Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering
Vol, 28, No. 2, pp.146－151, June 2005.

음이항분포의 특성을 이용한 조달기간 수요 분석

안선웅 · 김우현

한양대학교 산업공학과

Diagnosis of Lead Time Demand Based on the Characteristics of Negative Binomial Distribution

Sun-Eung Ahn · Woo-Hyun Kim

Department of Industrial Engineering, Hanyang University

Some distributions have been used for diagnosing the lead time demand distribution in inventory system. In this paper, we describe the negative binomial distribution as a suitable demand distribution for a specific retail inventory management application. We here assume that customer order sizes are described by the Poisson distribution with the random parameter following a gamma distribution. This implies in turn that the negative binomial distribution is obtained by mixing the mean of the Poisson distribution with a gamma distribution. The purpose of this paper is to give an interpretation of the negative binomial demand process by considering the sources of variability in the unknown Poisson parameter. Such variability comes from the unknown demand rate and the unknown lead time interval.

Keywords : Negative binomial distribution; Lead time demand; Parameter interpretation

1. 서 론

기업간 복잡한 경쟁구조, 제품주기의 단축 그리고 고객의 기대수준 향상과 같은 산업 환경 변화에 대응하기 위해 기업은 경쟁우위확보를 위한 다양한 노력을 기울이고 있다. 일례로 고객에게 안정적이고 유연하게 제품을 공급하기 위해 재고관리시스템의 효율적 운영을 위한 최신의 기법들이 적용되고 있다. 또한 수요예측에 대한 전체 공급망의 효과적인 관리를 위해 수요예측 정보 자체의 정확도 향상과 수요예측 변동에 대해 기민한 공급망 구성인자의 공유를 가능하게 하는 협업적 수요예측 모델들이 적용되고 있다. 재고관리시스템을 운영함에 있어서 대부분의 수요는 정상적인 수요과정(stationary demand process)보다 비정상적 수요과정(non-stationary demand process)으로의 표현이 좀 더 현실적임을 알 수 있다(Agrawal, 1996). 그러나 대부분의 재고관리에 관련된 연구에서는 기존에 흔히 사용되던 분포(예를 들어, 포아송, 감마, 지수분포 등)를 가정하여 자료를 분석하고 있으며, 실제 발생된 자료가 가정된 확률분포와 크게 차이를 보일 경우, 예상치 못한 수요의 발생으로 인한 경제적 손실의 가능성을 항상 내재하고 있다고 할 수 있다. 특히, 공급사슬에서 적절하지 못한 수요모형의 적용은 다음 단계로 진행될수록 수요의 변동성이 더욱 커짐을 알 수 있고, 이러한 현상은 채찍효과(bullwhip effect)로 표현된다(Lee, 1997).

이러한 정보왜곡에 의해 발생하는 불규칙한 수요의 피해를 최소화하기 위한 두 가지 방법은 다음과 같다. 먼저 과거의 수요자료와 유사 환경의 수요자료 분석을 통해 보다 정확한 수요곡선을 개발하는 것이다. 이러한 경우 과거 자료에만 의존하는 기존의 방식에서 벗어나 최근의 환경까지 함께 분석한다는 점에서 기존 방식의 단점을 상쇄시키는 장점이 있지만, 수많은 자료들을 분석해야 한다는 점에서는 비효율적인 방법이 될 수 있다. 두 번째 방법은 사용의 편의성을 위해 가정되었던 수요

에 대한 기존의 확률분포들을 적용분야의 특성에 맞게 수정을 하는 방법이 있다. 복합분포(compound distribution) 개발과 같은 어려운 부분들이 발생할 수 있지만 다양한 분야에서 유연하게 적용될 수 있다는 장점이 있다.

