

다상유체해석을 통한 기포결함 예측과 금형설계기술

홍준호[#], 최영심¹, 조인성¹, 황호영¹, 최정길¹

Study for Permanent Mold Design Technology and Porosity Defect Prediction Method by Multi-Phase Flow Numerical Simulations

J. H. Hong, Y. S. Choi, I. S. Cho, H. Y. Hwang, J. K. Choi

(Received November, 30, 2004)

Abstract

The high-pressure die-casting is one of the most effective methods to produce a large amount of products in short cycle time. This process, however, has a problem that the gas porosity defect appears easily. The generation of gas porosity is known mainly due to the air entrapment during the injection stage. Most of numerical simulations for the molten metal flow pattern observations have done in the treating of one phase fluid flow but the gas-liquid interface is essentially multi-phase phenomenon. In this paper, the two-phase fluid flow numerical simulation methods have been adapted to predict the gas porosity generations in the molten metal. The accuracy and the usefulness of the new simulation module have been emphasized and verified through some comparison experiments.

Key Words : Multi-Phase Fluids, Numerical Simulation, Prediction of Porosity, Permanent Mold Design Technology

1. 서론

최근의 많은 재료 공학 분야의 연구들은 알루미늄 합금과 같은 가벼운 소재를 이용한 주조법을 해석하기 위한 효율적인 수치기법을 개발하기 위해 수행되고 있다[1]. 경량 소재의 대표적 주조법인 다이캐스팅은 복잡한 모양의 제품을 단번에 제조할 수 있는 경제적인 주조 방법 중의 하나로서, 그 중 고압 다이캐스팅은 고속고압으로 용탕을 금형 캐비티에 주입하여 주물을 만드는 효율적인 방법이다. 이 방법은 미려한 주물 표면을 얻을 수 있고, 생산 속도를 높일 수 있는 장점이 있으나 쉽게 기공이 발생하는 문제점을 가지고 있다[2]. 기공의 발생 현상은 용탕이 고속으로 주

입되면서 생기는 고립된 미충전 영역에 의해서 주로 발생한다. 이러한 기공은 2 차 가공 시 주조품 표면의 질을 떨어뜨리고 기계적 성질에 해를 끼치는 기포결함의 원인이 된다.

수치 시뮬레이션은 용탕에 발생하는 기공의 발생 메커니즘을 관찰할 수 있는 가장 효율적인 방법이라 할 수 있다. 1955 년경 부터 미국 Los Alamos 연구소를 중심으로 발전해 온 MAC[3], SMAC[4], SOLA[5], SOLA-VOF[6] 등의 유체 해석 차분 코드가, 주조 분야의 용탕 충전 현상 예측에도 적용가능 함이 W.S. Hwang, R.A. Stoehr 등에 의해 검증 된 이후[7], 많은 연구 결과가 발표되었고, 또 그것을 바탕으로 한 몇몇의 국내·외 주조 전용 상용 해석 소프트웨어가 개발되었다[8].

1. 한국생산기술연구원
교신저자: 한국생산기술연구원
E-mail: hongjho@kitech.re.kr

그러나, 일반적으로 주조분야에서의 수치 시뮬레이션은 용탕 만을 해석 대상으로 하는 단상 유체 수치해석을 하여 왔다. 공기-액체 간에 발생하는 압력전달 과정은 근본적으로 이상(異相) 유체 간의 운동에너지 전달 과정이므로, 정확한 용탕 내부 기포의 병합 및 분리 과정을 추적하기 위해서는 다상 유동 수치 해석법이 도입되어야만 한다. 용탕 내부의 기포 추적에 관한 연구 결과가 최근 보고되고 있지만 아직 그 수가 적고, 더욱 많은 연구가 요구 되어지고 있다[9~11].

이상(Two-Phase)유동, 혹은 다상(Multi-Phase)유동의 계산은 경계면을 어떻게 포착하는가에 따라 계산의 정확도면에 있어 약간의 차이를 보이고 있는데, 경계면을 포착하기 위한 기존 연구 방법을 살펴보면 크게 front tracking 방법과 front capturing 방법으로 나뉘어 진다[12].

경계면을 직접 추적하는 front tracking 방법은 상의 병합과 분리, 다차원으로의 확장 등에 어려움이 있어 최근에는 내재적인 함수를 사용하는 front capturing 방법이 보다 선호되고 있으며, 본 연구에서는 front capturing 방법 중 Hirt 와 Nichols 에 의해 제안된 Volume of Fluid 방법[13]이 사용되었다

본 연구의 목적은 다상 유동의 수치해석을 통한 기포결합 발생 위치의 추적과 이를 활용한 금형 주조 방안 설계 방법의 개발에 있다

2. 수치해석

2.1 지배방정식

3 차원, 비정상, 비압축성 Navier-Stokes 방정식을 가지고 섞이지 않는 이상유동에 관하여 고려하였다.

