大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 15 卷 第 2 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XV, No.2, 131-145. May 2005

삼각형의 결정조건과 합동조건에 대한 교수학적 분석[1)]

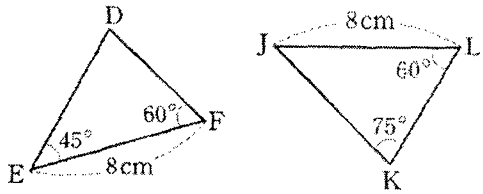
임 재 훈*

이 논문은 중고등학교 학생들과 예비수학교사를 대상으로 삼각형의 결정조건과 합동조건에 대한 이해의 양상의 일단을 조사하고, 삼각형의 결정조건과 합동조건에 대해 교수학적으로 분석한 것이다. 연구 결과의 일부를 제시하면 다음과 같다.

첫째, 삼각형의 6요소 구하기 학습 지도시 중학교에서 배운 삼각형의 결정조건이 지닌 의미를 재음미할 기회를 제공해야 한다. 둘째, 무엇을 삼각형의 결정조건으로 볼 것인가는 결정조건을 탐구하는 맥락에 따라 달리 판단될 수 있는 문제이다. 셋째, 삼각형의 결정조건이 지닌 최소필수성을 인식할 수 있게 하는 교재 구성과 학습 지도가 필요하다. 넷째, 합동에서 '대응'의 중요성을 인식하게 하는 학습 지도가 필요하며, 삼각형의 합동조건에서 '대응하는' 이라는 표현이 지닌 문제점을 해소하는 방안을 모색할 필요가 있다.

Ⅰ. 서 론

삼각형의 결정조건과 합동조건은 우리나라 학교수학 기하 영역의 주요한 내용이다. 삼각형의 결정조건으로부터 합동조건이 따라 나오므로, 두 조건은 밀접한 관련이 있다. 학생들은 삼각형의 합동조건을 문제 해결에 자주 사용한다. 그렇지만 삼각형의 결정조건과 합동조건에 대해 제대로 이해하고 있지 못한 경우가 있다. 다음 [그림 I-1]의 두 삼각형이 합동인가라는 물음에 "주어진 것은 SSS, SAS, ASA가 아니므로 합동이 아니다."라고 하는 학생은 삼각형의 합동조건을 기계적으로 단순 적용하는 수준에 머물러 있는 것이다.



[그림 I-1]

학교수학 내용에 대한 깊은 이해는 수학 수업의 질에 결정적인 영향을 미친다(Ma, 1999). 삼각형의 결정조건이나 합동조건과 같은 학교수학의 내용에 대한 분석적 논의는 이러한 이해에 기초한 수학 수업의 사전 조건이 되므로 중요하다.

González(1999)에 의하면, 수학교육 연구를 위해서는 수학적 지식을 중심으로 어떤 요인이 어떻게 작용하고 있는지에 대한 사전 분석이 필요하다. González는 이를 위해 교수학적 분석(didactical analysis), 즉 교육 체제 내에서 수학 내용을 가르치기에 적절하도록 조직하는데 도움이 되도록 수학 내용을 분석하는 작업이 필요하다고 한다. 우정호(Woo, 2004)에 의하면,

* 경인교육대학교, jhyim@ginue.ac.kr
1) 본 연구는 2003년도 경인교육대학교 학술연구지원에 의하여 연구되었음.

교수학적 분석은 학교수학을 열어 교육적으로 의미 있는 지식으로 파악하는 것이다. 이와 같은 교수학적 분석은 학교수학의 지식의 본질을 이해하고, 그에 기초하여 현실을 평가하고 문제점을 인식하고 개선 방안을 모색하는데 중요한 역할을 한다.