일반적인 수요모형에서 최적의 수요정책을 결정하는 핵심은 정확한 수요의 예측 혹은 재고를 위한 상품 수요의 추정이라고 말하고 있다(Kamath, 2002). 그러나 정확한 수요예측이라는 목적에도 불구하고 포아송 수요모형에서는, 고객의 주문을 상수의 모수로 가정하고 있다. 이러한 가정은 현실에 존재하는 불확실성과 시간에 따른 변화 때문에 유연한 수요예측을 위한 새로운 해석을 요구하고 있다. 본 연구에서는 고객의 주문은 포아송분포를 따라 발생하며 포아송분포의 모수는 감마분포를 따른다는 가정 하에서 수요를 분석하였다. 이 경우 음이항분포가 포아송분포와 감마분포의 결합에 의해 발생한다(Agrawal, 1996). 예를 들어 다음의 상황을 고려한다. 생산자들은 제품을 제조하여 특정 단위의 상품을 물류센터로 공급을 한다. 이러한 생산품의 조달기간(lead time)은 재생과정(renewal process)을 따르는 반면, 물류센터로 도착하는 주문은 포아송과정을 따른다. 결론적으로 감마분포를 따르는 조달기간 동안의 주문에 대한 분포는 음이항분포라는 것을 알 수 있다(Engel, 1980).

임의의 사건(event) 발생을 표현하기 위해서는 많은 경우 포아송분포가 적용된다. 포아송분포의 모수에 대한 사전분포(prior distribution)로 감마분포가 사용될 경우 사건 발생 혼합분포는 음이항분포로 유도된다. 감마분포가 포아송분포의 모수에 대한 사전분포로 사용하는 주된 이유는 첫째, 감마분포가 포아송분포의 자연공액(natural conjugate) 분포이기 때문에 수학적 계산과 해석의 용이성을 가질 수 있기 때문이다(Percy, 2002). 많은 연구자들이(예를 들면, Apostolakis(1979)와 Grohowski(1976) 등) 감마분포가 실제 적용사례에서 많은 편의성을 가지고 있다는 것을 밝혔다. 감마분포와 음이항분포의 특성에 관한 연구는 여러 문헌(예를 들면, Engel(1980), Cacoullos(1982), Osaki(1988), 그리고 Ong(1995) 등)에서 볼 수 있으며, 특히 Gerber(1991)는 일반화(generalized) 감마분포가 포아송분포의 미지의 모수로 사용될 경우 일반화 음이항분포로 유도됨을 보이고 있다. 그의 일반화 감마분포와 일반화 음이항분포는 감마분포와 음이항분포를 포함한다.

본 연구의 목적은 미지의 모수를 가지는 포아송분포로부터 발생하는 변동성을 이용하여 음이항 수요과정의 체계적인 해석을 하고자 한다. 여기서 발생하는 변동성이란 미지의 수요발생율과 미지의 조달시간간격을 말한다. 일반적인 수요모형에서 고객의 주문은 상수의 모수값을 가지는 포아송분포를 가정하고 있지만, 본 연구에서는 모수를 상수가 아닌 확률변수로 간주하고 관찰된 자료를 조건으로 하는 추론 즉, 조건부 분포 추론을 시행하여 사후분포(posterior distribution)를 유도한다.

2장에서는 포아송 우도함수(likelihood function)에 의한 음이항 수요분포를 베이지안 모형을 이용하여 설명한다. 여기서 미지의 포아송 모수에 대한 사전분포는 감마 조달기간 분포를 사용한다. 음이항 수요분포는 포아송분포와 포아송 모수가 감마분포를 따르는 혼합분포이기 때문에 음이항 수요분포는 감마 분포의 모수들만 포함하며, 이들은 일반 모수와의 혼동을 피하기 위하여 상위모수(hyperparameters)라고 부른다. 3장과 4장에서는 음이항 수요과정을 포아송 모수가 고정된 조달기간과 변수의 수요발생율로 구성된 경우와 포아송 모수가 고정된 수요발생율과 변수의 수요기간으로 구성된 경우로 나누어 해석한다.

