 적분법을 비교하기 위해 유동장이 미리 주어진 두 문제에 대해서 이송방정식의 이산화를 수행한다. 첫 번째 문제는 전단 응력이 없는 강제 회전 유동이고 두 번째 문제는 전단 응력이 존재하는 Time reversed single vortex flow이다. 두 문제는 모두 일정 시간(주기)이 지난 후 기포가 원래의 상태로 돌아오는 문제이며 각각의 경우 속도장은 아래와 같이 주어진다.

(1) 강제 회전 유동

$$u = y$$

$$v = -x$$

(2) Time reversed single vortex flow

$$u = 2 \sin^2(\pi x) \sin(\pi y) \cos(\pi y) \cos(\pi t/T)$$

$$v = -2 \sin(\pi x) \cos(\pi x) \sin^2(\pi y) \cos(\pi t/T)$$

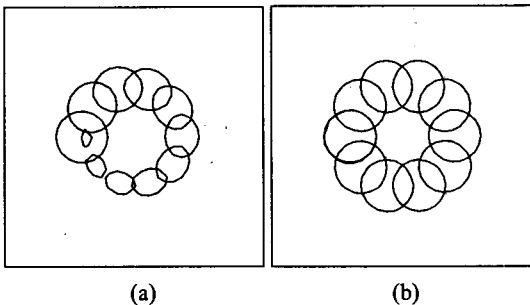


Fig. 1 Advection of level set function in rigid body rotation flow by (a) backward Euler and (b) Crank-Nicolson

2.1절에서 설명한 대로 공간이산화는 Galerkin 방법으로 수행하여 반이산화 된 식을 얻는다. 다음에 시간 이산화는 backward Euler와 Crank-Nicolson 방법을 이용하여 수행하고 결과를 비교한다. Fig. 1은 64×64 격자계를 사용한 경우 강제 회전 유동의 경우 상경계면의 변화를 보여준다. backward Euler 시간적분법을 사용하면 상경계면의 크기가 초기의 크기에 비해 크게 줄어들고 있음을 확인할 수 있다. 반면에 Crank-Nicolson 시간적분법을 Galerkin 공간이산화와 함께 사용하면 상경계면의 크기가 초기의 크기에 비해 거의 줄어들지 않고 위상 오차(dispersion error)도 매우 작음을 알 수 있다. 이 결과는 쌍곡선형인 일차원 이송방정식(advection equation)에 대해 von-Neumann 방법을 사용하여 안정성 해석을 하였을 때 얻어지는 결과와 부합한다.^(10,11) 이 이론에 따르면 수치해석 시 시간 이산화로 Crank-Nicolson 방법을 사용하고 공간 이산화로는 중심차분을 사용했을 때 소산오차(dissipation error)는 존재하지 않고 시간 간격의 크기에 비례하는 위상오차(dispersion error)만이 존재한다. 전단 응력이 존재하는 time reversed single vortex flow의 경우에도 backward Euler 시간 적분 방법(Fig. 2)은 과도한 소산오차와 위상오차가 존재하지만 Crank-Nicolson 방법(Fig. 3)의 경우에는 그 오차들이 매우 작음을 알 수 있다. Fig. 4는 Fig. 3과 같은 조건에서 위상오차를 줄이기 위해 시간간격을 반으로 줄였을 때의 계산결과를 보여준다. 따라서, 본 연구에서 주어진 예제들에 대해서 Redistancing 알고리즘을 수치해석 할 때 이송방정식의 이산화는 Crank-Nicolson 시간적분법을 Galerkin 공간이산화기법을 사용하였다.