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 u + \rho g + F \quad (1)$$

여기서 F 는 단위부피 당 외력, g 는 중력가속도, t 는 시간을 나타낸다. μ , ρ , u , p 는 각각 점성계수와 밀도, 속도와 압력을 나타낸다.

대류항의 차분법에 있어서는 수치계산의 정확성을 높이기 위하여 Hybrid Scheme 을 사용하였다. 즉, 엇갈린 격자망(Staggered Grid System)에

서 보존형의 대류항을 중심차분(Central Differencing)과 풍상차분(Upwind Differencing)으로 각각 차분화 한 다음 이 두 가지 차분을 결합하여 Hybrid 차분 형태[6]로 유도하여 사용하였다.

2.2 자유 경계면 계산

VOF 방법은 밀도와 점성이 다른 다상의 섞이지 않는 유체의 경계면을 부피비 함수 $F(x, y, z, t)$ 로 정의한다.

$$\begin{cases} \rho = F\rho_1 + (1-F)\rho_2 \\ \mu = F\mu_1 + (1-F)\mu_2 \end{cases} \quad (2)$$

부피비 함수 F 는 경계면이 존재하는 곳에서 0 과 1 사이의 값을 가지며, 다음과 같은 대류방정식으로 구성된다.

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

여기서, u , v , w 는 유체의 속도를 나타낸다.

비압축성 유동장이므로, 식(3)은 부피비 함수 F 에 대해서 보존형 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial(uF)}{\partial x} + \frac{\partial(vF)}{\partial y} + \frac{\partial(wF)}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

비압축성 유동에서 부피의 보존은 곧 질량의 보존과 동일하므로 VOF 방정식은 질량 보존 법칙을 만족한다.

2.3 안정조건

전진차분법으로 차분화하여 계산하는 SOLA-VOF 법의 경우, 계산결과와는 경우에 따라 시간, 공간에 대한 값들이 진동, 발산하는 경우가 있다. 이를 통상 수치불안정이라고 하며 이들은 수치적으로 많은 오차를 가져오며 물리적으로 허용되지 않는 값들을 가지게 할 수 있다. 이러한 불안정한 값들을 발생하지 않게 하려면, 제어체적의 크기와 시간 전진분에 안정조건을 고

려하여 다음과 같이 time step 을 설정해야 한다.

첫째, 운동량은 하나의 time step 당 하나의 셀 이상을 이동할 수 없다. 이것은 차분방정식의 flux term 들은 오직 주변 셀들의 사이에서 자신의 셀에 대해서만 근사하고 있기 때문이다.

또한, 동점성계수(kinematic viscosity)가 0 이 아닐 경우 운동량은 하나의 time step 당 하나의 셀 이상을 확산해 나갈 수 없다. 선형 안정조건 해석(linear stability analysis)[14]에 의하여 이러한 diffusion number condition 을 해석하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta t < \frac{1}{2\nu} \cdot \frac{\delta x^2 \cdot \delta y^2 \cdot \delta z^2}{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2} \quad (5)$$

본 계산에서는 이와 같이 계산된 time step 제한조건 중에서 최소의 제한 조건을 사용함으로써 전체 계산에 대하여 안정적인 수치 해를 얻을 수 있었다.

3. 수치해석 결과

3.1 OIL BUBBLE DROPPING 문제를 활용한 수치해석 결과의 정확성 검증

새롭게 개발된 3 차원 two-phase 유동 해석 코드의 정확성을 검증하기 위해, Fig.1 과 같은 수치 모델을 선정하여 그 결과의 타당성을 검토하였다. 길이 방향으로 중앙 부위에 오목한 단차(段差) 부위를 두어 상단의 기름방울이 이 부분을 통과할 때 보이는 유동양상과 저면에 가라앉을 때 보이는 유체의 적층 양상을 단상(One Phase) 유동 해석 결과와 비교함으로써, 이상(Two Phase) 유동 해석 모듈 결과의 신뢰성을 검증하였다. 공기와 기름의 밀도비는 1:1.2 를 주었고 각각의 동점성계수는 동일하게 주었다. 해석영역의 격자수는 x, y, z 축에 대해 각각 20 x 20 x 60 으로 하였다.