2. 포아송 우도함수

균일 포아송과정(homogeneous poisson process)은 평균 발생율이 λ인 사건발생과정 $\{N(t), t \geq 0\}$의 경우, 임의의 시간간격 t동안 사건발생이 평균값 λt를 가지는 포아송분포를 따르게 된다. 즉 모든 $s, t \geq 0$에 관하여 다음의 식이 성립한다.

$$\Pr\{N(t+s) - N(s) = y\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^y}{y!}, \quad y = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

여기서 $N(t)$의 기대값 $E\{N(t)\} = \lambda t$이며, 이는 λ를 포아송과정의 발생율로 부르는 이유를 잘 설명하고 있다. 식 (1)을 $Poisson(y|\lambda t)$로 표현한다.

포아송분포의 모수 λt를 사전분포 $p(\lambda t)$의 변수라고 가정하자. 특히, 변수 λt가 형태모수 α(양의 정수)와 척도모수 $\beta(>0)$를 가지는 감마분포를 따른다고 할 경우, 이 분포의 형태는

$$p(\lambda t) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(\lambda t)^{\alpha-1}e^{-\beta(\lambda t)} \tag{2}$$

가 되며 $Gamma(\lambda t|\alpha, \beta)$로 표현한다. 베이지안 접근법 중에서 특히 중요한 사전분포의 선택을 우도함수와 공액(conjugate)을 이루게 하는 방법이 사용되기도 한다. 우도함수와 공액이 되면 사전분포와 사후분포가 똑같은 모수분포 형태를 가지게 된다. 여기서 감마분포는 포아

송 우도함수의 공액분포이고(Percy, 2002), 베이즈 공식에서 사후분포는 사전분포와 우도함수의 관계 즉,

$$p(\lambda t|y) = \frac{p(y|\lambda t)p(\lambda t)}{p(y)}, \quad \cdots\cdots (3)$$

과 같은 관계를 가지고 있기 때문에 사전분포 $p(\lambda t)$는 정보 y의 우도함수를 통해 수정된 의견으로 사후분포 $p(\lambda t|y)$가 된다. 우도함수에 대한 공액사전분포로 감마분포가 사용되었으므로, 사후분포는 예상대로 동일한 분포인 감마분포가 되며 λt의 사후분포는 $Gamma(\lambda t|\alpha+y, \beta+1)$이 된다. 여기서 분모인 예측분포(predictive distribution) $p(y)$는

$$p(y) = \int p(y, \lambda t)d(\lambda t) \quad \cdots\cdots (4)$$

를 이용하여 구할 수 있다. 식(4)는 적분 결과 상위모수(hyperparameter)를 조건으로 관찰치만의 분포로 나타난다. 이는 y와 λt의 결합확률분포인 $p(y,\lambda t) = p(y|\lambda t)p(\lambda t)$를 모수 λt의 모든 값을 고려하는 과정(marginalizing)으로부터 예측분포 $p(y)$를 유도하게 된다. 즉,

$$\begin{aligned} p(y) &= \int p(y|\lambda t)p(\lambda t)d(\lambda t) \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^y}{y!}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(\lambda t)^{\alpha-1}e^{-\beta(\lambda t)}d(\lambda t) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+y)\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)y!(\beta+1)^{\alpha+y}} \\ &\quad \times \int_0^\infty \frac{(\beta+1)^{\alpha+y}}{\Gamma(\alpha+y)}(\lambda t)^{\alpha+y-1}e^{-(\beta+1)y}d(\lambda t) \\ &= \binom{\alpha+y-1}{\alpha-1}\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^\alpha\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^y \quad . \qquad (5) \end{aligned}$$

식(5)는 모수값 α와 $\beta/(\beta+1)$를 가지는 음이항분포임이며, $neg-bin(y|\alpha,\beta)$로 표현한다. 식(5)에서 변수 $\alpha+y$의 기대값은 기하분포의 평균 $(\beta+1)/\beta$의 α배 즉, $E[\alpha+y] = \alpha(\beta+1)/\beta$이며, 특히 상수에 대해 $E[y] = \alpha/\beta$ 가 된다.