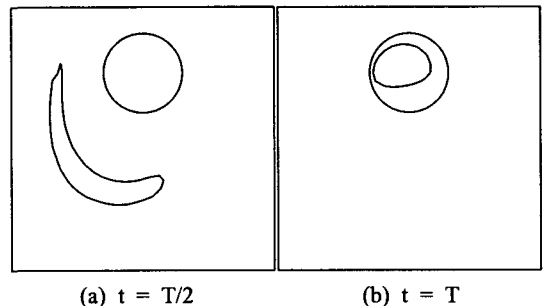
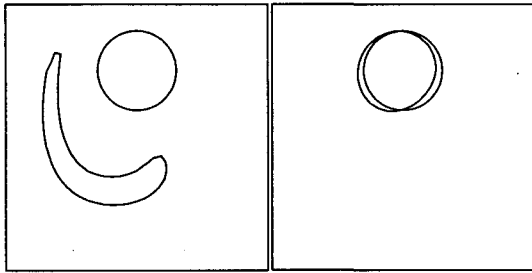
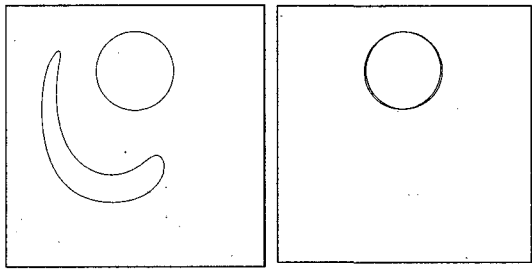


Fig. 2 Advection of level set function by backward Euler in time reversed single vortex flow



(a) $t = T/2$ (b) $t = T$

Fig. 3 Advection of level set function by Crank-Nicolson in time reversed single vortex flow (Grid size: 64×64 , Time step size: $0.5 \times \Delta x$)



(a) $t = T/2$ (b) $t = T$

Fig. 4 Advection of level set function by Crank-Nicolson in time reversed single vortex flow (Grid size: 64×64 , Time step size: $0.25 \times \Delta x$)

3.2 Level set함수의 Redistancing 알고리즘차분법

본 절에서는 유선상류 유한요소법을 이용하여 Redistancing 방정식을 수치해석 하고 그 특성을 파악하고자 한다. 이송방정식은 위에서 좋은 성능을 보였던 Crank-Nicolson 시간적분법과 Galerkin 방법을 이용하여 시간 및 공간이산화를 수행한다. Fig. 5는 강제 회전 유동의 경우 상경계면의 초기 형상과 속도장 및 계산 영역의 크기를 보여 준다. 원의 크기는 반지름을 0.1로 하였다. Fig. 6은 128×128 격자계로 ENO, SUPG 및 CSUPG를 이용하여 Redistancing 방정식을 풀었을 경우 강체가 한 바퀴 회전했을 때의 Level Set 함수의 공간 분포를 나타낸다. Fig. 6(d)에서 보듯이 Redistancing 방정식을 풀지 않고 이송방정식만을 풀었을 경우에는 Level Set 함수의 분포는 상경계면에서 멀어질수록 상당히 부정확하며 상경계면 근처에서도 진동이 발생하여 이상유동의 해석에 부적합함을

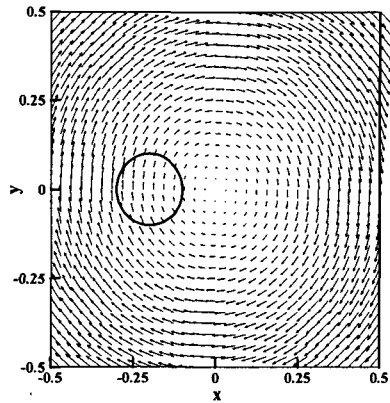


Fig. 5 Initial shape of an interface and the velocity field in rigid body rotation flow

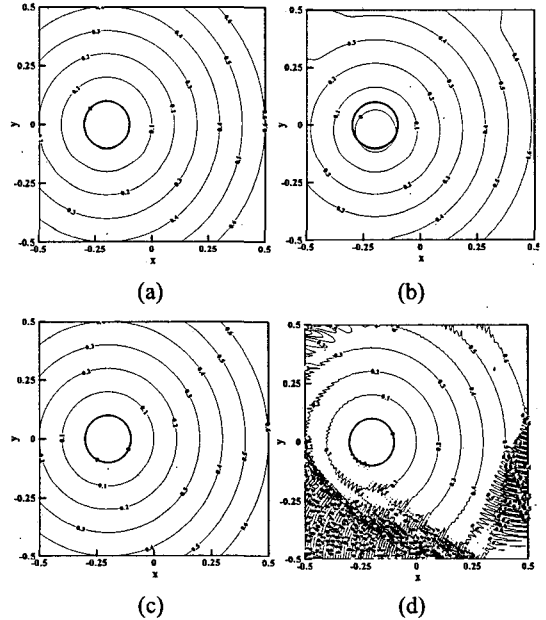


Fig. 6 Advection of level set function with various discretization methods of redistancing equation in rigid body rotation flow (128×128 grid): (a) CSUPG, (b) SUPG, (c) 2nd order ENO, (d) W/O redistancing equation