Fig. 2와 Fig. 3은 각각 Oil Bubble의 부피비 함수 F 값을 시간대 별로 도식한 X-Z 단면 결과와, 3차원 Iso Surface 표시의 결과이다. 이 비교 해석에서 주목해야 할 점은 기름 방울이 바닥으로 떨어진 이후에 보이는 거동이다. 기름 방울은 바닥으로 떨어진 이후, 벽면을 타고 거의 중

앙 단차가 설치된 부분까지 상승하는 현상을 보이고 있는데, 1:1.2 정도의 밀도차를 가진 기름 방울이 직경의 2.5배 정도 높이에서 떨어졌을 때, 약 1000배의 밀도차를 가진 공기 중의 물방울이 떨어졌을 때 보이는 현상과 흡사한 현상을 보이는 결과에 대해서는 약간의 의문이 남는다. 자유 표면을 가진 유동 현상을 단상 해석법으로 계산 할 경우, 자유 표면에 대한 경계 조건의 선택에 따라 벽면을 타고 유체가 흘러가는 현상이 크게 변화하는 것을 관찰할 수 있는데, 이것은 단상 유동 해석의 경우 올바른 경계조건을 부여하기가 쉽지 않음을 보여주는 것이다.

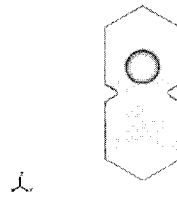


Fig. 1 Oil bubble model

Fig. 4와 Fig. 5의 다상 유동 해석 결과를 보면 기름방울이 바닥으로 떨어진 이후에 벽면을 타고 올라가는 높이가 단상 유동 해석의 결과와 비교해 아주 적음을 확인할 수 있다. 이것은 기름 방울이 낙하 함에 따라 상대 유체가 상승함으로써 저항력이 발생하여 낙하 속도가 줄어들기 때문이다. 또한, 단상 유동 해석 기법의 경우 자유경계면의 경계조건을 주변 제어체적의 값을 내삽하여 고려할 때 발생할 수 있는 미지 경계치 선택의 오류 가능성이, 자유경계면의 경계조건을 별도로 고려할 필요가 없는 다상 유동 해석 기법의 경우 배제되기 때문에 해석 결과의 정확성이 향상된 결과라 할 수 있다.

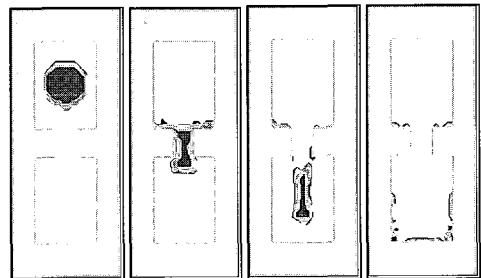


Fig. 2 X-Z Section results of oil bubble dropping : One-Phase flow simulations

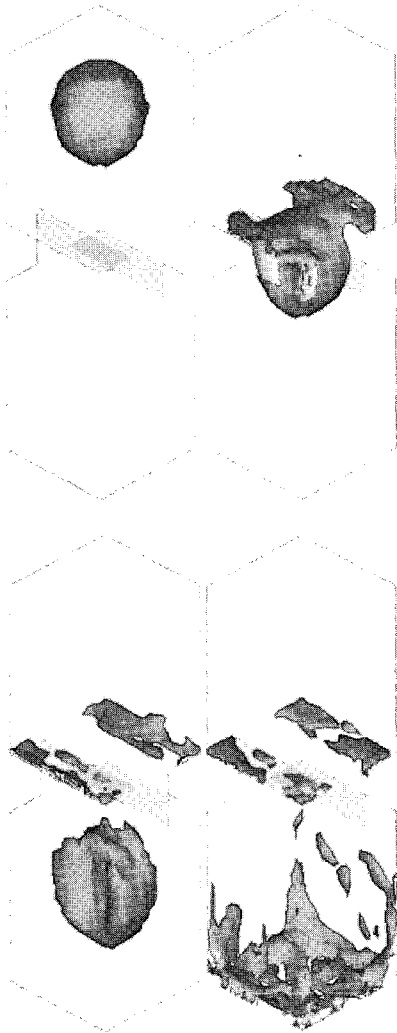


Fig. 3 Iso Surface of fluid fraction volume function
F values : One-Phase flow simulations