식(5)의 유도과정은 음이항분포가 감마 조달기간 분포 $Gamma(\lambda t|\alpha,\beta)$와 이 분포를 따르는 모수 λt를 가지는 우도함수 $Poisson(y|\lambda t)$의 혼합분포임을 보여준다. 즉,

$$neg-bin(y|\alpha,\beta) = \int Poisson(y|\lambda t)\Gamma(\lambda t|\alpha,\beta)d(\lambda t). \quad \cdots\cdots (6)$$

임을 알 수 있다.

식(6)은 $Poisson(y|\lambda t)$를 따르는 사건(예를 들면, 제품의 구매주문 또는 제품의 수요 발생)이 발생하고 여기서 λt가 감마 조달기간 분포의 변수일 경우, 조달기간 동안의 사건발생 분포는 $neg-bin(y|\alpha,\beta)$임을 보여준다. 따라서 식 (3)과 함께 사전분포와 사후분포의 정보를 알 수 있다면 y의 예측분포를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} p(y) &= \frac{p(y|\lambda t)p(\lambda t)}{p(\lambda t|y)} \\ &= \frac{Poisson(y|\lambda t)Gamma(\lambda t|\alpha,\beta)}{Gamma(\lambda t|\alpha+y,\beta+1)} \end{aligned}$$

위의 식은 식(5)와 동일한 결과를 가진다.

지금까지 식(1)부터 식(5)를 통해 음이항분포의 형성과정을 살펴보았다. 특히, 이 과정에서 식(1)의 모수 λt는 λ가 단위시간 당 수요발생율일 때, 조달기간 t 기간동안 발생한 수요를 의미한다. 이러한 현상은 다양한 환경에서 적절한 해석이 필요하다. 본 연구에서는 모수 λt의 구성요소에 따라 두 가지의 해석을 한다. 먼저 모수 λt를 고정된 조달기간 t 동안의 수요발생율 λ를 의미하는 수요변수로 해석하는 경우이고, 다음으로 λt를 조달기간 변수 t 동안에 발생하는 고정된 수요발생율 λ를 가질 경우의 수요변수로 해석하는 경우이다. 두 변수 λ와 t 중 하나는 고정된 상수의 값을, 그리고 나머지 하나는 변수로 가정함으로써 식(5)의 예측분포를 각각의 경우에 대해 해석한다.

3. 고정된 조달기간 동안의 포아송 수요발생

포아송 수요발생 모수 λt가 $Gamma(\lambda t|\alpha,\beta)$의 분포를 따르고, λt의 조달기간 t가 고정된 기간을 가진다면, 변수 변환(change of variable)에 의해 단위기간 동안의 수요발생율 λ는 $Gamma(\lambda|\alpha,\beta t)$의 변수가 되는 것을 알 수 있다. 여기서 식(3)의 베이즈 공식과 식(5)의 유도과정을 통해, 과거 수요자료 y의 정보가 있을 경우 λ의 사후분포는 $Gamma(\lambda|\alpha+y,\beta t+t)$가 되며 y에 대한 예측분포는 다음과 같다.

$$p(y) = \binom{\alpha+y-1}{\alpha-1}\left(\frac{\beta t}{\beta t+t}\right)^\alpha\left(\frac{t}{\beta t+t}\right)^y. \quad \cdots\cdots (7)$$

식(7)은 식(5)와 동일하다.

지금까지 유도된 식(1) ~ 식(7)을 이용하여 모수 α와 β에 대한 해석은 다음과 같다. 우도함수 $Poisson(y|\lambda t)$를 따르는 모수 λt의 평균 수요발생율은 $E(\lambda t)=\alpha/\beta$이며 $E(\lambda)=\alpha/\beta t$가 된다. 여기서 형태모수 α는 이전 조달기간 βt 동안의 총수요로 해석될 수 있으며, 우도함수 $Poisson(y|\lambda t)$의 식(1)과 비교할 경우

$$\begin{aligned} p(y|\lambda t) &\propto (\lambda t)^y e^{-\lambda t} \\ &\propto \lambda^y e^{-(t)\lambda} \end{aligned} \quad \cdots\cdots (8)$$