학교수학의 내용에 관한 분석적 논의의 중요성에 비추어 볼 때, 중학교 수학 교과서의 삼각형의 결정조건 기술에 대한 최노성(2002)의 문제 제기와 이에 대한 응답으로 볼 수 있는 박선용과 권석일(2004)의 논의는 긍정적으로 평가할 수 있다. 최노성은 교과서에 제시된 삼각형의 결정조건은 삼각형이 결정되기 위한 필요조건이 아님에도 불구하고, 여러 교과서들은 이것을 필요충분조건으로 잘못 기술하고 있다는 문제를 제기하였다. 이에 대해 박선용과 권석일은 삼각형의 결정조건은 삼각형이 결정되기 위한 필요충분조건이라는 견해를 제시하였다.

이 연구는 두 선행 연구의 후속 연구의 성격을 지닌다. 이 연구에서는 SSS, SAS, ASA의 필요충분성에 대하여 논의하되, 두 선행 연구와는 다른 관점에서 논의한다. 또, 삼각형의 성립과 삼각형의 결정, 삼각형의 6요소 구하기와 삼각형의 결정이라는 두 논점에 대해서도 논의한다. 이 두 논점은 중등 예비 수학 교사들과 중고등학교 학생들을 대상으로 삼각형의 결정조건에 관한 이해의 양상을 조사한 결과로부터 포착된 것이다.

끝으로 삼각형의 결정조건과 합동조건의 차이에 대하여 논의한다. 이러한 논의에는 교과서의 관련 내용에 대한 비판적 분석이 포함된다.

II. 본 론

1. 삼각형의 결정과 삼각형의 성립[2]

2005년 3월 ○○광역시 소재 중학교 2학년 2개반 학생 76명을 대상으로 '두 변의 길이와 두 각의 크기가 주어지면 삼각형은 하나로 결정되는가?'[3]라는 물음에 '예'나 '아니오' 중 하나로 답하고, 그 이유를 쓰게 하였다. 조사 결과 '예'는 57명, '아니오'는 17명이었고, '예'와 '아니오' 모두에 답한 학생 2명이었다.

'예'라고 응답한 학생들이 제시한 이유로는 '나머지 각 한 개를 알 수 있기 때문(16명), 'ASA 또는 SAS가 된다(5명)' 등이 있었다. 단순히 '나머지 각 한 개를 알 수 있기 때문'이라고 진술한 경우도 있었으나, [그림 II-1]과 같이 나머지 각 한 개를 알면 SAS 조건이 성립한다고 명시한 응답도 있었다. 주어진 두 각 중 하나가 두 변의 끼인각이면 당연히 SAS이고, 주어진 두 각이 모두 끼인각이 아니라도 나머지 각 한 개를 알면 그것이 끼인각이 되어 결국 SAS가 된다는 것이다.

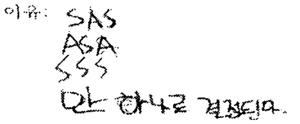
이유: 두각을 알면 나머지 각 1개를 알수 있으므로 SAS조건이 성립된다,

[그림 II-1] '예'라고 응답한 중학생이 제시한 이유

'아니오'로 답한 학생들이 제시한 이유로는 'SSS, SAS, ASA가 아니다(6명), '끼인각이 아닐 수 있다(3명), '삼각형이 만들어지지 않을 수 있다(2명), 여러 개 나온다(1명) 등이 있었다. [그림 II-2]와 같이, SSS, SAS, ASA가 아니기

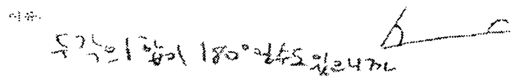
2) 삼각형의 결정은 주어진 조건을 만족하는 삼각형이 하나로 결정되는지를, 삼각형의 성립은 주어진 조건을 만족하는 삼각형이 있을 수 있는지를 문제로 삼는다.
3) 이 질문에서 '변'과 '각'이라는 용어를 사용하고 있으므로, 이 질문의 의도는 삼각형의 성립은 가정하고 다만 삼각형이 하나 결정되는지 여부를 묻는 것이다.