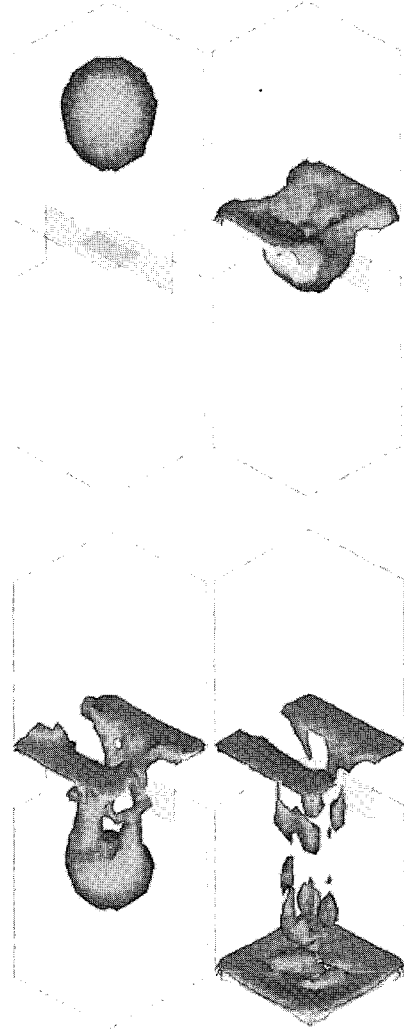


Fig. 5 Iso Surface of fluid fraction volume function
F values : Two-Phase flow simulations

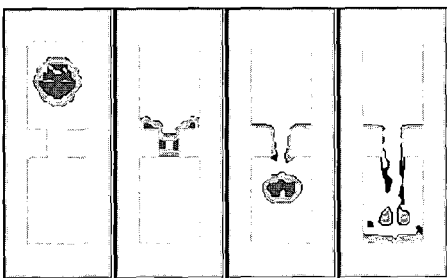


Fig. 4 X-Z Section results of oil bubble dropping :
Two-Phase flow simulations

3.2 TWO-PHASE MARKER 를 활용한 기포결함 예측 및 금형설계 기술 개발

다상 유동 해석기법을 고압 다이캐스팅(HP CD) 구조법에 활용할 경우, 기포 결함의 발생 위치를 수치 시뮬레이션을 통해 비교적 정확하게 예측할 수 있다. 공기가 충전된 캐비티 공간에 용탕이 충전되는 과정에서 용탕 내부에 발생된 기포는, 주위의 용탕으로부터 높은 압력을 받아 일부는 자연적으로 소멸되거나 외부로 유출되지만, 일부는 내부압이 높고 체적이 작은 기포로 남게 된다. 이러한 작은 기포는 일반적

으로 계산의 수렴성을 나쁘게 하여 전체 해석 시간이 길어지는 원인이 될 수 있으므로, 본 계산에서는 일정한 기준압을 넘어서는 작은 기포에 대해 위치 정보만을 알 수 있도록 질량이 없는 Marker 로 처리함으로써, two-phase 유동 해석 기법을 사용함에 있어 가장 큰 단점이 될 수 있는 계산 시간의 단축을 도모하였다

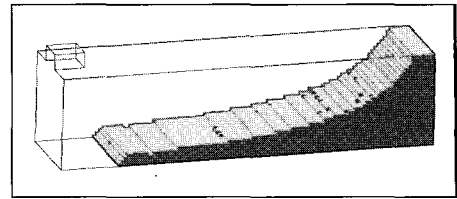
3.2.1 사각주 결합 예측

밀도비가 1:1000 인 물과 공기에 대해서 Marker 를 활용한 주조 결합을 예측해보았다. 격자수가 75x25x25 인 사각주에 물을 Y-Z 단면에서 주입시키고 시간에 따른 충전 양상을 나타내었다.

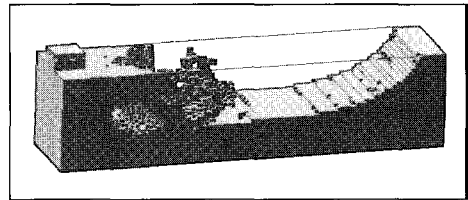
Y-Z 단면에서 들어온 물이 중력의 영향으로 사각주의 저면에 깔리며 충전이 된다. Fig. 6(b) 는 사각주의 60%가 충전된 그림으로 주입구 반대쪽 벽면에 도달한 물이 벽면에 강하게 부딪혀 윗 부분의 채워지지 않은 공간을 채우기 시작한다. 이 때 진행되는 물의 방향이 선회하면서 액적이 생성/분사되고, 공기와 혼재 되어 사각주 위쪽에 골고루 분포되는 것을 확인할 수 있다. 99%까지 충전이 이루어졌을 때 (Fig. 6(d))를 보면 곳곳에 기포가 분포하고 있는 것이 확인 가능하다. 하지만, 미충전 영역으로 남아있는 부분이 모두 기포 결합으로 남게 되는 것은 아니다. 내부압력이 작은 기포의 경우 주위의 용탕으로부터 받는 압력으로 인해 대부분 자연스럽게 소멸된다. 주조 할 때의 기포결합을 예측하기 위해서는 이러한 점을 충분히 고려하여 결합 위치를 예측하여야 한다.