와 같은 형태가 되며, 이는 $Gamma(\lambda|\alpha,\beta t)$의 식(2)

$$p(\lambda) \propto \lambda^{\alpha-1} e^{-(\beta t)\lambda}, \quad \cdots\cdots (9)$$

와 같은 형태를 가지게 된다. 이 경우 식(9)인 사전분포는 이전 조달기간 βt 동안의 총수요 $(\alpha-1)$을 반영하는 것으로 볼 수 있다.

그러나, 변수 λ에 대한 사전분포로 식(9)를 사용한다면 λ에 대한 평균값으로 $(\alpha-1)/\beta t$ 가 아닌 $\alpha/\beta t$를 사용하는 것과 같다. 만약 λ의 평균값인 $\alpha/\beta t$가 충분히 큰 βt 값에 대해 상수로 수렴한다면, $\alpha/\beta t$ 와 $(\alpha-1)/\beta t$ 는 동일한 값으로 근사한다.

수요량에 대한 사전정보가 알려진 경우 λ의 사후분포는 $Gamma(\lambda|\alpha+y,\beta t+t)$가 되며, 모수 $(\alpha+y)$는 누적된 수요량으로 처리되며, 반면 $(\beta t+t)$는 누적된 전체 조달기간이 된다. 변수 λ에 대한 사전분포 $Gamma(\lambda|\alpha,\beta t)$는 모수 α에 의해 수요량 y를 증가시키고, 모수 βt에 의해 전체 조달기간 t를 증가시키는 역할을 한다.

수요량 y에 대한 평균과 분산은 예측분포 식(7)으로부터 각각 α/β와 $\alpha(\beta+1)/\beta^2$로 계산된다. 이는 예측수요량 y는 식(7)의 음이항분포를 따르게 되며, 기대값은 α/β가 된다는 것을 의미한다.

4. 조달기간 동안 상수의 수요발생율을 가지는 포아송 수요발생

포아송 수요발생 모수 λt가 $Gamma(\lambda t|\alpha,\beta)$ 분포를 따르고, 조달기간 동안 수요발생율 λ가 고정된 경우, 변수 변환에 의해 조달기간 변수 t는 $Gamma(t|\alpha,\beta\lambda)$를 따른다. 이 경우 식(3)의 베이즈 공식과 식(5)의 유도과정을 통해, 수요정보 y가 알려진 경우 조달기간 변수 t의 사후분포는 $Gamma(t|\alpha+y,\beta\lambda+\lambda)$가 되고, y의 예측분포는 다음과 같다.

$$p(y)=\binom{\alpha+y-1}{\alpha-1}\left(\frac{\beta\lambda}{\beta\lambda+\lambda}\right)^{\alpha}\left(\frac{\lambda}{\beta\lambda+\lambda}\right)^{y}. \cdots (10)$$

식(10)은 식(5)와 동일하다.

균일 포아송과정에 대하여 고정된 수요발생율 λ와 조달기간 $[0,t)$사이의 총 수요 $N(t)$를 고려해 보자. 수요발생율 $\lambda=1$인 경우, Engel 과 Zijlstra(1980)은 조달기간 t가 모수 $\alpha>0$와 $\beta>0$을 가지는 감마 분포를 따른다면, $N(t)=y$의 분포는 모수 α와 β를 가지는 음이항분포를 따른다는 것을 보였다. 이는 $\lambda=1$일 경우의 식(6)과 동일한 분포이다. 이 경우 식(6)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$neg-bin(y|\alpha,\beta\lambda)= \int Poisson(y|\lambda t)\,Gamma(t|\alpha,\beta\lambda)dt\,. \cdots (11)$$