때문에 안 된다는 응답은 삼각형의 결정조건에 대한 피상적인 이해의 양상을 보여준다.



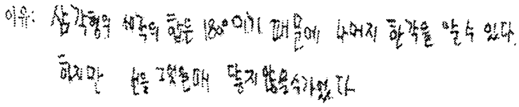
[그림 Ⅱ-2] '아니오'에 응답한 이유의 예 1

'아니오'로 답한 학생들 중에는, [그림 Ⅱ-3]과 같이, 삼각형이 성립하지 않을 수 있기 때문에 결정되지 않는다는 이유를 제시한 경우도 있었다.



[그림 Ⅱ-3] '아니오'에 응답한 이유의 예 2

'예'와 '아니오' 모두에 응답한 학생들도, [그림 Ⅱ-4]에서 볼 수 있는 바와 같이, 삼각형의 결정을 고려할 때 삼각형의 성립을 심각히 고려하는 양상을 보이고 있다. 이로부터 일부 학생들은 삼각형의 결정을 고려할 때 삼각형의 성립을 중요하게 고려함을 알 수 있다.



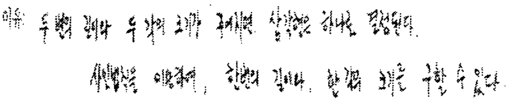
[그림 Ⅱ-4] '예'와 '아니오' 모두에 응답한 이유의 예

동일한 문제를 서울과 지방광역시에 소재한 두 대학의 수학교육과의 '수학교육론' 수강생 87명에게 제시하고 답하게 하였다. 조사 결과 '예' 52명, '아니오' 35명으로 나타났다. 또 중학생들은 이유를 제대로 적지 못한 경우가 많았지만, 예비수학교사들은 대부분 다음과 같이 분류 가능한 이유를 제시하였다.

<표 Ⅱ-1> '예'라고 답한 예비수학교사들이 제시한 이유

	이 유	응답자수
유형 1	삼각형의 내각의 크기의 합을 이용해 나머지 한 각을 구하면 SAS이다	14
유형 2	나머지 한 각과 한 변을 구할 수 있다.	14
유형 3	SAS 또는 ASA가 된다.	7
유형 4	세 각과 두 변은 삼각형을 결정한다.	7

앞에서 중학생들이 나머지 한 각을 구할 수 있다고 답한 것에 비해, 예비수학교사들은 다음 [그림 Ⅱ-5]와 같이, 사인법칙을 알고 있으므로 나머지 한 각과 한 변을 구할 수 있다고 답하였다.



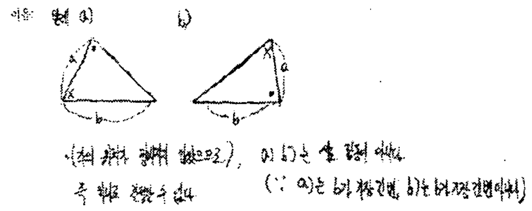
[그림 Ⅱ-5] 유형 2의 이유

'아니오'라고 답한 예비수학교사들이 제시한 이유는 <표 Ⅱ-2>와 같이 분류할 수 있다.

<표 Ⅱ-2> '아니오'라고 답한 예비수학교사들이 제시한 이유

	이 유	응답자수
유형 5	SSS, SAS, ASA에 해당하지 않음	4
유형 6	주어진 각이 끼인각인지 사잇각인지 모름	5
유형 7	조건을 만족하는 삼각형이 두 개 이상 있을 수 있음	11
유형 8	삼각형이 만들어지지 않을 수 있음	10

유형 7의 이유를 제시한 응답자들 중 몇 명은 다음과 같이 조건을 만족하는 삼각형이 두 개 있을 수 있다는 것을 그림을 그려 보이고자 하였으나 성공하지 못했다.