Fig. 7은 이러한 기포결합의 특성을 고려하기 위해, 일정한 내부 압력 이상인 기포만이 결합 생성의 가능성이 높은 기포로 간주하고, 그러한 기포의 위치를 Marker를 통해 추적한 결과이다. 충전 후반부에 발생한 기포들 중 자연소멸 되지 못한 기포들이 표면뿐만 아니고 중앙 하부까지 침투하는 현상은, 유동 현상을 통해 예상된 결과와 잘 일치되고 있다.

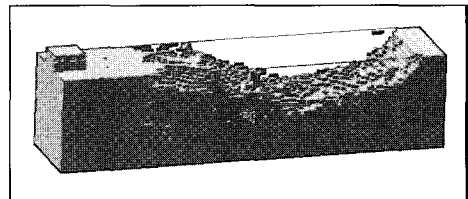
Fig. 8은 유동장의 속도벡터를 표시한 결과인데, 벡터 방향을 통해 공기 부분도 용탕 부분과 함께 타당하게 계산되고 있음을 확인할 수 있다.



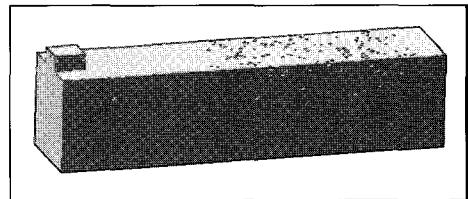
(a) 30% filled



(b) 60% filled



(c) 80% filled



(d) 99% filled

Fig. 6 Time history results of mold filling

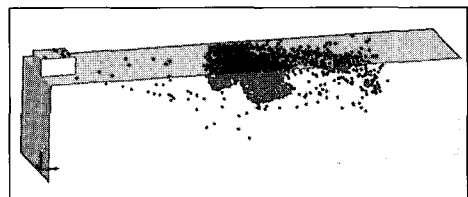


Fig. 7 Prediction result of gas porosity generation

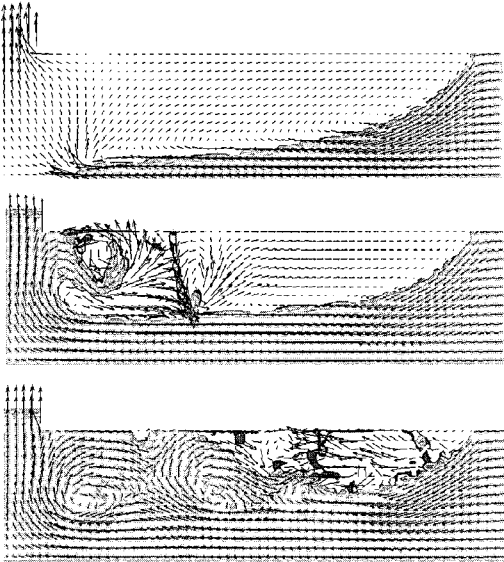


Fig. 8 X-Y Section flow velocity vector results

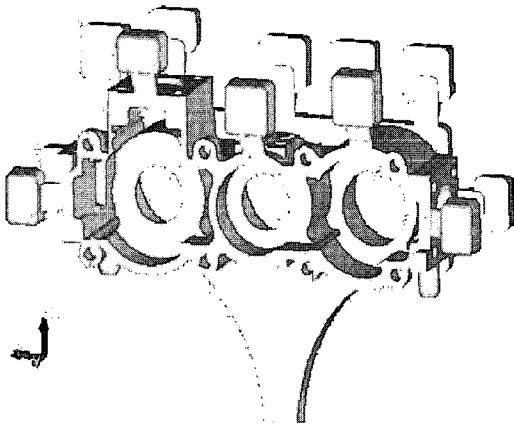


Fig. 9 Casting model

3.2.2 실주물의 기포결함 예측 및 실험 결과 비교

다상 유동 해석 솔버의 활용성을 검증하기 위해, 실제 주조 현장에서 생산되고 있는 주물품과 흡사한 형상을 임의로 선정하여 수치적으로 기포 결함을 예측 해 본 결과와 산업용 단층 촬영기(Industrial Computed Tomography)를 사용하여 실제품 내부의 기포 결함을 검색한 결과를 비교 검토하였다. 제품의 재질은 알루미늄합금으로 공기와의 밀도비가 약 1 : 2300 이었고, 사용된 격자 시스템은 격자수 약 500 만점의 등간격 격자이었다.