식(11)의 음이항분포는 수요발생율 λ와 $\beta\lambda$를 각각 가지는 두 개의 독립적인 포아송과정으로 해석될 수 있다. 식(11)의 포아송 우도함수 $Poisson(y|\lambda t)$는 조달기간 $[0,t)$동안 수요발생율 λ를 가지는 독립적인 지수함수들을 통해 수요량 y의 확률을 표현한다. 또한, 조달기간 $[0,t)$동안 수요발생율 λ를 가지는 독립적인 지수함수들을 통해 식(11)의 $Gamma(t|\alpha,\beta\lambda)$는 수요량 y의 확률을 결정하는 t 기간에 대한 가중치로 사용된다. 이러한 해석은 사전분포 $Gamma(t|\alpha,\beta\lambda)$는 변수인 조달기간 t를 발생시킨다는 의미이다. 여기서, 식(11)의 은 $Gamma(t|\alpha,\beta\lambda)$로부터 발생되는 t로부터 모든 가능한 λt를 고려하여 조달기간 $[0,t)$동안 수요발생율 λ를 가지는 수요량 y에 대한 분포로 해석될 수 있다. 위의 조달기간 t는 평균 $1/\beta\lambda$를 가지는 α 기간 동안의, 독립이며 동일한 분포를 따르는 지수분포(exponential distribution) 변수들의 합이다. 그러므로 $Poisson(y|\lambda t)$에 대한 λt(여기서 t는 $Gamma(t|\alpha,\beta\lambda)$의 변수)의 적분 값은 α 번째 수요가 발생할 때까지, λ의 지수 수요발생율을 따르는 독립적인 y의 수요가 발생할 확률과 같은 값을 가지게 된다. 이것은 음이항 수요분포에 대한 설명이다.

위의 음이항 수요는 균일 포아송과정의 전체 조달기

간 중 어떤 시점에서 수요가 발생하든 이전에 발생했던 수요와는 무관하며, 또한 최초의 수요발생 과정과 항상 같은 분포를 따른다는 특성으로부터 설명될 수 있다. 즉, 기존의 수요과정은 망각성질(memoryless property)을 가지고 있으며, 각 구간에서의 조달기간 분포는 지수분포를 따르게 된다는 의미이다.

수요발생율 $\beta\lambda$를 갖는 첫 번째 포아송 과정에서 α의 수요가 발생할 동안 수요발생율 λ를 갖는 또 다른 포아송 과정에서 정확히 y의 수요가 발생할 확률은 다음과 같이 유도될 수 있다. 수요발생율 λ와 $\beta\lambda$를 각각 가지는 두 개의 포아송 수요과정을 $\{N_1(t), t \geq 0\}$과 $\{N_2(t), t \geq 0\}$로 정의하자. 또한 T_y^1를 첫 번째 수요과정에서 y번째 수요의 도착시간을, T_α^2를 두 번째 수요과정에서 α번째 수요의 도착시간으로 표현하자. 위의 가정을 바탕으로 $p\{T_y^1 < T_\alpha^2\}$를 살펴보자. $y = \alpha = 1$인 경우를 생각해 보면, T_1^1($N_1(t)$ 과정에서 첫 번째 수요의 도착시간)과 T_1^2($N_2(t)$ 과정에서 첫 번째 수요의 도착시간)는 두 과정 모두 평균 $1/\lambda$과 $1/\beta\lambda$를 각각 가지는 지수분포로 구성된다. 따라서 구하는 확률은 다음의 식을 따른다.

$$pT_1^1 < T_1^2 = \frac{\lambda}{\beta\lambda+\lambda} = \frac{1}{\beta+1} \quad (12)$$