[그림 Ⅱ-6] 유형 7의 이유

[그림 Ⅱ-7]과 같이, 삼각형이 성립하지 않을 수 있다는 응답은 앞의 중학생 대상의 조사에서도 나타났던 것으로, 예비수학교사 대상의 조사에서는 더 많이 나타났다. 조건을 만족하는 삼각형이 두 개 이상 있을 수 있다고 기술한 예비수학교사들의 수와 거의 같은 수의 예비수학교사들이 이 이유를 제시하였다.

[그림 Ⅱ-7] 유형 8의 이유

중학생과 예비수학교사들을 대상으로 한 조사 결과에서 볼 수 있듯이, '삼각형의 결정'을 생각할 때 '삼각형의 성립' 여부를 심각하게 고려하는 양상은 중학교 교과서에서 삼각형의 결정조건을 다루는 방식과 관련 있는 것으로 보인다. 중학교 교과서에서 삼각형의 결정조건은 대체로 다음과 같은 형태로 기술된다(조태근 외, 2002 등).

1. 세 변의 길이가 주어질 때
2. 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어질 때
3. 한 변의 길이와 그 양끝각의 크기가 주어질 때

대부분의 교과서에서 조건 1과 관련하여 두 변의 길이의 합이 나머지 한 변의 길이보다 클 경우에 성립한다는 내용을 중요하게 다룬다. 또 일부 교과서에서는 조건 2, 3과 관련된 '끼인각의 크기는 180°보다 작다', '양 끝각의 크기의 합이 180°보다 작다'라는 전제 조건을 제시한다(배종수 외, 2002).

박선용과 권석일(2004: 441)은 '두 변의 길이의 합이 나머지 한 변의 길이보다 크다'와 같은 제한 사항은 '삼각형의 세 변의 길이가 주어질 때'라는 표현 속에 이미 전제되어 있는 것이라고 지적하였다. 이 관점에서 보면, 교과서에 나오는 '삼각형의 세 변의 길이가 주어져도 두 변의 길이의 합이 나머지 한 변의 길이보다 작거나 같을 때에는 삼각형이 하나로 결정되지 않는다'와 같은 진술은, 삼각형이 하나로 작도되는지를 판단하게 하기 위한 친절한 배려일 수 있으나, 논리적으로는 불필요한 군더더기이다.

그런데, '두 변의 길이의 합이 나머지 한 변의 길이보다 크다'와 같은 표현이 나타내고 있는 내용의 위치는 결정 탐구 맥락에서 처음에 주어지는 것을 삼각형의 세 변으로 볼 것인지 세 선분으로 볼 것인지에 따라 달라질 수 있다. 삼각형이 결정되는지를 알아보는 상황에서 처음에 이미 삼각형을 이루도록 수치가 조정되어 있는 세 변이 주어진 것으로 보는 것보다 세 선분이 주어진 것으로 보는 것이 자연스럽다. 처음에 주어진 것이 세 선분이라면, 주어진 세 선분으로 삼각형을 몇 개 만들 수 있는지 못지않게 과연 삼각형이 만들어질 수 있는지가 중요한 문제가 된다.

삼각형의 결정조건과 합동조건은 둘 다 SSS, SAS, ASA로 차이가 없는 것으로 보이지만, 탐

구 맥락에서 볼 때 결정조건의 상황과 합동조건의 상황은 다르다. 합동을 탐구하는 맥락에서는 두 삼각형이 주어지므로 세 '변'이 주어지지만, 결정을 탐구하는 맥락에서 처음에 주어지는 것은 삼각형이 성립하도록 수치가 조정되어 있지 않은 상태의 세 개의 '선분'이다. 그러므로 합동 맥락에서는 문제가 되지 않는 삼각형의 성립 여부가 결정 맥락에서는 문제가 된다. 처음에 주어지는 것을 변이 아닌 선분으로 보는 것이 삼각형의 결정조건의 고유의 관심을 더 잘 드러낸다.