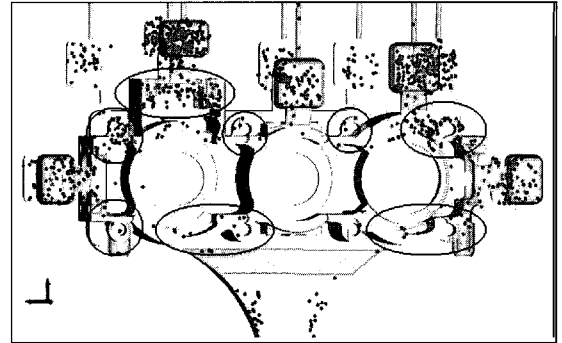


Fig.10 Prediction result of gas porosity generations

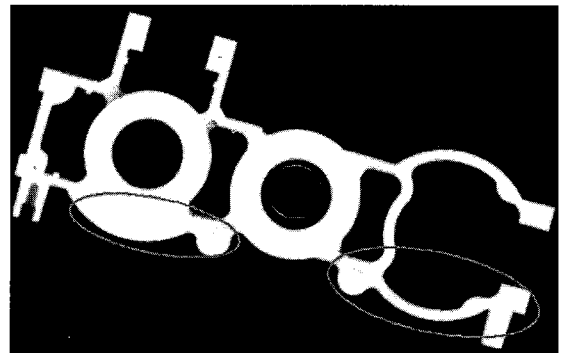
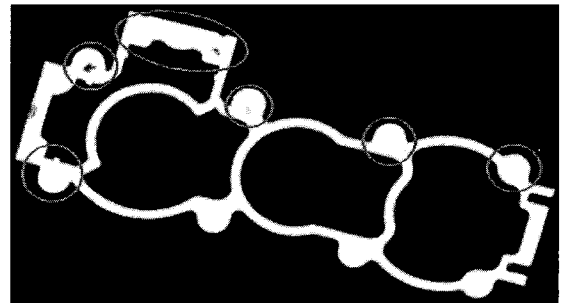


Fig.11 Scanning results of Industrial Computed Tomography

Fig. 9와 같은 형상의 주물에 대한 수치해석 결과(Fig.10) 대부분의 마커는 설치해 놓은 오버플로우(Over Flow) 쪽으로 밀려나가고, 그림 중에 원형으로 표시 해 놓은 부분이 제품 중에 남은 마커의 분포도가 높은 부분이다. 즉, 이러한 부분이 내부압이 높고 부피가 작은 기포가 집중되는 곳으로, 기포결함 발생의 가능성이 타 부분에 비해 높은 곳이라 할 수 있다. 이렇게 예

측된 수치 해석 결과와, 똑같은 주조 방안으로 생산된 실 주물의 내부 기포 결함 분포를 비교하기 위하여 산업용 단층 촬영기를 사용하여 내부를 투사한 결과가 Fig.11이다. 제품 중에 관찰되는 결함들 중에 모양이 많이 변형되고 크기가 크게 나타나는 결함은 대부분 응고수축에 의해 발생하는 결함이고, 비교적 크기가 작고 형태가 동그란 결함이 기포결함인데, 수치해석적으로 예측된 결과와 높은 일치도를 보이고 있음을 확인할 수 있다.

3.2.3 Two-Phase 결함 예측 모델을 활용한 금형 설계 방안 변경 예

본 장에서는 새롭게 개발된 기포결함 예측 모델을 활용하여, 실제 고압 다이캐스팅 공정으로 생산되는 제품에 대해 적용한 뒤, 그 예방 대책을 고안한 사례를 소개하도록 하겠다.

적용 대상 부품으로는 제품의 중앙 부위에 발생하는 기포결함으로 인해, 제품이 고객회사로부터 불량 판정을 받는 경우가 많아, 제품 생산업체가 주조 방안 개선에 고심하는 제품을 선정하였다. Fig.12에 나타낸 제품은 중앙 부위가 정밀 2차 절삭 가공되어지는 부위로서, 특히 이 부위의 기포결함 발생 억제 주조 방안이 요구되어지고 있는 제품이다.

본 연구에서는 기포결함의 제거를 위해, 컴퓨터 상에서 여러 종류의 오버플로우 및 게이트 방안을 모델링하고 설치한 후 다상 유동 수치 해석을 통해 기포결함 발생 위치 및 정도를 파악하여 최적의 방안을 도출해 내는 방법을 고용하였다.