알 수 있다. Fig. 6(a)-(c)를 보면 ENO와 CSUPG는 상당히 만족할 만한 해를 줄 수 있다. SUPG의 경우는 소산오차가 커서 초기 원의 크기가 줄어들음을 알 수 있다. 이는 SUPG방법이 유한요소(감사체적)의 Peclet 수에 비례하는 수치소산(numerical dissipation)을 가지기 때문이다.⁽⁹⁾

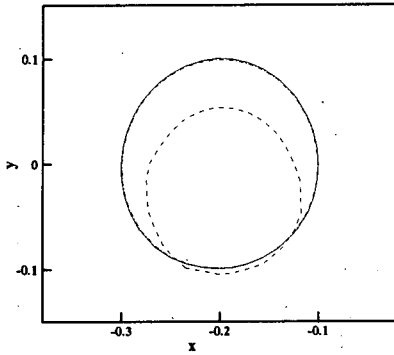


Fig. 7 Advection of level set function with various discretization methods of redistancing equation in rigid body rotation flow(64×64 grid): (Solid: CSUPG, Dashed: SUPG, Dashdot: 2nd order ENO)

따라서, SUPG방법은 격자계가 성길수록 더소산 오차가 큰 해를 주게 된다. Fig. 7은 Fig. 6의 계산보다 성길 격자계(64×64)에서 같은 계산을 수행하여 상경계면이 한 바퀴 회전했을 때의 모양을 나타낸다. ENO와 CSUPG가 여전히 좋은 결과를 줌에 반하여 SUPG의 경우는 성길 격자계로 계산을 수행할 경우 소산 오차가 더욱 커짐을 알 수 있다. 반면에 CSUPG 방법을 이용한 해가 정확한 이유는 Galerkin 가중함수에 섭동함수를 추가하여 가중함수를 수정한 후 가중잔류법을 적용하므로 이산화된 식이 수치소산을 포함하지 않기 때문이라 여겨진다. 이 수치방법은 가중잔류법의 일종인 최소오차 자승 가중잔류법(least square weight residual method)과 유사한 형태를 가지며 이에 관련한 좀 더 자세한 이론은 논문⁽¹²⁾를 참고한다.

Fig. 8은 time reversed single vortex 유동에서 $t = T/2$ (T =주기)에서의 Level Set 함수의 공간분포를 나타낸다. Fig. 8(d)의 Redistancing 알고리즘을 적용하지 않은 경우는 Level Set 함수의 공간분포가 상경계면으로부터의 거리를 나타내지 않으며 단지 이송된 ϕ 의 값임을 알 수 있다. 강제회전 유동의 경우와 마찬가지로 ENO와 CSUPG는 정확한 결과를 줌에 반하여 SUPG는 소산오차에 의해 상경계면내의 유체의 체적이 보존되지 않고 소산됨을 알 수 있다. Fig. 9는 128×128의 격자계에서 time reversed single vortex 유동을 CSUPG, SUPG, ENO로 이산화 했을 때 $t = T/2$,