위의 식(12)는 하나의 지수확률 변수가 다른 지수확률 변수보다 작을 확률을 뜻한다. 여기서 $N_2(t)$ 수요과정에서 첫 번째 수요발생, 즉 $\alpha = 1$이 발생하기 전에 $N_1(t)$ 수요과정에서 두 번째 수요의 발생, 즉 $y = 2$인 경우의 확률을 고려해보자. $p\{T_2^1 < T_1^1\}$을 계산하기 위해 다음과 같은 추론을 할 수 있다. $N_2(t)$ 수요과정에서 첫 번째 수요가 발생하기 전에 $N_1(t)$ 수요과정에서 연속 두 번의 수요가 발생하기 위해서는 먼저 첫 번째 수요는 반드시 $N_1(t)$ 수요과정에서 발생해야한다. 식(12)으로부터 이 과정은 $\lambda/(\beta\lambda+\lambda)$의 확률로 발생한다. 이제 첫 번째 수요가 $N_1(t)$에서 발생했다는 것이 주어졌고 다음의 두 번째 수요에 대하여 T_2^1 이 T_1^2 보다 작아야 하므로 두 번째 수요 역시 $N_1(t)$ 수요과정에서 발생해야 한다. 하지만 첫 번째 수요가 두 수요과정에서 동시에 발생한다면 포아송 과정의 망각성질에 의해서 처음부터 이 과정이 반복되며, 이 때의 조건부 확률은 $\lambda/(\beta\lambda+\lambda)$가 되어서 최종적으로 구하고자 하는 확률은 다음과 같이 된다.

$$pT_2^1 < T_1^2 = \left(\frac{\lambda}{\beta\lambda+\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1}{\beta+1}\right)^2 .$$

이러한 추론으로부터 미래의 수요과정은 과거에 발생했던 독립적인 수요발생에 의해 확률값 $\lambda/(\beta\lambda+\lambda)$를 갖는 $N_1(t)$ 수요과정과 확률값 $\beta\lambda/(\beta\lambda+\lambda)$을 갖는 $N_2(t)$ 수요과정으로 구성되어 있음을 알 수 있다. 다시 말해서, $N_2(t)$ 수요과정에 α의 수요가 도착할 때까지, $N_1(t)$의 수요과정에 y의 수요가 도착할 확률은, $(\alpha-1)$개의 수요($N_2(t)$ 수요과정)와 $(\alpha+y-1)$개의 수요($N_1(t)$ 수요과정의 $\alpha-1$, $N_2(t)$에서의 y) 그리고 α번째의 수요($N_2(t)$ 수요과정)의 발생을 고려하여 구해진다. 그 결과 식(10)이 유도된다.

5. 결 론

3장과 4장에서와 같이 $Poisson(y|\lambda t)$의 모수 λt가 $Gamma(\lambda t|\alpha, \beta)$를 따르는 경우와 달리, 조달기간 t를 고정시킨 상태에서 수요발생률 λ가 $\Gamma(\lambda|\alpha, \beta)$를 따르는 경우, λ의 사후분포는 $Gamma(\lambda|\alpha+y, \beta+y)$가 된다. 또한 이 때 y의 예측분포는 다음과 같다.

$$p(y) = \binom{\alpha+y-1}{\alpha-1}\left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^\alpha\left(\frac{t}{\beta+t}\right)^y . \quad (13)$$

식(13)에서 평균과 분산은 각각 $\alpha t/\beta$와 $\alpha t(t+\beta)/\beta^2$이 된다. 이와 같은 방식으로, 수요발생율 λ를 고정시킨 상태에서 조달기간 t가 $Gamma(t|\alpha, \beta)$를 따르는 경우 t의 사후분포는 $Gamma(t|\alpha+y, \beta+\lambda)$가 되며 예측분포를 구하면 다음과 같다.

$$p(y) = \binom{\alpha+y-1}{\alpha-1}\left(\frac{\beta}{\beta+\lambda}\right)^\alpha\left(\frac{\lambda}{\beta+\lambda}\right)^y . \quad (14)$$

식(14)에서 평균과 분산은 각각 $\alpha\lambda/\beta$와 $\alpha\lambda(\lambda+\beta)/\beta^2$이 된다. 식(13)과 식(14)의 두 가지 확률분포는 3장과 4장에서 사용된 동일한 추론과정을 통해 해석 가능하다.