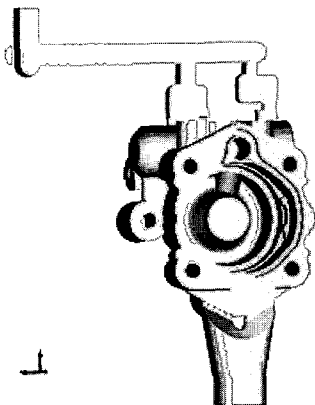


Fig.12 Casting model

Fig.13, Fig.14 는 새롭게 고안된 주조 방안을 적용시킨 후, 수치 해석적으로 기포결함의 발생을 예측한 한 예이다. 해석 결과를 고찰해 보면 제품의 상부에 새롭게 적용시킨 오버플로우에는 많은 마커가 집중적으로 몰리고 그 외의 오버플로우에는 비교적 많지 않은 마커가 포집되는 것으로 미루어, 상부의 오버플로우 외에는 그 역할을 충분히 하고 있지 못 함을 알 수 있다. 불필요한 오버플로우의 적용은 회수율의 저하를 초래하므로, 상부 오버플로우만 남기고 나머지는 제거하는 것이 이 제품의 경우 유리 할 것으로 판단되었다.(Fig.15)

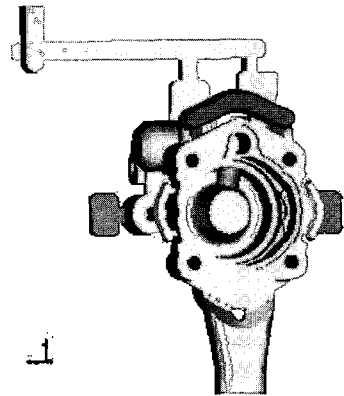


Fig.13 Adapted several over flows

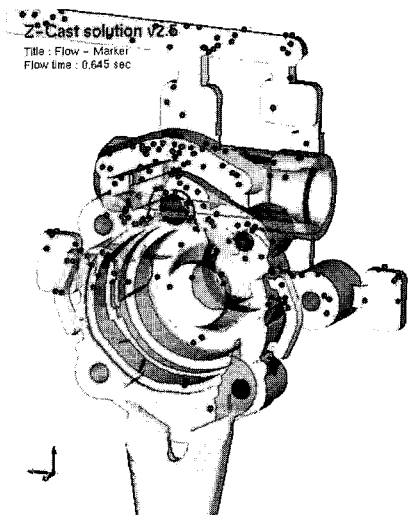


Fig.14 Prediction result of gas porosity generations

이 외에도 여러 방안을 고안하여 적용시켜 보았으나, 중앙부위의 기포결함을 제거하는 데에는 커다란 역할을 하지 못하는 것으로 판단되어, 최종 구조방안으로는 상부의 오버플로우만을 남기고, 제품의 중앙 부위에 Squeeze pin 을 적용시켜 용탕이 반응고 된 상태에서 강한 외부압력으로 내부에 발생된 기공을 제거하는 방법을 채택하여 제품의 불량 발생률을 획기적으로 감소시켰다.(Fig.16)

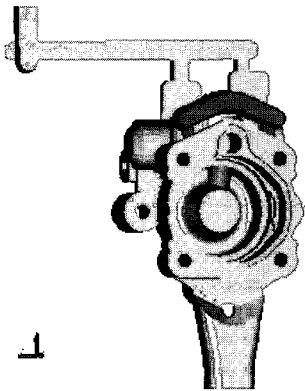


Fig.15 Adapted only one over flow

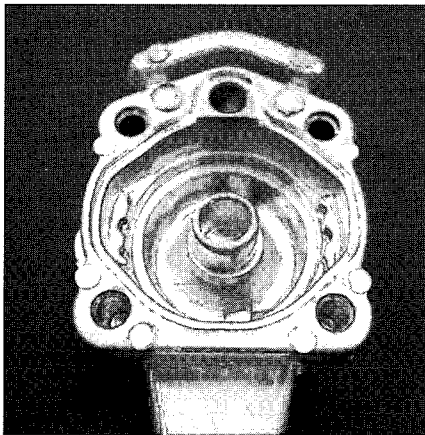


Fig.16 Final casting system

4. 결 론

짧은 시간 안에 주물을 대량 생산할 수 있는 장점을 가진 고압다이캐스팅(HPDC) 구조법에

있어서 가장 큰 문제점이라 할 수 있는 기포결함의 발생 위치와 정도를 수치 해석적으로 정확하게 예측할 수 있는 다상 유동 해석 솔버를 개발하여 그 정확도와 효율성을 검토한 결과 다음과 같은 몇 가지 결론을 얻었다.