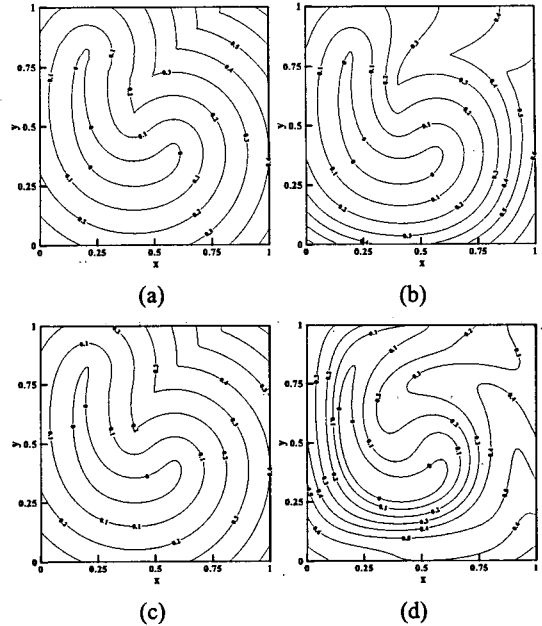


Fig. 8 Advection of level set function with various discretization methods of redistancing equation in time reversed single vortex flow(128×128 grid): (a) CSUPG, (b) SUPG, (c) 2nd order ENO, (d) W/O redistancing equation

T에서의 상경계면의 모양을 보여준다. ENO와 CSUPG의 경우 상경계면내의 체적은 잘 보존되는 반면 SUPG의 경우는 소산오차가 존재하여 반 주기 및 한 주기에서의 $\phi = 0$ 의 체적으로 이루어진 면적이 감소함을 알 수 있다. 한편, SUPG 방법이 상 경계에서 진동이 없는 대신 소산된 해를 주는데 비하여, CSUPG 방법의 경우는 한 주기 후에 원의 상단부 일부에서 상경계면 주위에 약간의 진동이 존재한다. 이는 CSUPG 방법이 소산 오차로부터 자유로움을 보여주는 예가 된다.

Table 1과 Table 2는 강제회전유동과 time reversed single vortex 유동에서 세 가지 Redistancing 이산화 기법을 사용했을 때, 한 주기 후의 Level Set 함수의 분포와 엄밀해와의 차이를 나타낸다. 오차는 상경계면 주위의 Level Set 함수의 분포가 물리적으로 중요하기 때문에 Level Set 함수의 절대치가 $1.5 \times \Delta x$ 보다 작은 점들만 고려하여 계산하였다. 오차는 다음 식과 같이 정의되고 식 (8)에서 M은 ϕ 의 절대치가 ϵ 보다 작

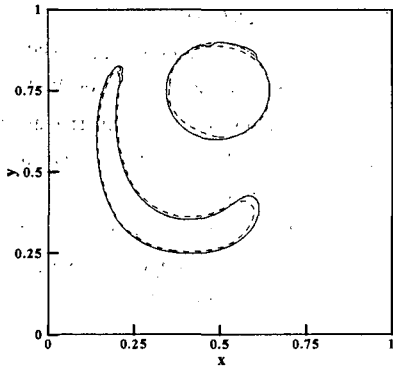


Fig. 9 Advection of level set function with various discretization methods of redistancing equation in time reversed single vortex flow(128x128 grid): (Solid: CSUPG, Dashed: SUPG, Dashdot: 2nd order ENO)

Table 1 Error of level set function in rigid body rotation flow

Grid Resolution	65 × 65	129 × 129
Method		
SUPG	2.83E-02	2.05E-02
CSUPG	1.12E-03	3.69E-04
ENO	1.24E-03	3.16E-04

Table 2 Error of level set function in time reversed single vortex flow

Grid Resolution	65 × 65	129 × 129
Method		
SUPG	1.50E-02	7.98E-03
CSUPG	1.07E-02	5.06E-03
ENO	9.02E-03	4.55E-03

은 절점들의 갯수를 나타낸다.

$$Error = \sqrt{\frac{\sum_{|\phi| < \epsilon} (\phi_{Num}^i - \phi_{Exact}^i)^2}{M}} \quad (8)$$

Table 1과 2의 오차를 비교하면 강체회전 유동의 경우 ENO의 정확도는 약 이차이나 time reversed single vortex의 경우는 약 일차 정확도임을 보여 준다. 이는 본 연구에서처럼 advection 방정식과 Redistancing 방정식을 같이 풀 경우 전체 정확도는 Redistancing 방정식의 오차뿐만 아니라

advection 방정식의 오차에도 연성되어 있기 때문이다.⁽⁷⁾ 또한, advection 방정식을 풀지 않고 Redistancing 방정식만을 ENO를 이용하여 2차원 문제를 해석할 경우의 정확도는 형상의 복잡 정도에 따라 2차 정확도보다 적다고 알려져 있다.⁽⁷⁾ CSUPG와 ENO는 정확도가 거의 비슷함을 알 수 있고 SUPG는 상대적으로 오차가 큼을 알 수 있다. Time reversed single vortex의 유동의 경우 전체 영역을 고려하여 오차를 계산하면 SUPG의 오차는 더 커짐을 Fig. 8로부터 알 수 있다.