식(1)의 포아송분포에서 모수 λt의 사전분포를 결정하기 위한 가장 중요한 요소는 분석가의 지식과 λt에 관련된 과거 경험들의 결과로 적절한 모형을 선택하는 것이다. 그래서 사전분포는 분석가의 λt에 대한 전문가적 지식이 반영되는 것이다. 따라서 식(2)의 감마 분포에서

α와 β를 임의 선택한 것처럼 두개의 모수를 갖는 음이항분포의 유연성에 의해 분석가들도 λt에 대한 최신의 지식과 최적의 일치성을 표현하는 모형을 찾는다. 여기에서 수요와 조달기간 β의 정보가 2장의 조달기간 간격의 결정이나 3장의 포아송 모수값으로 발생된 수요발생율을 결정하는 역할을 하는 것처럼 수요량 α의 값은 우리의 관심 변수 y와 같은 단위를 가진다.

본 연구에서는 베이지안 확률모형 방법론을 근거로 한다. 이 방법은 관찰된 값 그리고 유효한 수요발생 정보들을 이용하여 확률값을 갱신(update)하는 과정을 포함한다. 또한 베이지안 방법론에서는 시스템의 불확실성 행동방식을 설명할 수 있도록 분포를 갖는 모수를 사용할 수도 있다. 그리고 사전분포를 활용하여 관심 모수들의 정보를 표현할 수도 있고, 이러한 모수는 실험이나 실제로 관찰한 값을 통해 갱신된다. 이러한 방법으로 사전분포는 모수들의 사후분포를 만들어 나가며, 이상의 과정을 반복하면서 사후분포는 다시 사전분포의 역할을 하게 된다. 이러한 베이지안 모형의 반복적 추론과정에 의해 수요과정은 과거에 발생했던 수요정보를 반영하면서 반복적으로 해석될 수 있다. 이러한 과거의 수요정보를 활용하는 학습과정(learning process)을 포함한 수요모형의 해석은 현실성과 유연성을 갖는다고 할 수 있다.

후 기

본 연구는 한국과학재단의 지역대학우수과학자사업(R05-2003-000-10290-0)의 지원으로 수행되었음.

참고문헌

[1] Agrawal, N., and Smith, S. A., "Estimating Negative Binomial Demand for Retail Inventory Management with Unobservable Lost Sales", Naval Research Logistics, 43(6), 839-861, 1996.

[2] Apostolakis, G., and Mosleh, A., "Expert opinion and statistical evidence : An application to reactor core melt frequency", Nuclear Science and Engineering, 70(2), 135-149, 1979.

[3] Cacoullos, T., and Papageorgiou, H., "Letter to the editor : Characterizing the negative binomial distribution", Journal of Applied Probability, 19, 742-743, 1982.

[4] Engel, J., and Zijlstra, M., "A characterization of the gamma distribution by the negative binomial distribution", Journal of Applied Probability, 17, 1138-1144, 1980.

[5] Gerber, H. U., "From the generalized gamma to the generalized negative binomial distribution", Insurance : mathematics and economics, 10(4), 303-309, 1991.

[6] Grohowski, G., Hausman, W. C., and Lamberson, L. R., "A Bayesian statistical inference approach to automotive reliability estimation", Journal of Quality Technology, 8, 197-208, 1976.

[7] H. Lee, P. Padmanabhan, and S. Whang, "The bull-whip effect in supply chain", Sloan Manage Rew, 38(3), 93-102, 1997.

[8] Kamath, K. R., & Pakkala, T. P. M., "A Bayesian approach to a dynamic inventory model under an unknown demand distribution", Computer & Operations Research, 29(4), 403-422, 2002.

[9] Ong, S. H., "Characterization of the negative binomial and gamma distributions", Biometrical Journal, 37(2), 251-254, 1995.

[10] Osaki, S., & Li, X., "Characterizations of gamma negative binomial distributions", IEEE Transactions on Reliability, 37(4), 379-382, 1988.

[11] Percy, D. F., "Bayesian enhanced strategic decision making for reliability", European Journal of Operational Research, 139(1), 133-145, 2002.