(1) 먼저 실험 결과와의 비교를 통해 새롭게 개발된 다상 유동 솔버 해석 결과의 타당성을 검토해 본 결과, 두 결과가 매우 만족스럽게 일치됨을 알 수 있었다.

(2) Two-Phase 유동해석 마커를 활용한 기포결함 예측 모듈은 구조방안 설계 시 많은 도움을 줄 수 있는 모듈로써, 실제 생산되고 있는 제품의 오버플로우 및 기타 방안 변경에 적용시켜 좋은 결과를 얻었다.

(3) 수치해석적 기포결함 예측 모듈을 활용할 경우 인공지능형 최적 구조방안 설계가 가능함을 본 연구를 통해 확인할 수 있었다. 즉, 인공지능형 최적 설계를 위해서는 제어 대상이 되는 목적함수를 정해야 하는데, 기포결함 예측 마커를 활용할 경우 정량적인 불량률을 정의하는 것이 가능하고, 이 불량률을 목적함수로 하는 인공지능형 최적설계가 가능하여 진다. 이에 관한 자세한 연구는 현재 진행 중이며, 근 시일 내에 결과를 보고할 수 있으리라 생각된다.

$$\text{불량률} = \frac{\text{제품내부 잔존 마커수}}{\text{총마커발생수}} \times 100$$

후 기

다상 유동 해석 솔버의 적용에는 ㈜큐빅테크의 Z-CAST 가 사용되었고, 본 연구는 산업자원에서 시행한 중기거점 개발사업에 의해 수행되었다.

참 고 문 헌

- [1] K. Fukizawa, H. Shiina, 1992, J. Soc. Auto. Eng. Jpn. 46(5), p. 66.
- [2] A. Kaye, A. Street, 1982, Die Casting Metallurgy, Butterworths, London, pp. 231~235.
- [3] J. E. Welch, F. H. Harlow, J. P. Shannon, B. J.

- Daly, 1966, The MAC Method: A computing Technique for solving viscous, incompressible, transient fluid flow problem involving free surfaces, Tech. Report LA-3425, Los Alamos Scientific Laboratory.
- [4] A. A. Amsden, F. H. Harlow, 1970, The SMAC Method: A numerical technique for calculating incompressible flows, Tech. Report LA-4370, Los Alamos Scientific Laboratory.
- [5] C. W. Hirt, B. D. Nichols, N. C. Romero, 1975, SOLA-A numerical solution algorithm for transient fluid flow, Tech. Report LA-5852, Los Alamos Scientific Laboratory.
- [6] C. W. Hirt, B. D. Nichols, R. S. Hotchkiss, 1980, SOLA-VOF : A solution of algorithm for transient fluid flow with multiple free boundaries, Tech. Report LA-8355, Los Alamos Scientific Laboratory.
- [7] W. S. Hwang, R. A. Stoehr, 1983, Fluid flow modeling for computer aided design of casting, *J. Metals*, Vol. 35, pp. 22~30.
- [8] Jin-Young Park, Eok-Soo Kim, Ik-Min Park, 2004, Die casting process design of automobile gear housing by metal flow and solidification simulation, *J. Korean Foundrymen's Society*, Vol. 24, pp. 347~355.
- [9] N. Kubo, T. Ishii, J. Kubota, N. Aramaki, 2002, Two-phase flow numerical simulation of molten steel and argon gas in a continuous casting mold, *ISIJ international*, Vol. 42, No. 11, pp. 1251~1258.
- [10] A. Caboussat, M. Picasso, J. Rappaz, 2005, Numerical simulation of free surface incompressible liquid flows surrounded by compressible gas, *J. Comput. Phys.*, Vol. 203, pp. 626~649.
- [11] Jun-Ho Hong, Young-Sim Choi, Ho-Young Hwang, Jeong-Kil Choi, 2004, Comparison study of volume-tracking methods for multi-phase flow, *Proc. Modeling of Casting and Solidification Processes VZ*, August 8-11, Kaohsiung, Taiwan, pp. 99~106.
- [12] E. Delnoij, J.A.M. Kuipers, W.P.M. van Swaaij, 1997, Computational fluid dynamics applied to gas-liquid contactors, *Chemical Engng. Sci.*, Vol. 52, pp. 3623~3638.
- [13] C. W. Hirt, B. D. Nichols, 1981, Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries, *J. Comput. Phys.*, Vol. 39, pp. 201~225.
- [14] C. W. Hirt, 1968, Heuristic stability theory for finite-difference equations, *J. Comput. Phys.*, Vol. 2, pp. 339~355.