4. 결론

Level Set 방법의 수치해석에서 중요한 부분인 이송방정식과 Redistancing 방정식의 유한요소 해석을 통하여 다음의 결론을 얻었다.

(1) 이송방정식의 이산화는 공간에 대하여는 Galerkin 방법을 시간에 대해서는 Crank-Nicolson 방법을 조합하여 사용할 경우 매우 좋은 결과를 얻을 수 있음을 보였다.

(2) Redistancing 알고리즘의 유한요소를 이용한 공간이산화로는 쌍곡선형 미분방정식의 이산화에 자주 이용되는 SUPG보다는 CSUPG가 훨씬 좋은 결과를 주었다. 이는 SUPG 방법의 공간 이산화 시 추가되는 수치점성의 영향이 상경계면이 시간에 따라 변화는 비정상 문제에서 오차를 누적시키기 때문이라고 여겨진다.

(3) CSUPG 방법을 이용한 공간이산화는 2차 정확도를 가지는 ENO방법과 비교했을 때, 두 가지 표준예제에 대해 거의 같은 정확도를 가지는 결과를 주며, 유한요소 공간이산화의 특성상 비정렬 격자계를 가지는 경우에도 추가적인 작업 없이 바로 적용될 수 있다.

(4) 본 논문의 CSUPG 방법을 이용한 결과를 더 향상시키고자 향후 상경계면 내의 질량보존과 관련된 구속조건을 고려한 알고리즘⁽⁷⁾을 채용하고자 한다.

후 기

본 연구는 한국과학기술연구원의 위탁연구비 지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Sussman, M., Smereka, P. and Osher, S., 1994, "A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow," *J. Comput. Phys.*, Vol. 114, pp. 146~159.
- (2) Chang, Y. C., Hou, T. Y., Merriman, B. and Osher, S., 1996, "A Level Set Formulation of Eulerian Interface Capturing Methods for Incompressible Fluid Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol. 124, pp. 449~464.
- (3) Unverdi, S. O. and Tryggvason, G., 1992, "A Front Tracking Method for Viscous, Incompressible, Multi-Fluid Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol. 100, pp. 25~37.
- (4) Hirt, C. W. and Nichols, B. D., 1981, "Volume of Fluid(VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries," *J. Comput. Phys.*, Vol. 39, pp. 201 ~225.
- (5) Ryskin, G. and Leal, L. G., 1984, "Numerical Solution of Free-Boundary Problems in Fluid Mechanics-Part 1. The Finite-Difference Technique," *J. Fluid. Mech.*, Vol. 148, pp. 1~17.
- (6) Sussman, M., Fatemi, E., Smereka, P. and Osher S., 1998, "An Improved Level Set Method for Incompressible Two-phase Flows," *Comput. Fluids*, Vol. 27, pp. 663~680.
- (7) Sussman, M. and Fatemi, E., 1999, "An Efficient, Interface-preserving Level Set Redistancing Algorithm and Its Application to Interfacial Incompressible Fluid Flow," *SIAM J. Sci.Comput.*, Vol. 20, No. 4, pp. 1165~1191.
- (8) Pillapakkam, S. B. and Singh, P., 2001, "A Level-Set Method for Computing Solutions to Viscoelastic Two-Phase Flow," *J. Comput. Phys.*, Vol. 174, pp. 552~578.
- (9) Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R., 1982, "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 32, pp. 199~259.
- (10) Ferziger, J. H. and Peric, M., 1996, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer, Berlin.
- (11) Finlayson, B. A., 1992, *Numerical Methods for Problems with Moving Fronts*, Ravenna Park Publishing, Inc.
- (12) Jiang, B. N. and Povinelli, L. A., 1990, "Least-Squares Finite Element Method for Fluid Dynamics," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 81, pp. 13~37.