이렇게 보면 결정조건에 변이라는 용어를 쓰는 것은 당연하지 않고 '변'이라는 용어를 쓰면서 '두 변의 길이의 합이 나머지 한 변의 길이보다 크다'와 같은 성립조건을 강조해서 다루거나 병기하는 것은 어색하게 보일 수 있다. 사실 합동조건과 구분되는 결정조건 고유의 관심을 드러내는 데는

1. 세 선분의 길이가 주어질 때(두 선분의 길이의 합이 나머지 한 선분의 길이보다 크다)
2. 두 선분의 길이와 그 끼인각[4]의 크기가 주어질 때(끼인각의 크기는 180°보다 작다)
3. 한 선분의 길이와 그 양끝각[5]의 크기가 주어질 때(양끝각의 크기의 합이 180°보다 작다)

와 같이 '변'이 아닌 '선분'이 주어지는 것으로 기술하는 것이 더 나은 면이 있다. 그러나 이 경우 단순히 '끼인각', '양끝각'이라고 하는 것이 적절한지가 문제가 될 수 있다. 교과서에서 삼각형의 결정조건을 기술할 때 '변'이라는 표현을 쓴 것은 '끼인각', '양끝각'이라는 간단한 표현을 자연스럽게 사용하기 위한 고려의 결과일 수 있다.

2. 삼각형의 결정과 6요소 구하기

2005년 3월 ○○광역시 소재 일반계 고등학교 2학년 이과반 64명의 학생들을 대상으로 '한 변의 길이와 세 각의 크기가 주어지면, 삼각형은 하나로 결정되는가?'라는 문제에 대해 '한 변의 길이와 세 각의 크기가 주어지므로, 예를 들어 한 변의 길이 a와 세 각의 크기 A, B, C가 주어졌다고 하자. 그러면 사인 법칙 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$를 이용하여 나머지 두 변의 길이 b와 c를 구할 수 있다. 따라서 삼각형의 6 요소가 각각 하나의 값으로 결정된다. 따라서 삼각형은 하나로 결정된다.'는 생각이 옳은지 그른지 답하고 그 이유를 쓰게 하였다. 조사 결과 '옳다' 25명, '옳지 않다' 39명으로 나타났다. 이유를 제대로 제시하지 못한 학생이 많았으며, '옳지 않다'는 이유로는 '여러 개가 나올 수 있다(6명)', '사인법칙은 직각삼각형일 때 쓰인다(4명)', '정삼각형일때만 성립한다(3명)', '세 각의 크기의 합이 180도라는 말이 없다(3명)' 등이 있었다.

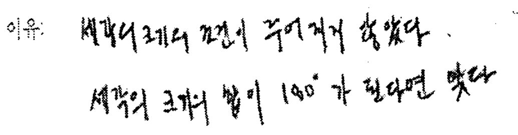
앞의 예비수학교사들에게 동일 문제를 제시하고 답하게 하였다. 조사 결과 '옳다' 36명, '옳지 않다' 51명으로 나타났다. '옳지 않다'고 답한 이유를 정리하면 <표 Ⅱ-3>와 같다.

<표 Ⅱ-3> '옳지 않다'라고 답한 학생들이 제시한 이유

	이 유	응답자수
유형 9	주어진 한 변 a에 대응하는 각이 무엇이 될지 모른다	23
유형 10	반례 제시	6
유형 11	삼각형의 성립을 가정한 것은 잘못이다	3
유형 12	사인법칙을 사용하여 삼각형의 결정 여부를 알아보면 안 된다	4

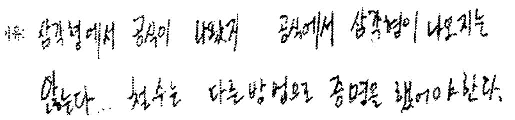
4) 주어진 두 선분의 끝점을 이었을 때 만들어지는 사잇각
5) 주어진 한 선분의 양끝에 위치할 각

유형 11은 삼각형의 성립과 관계된 것으로, "세 변의 길이를 알더라도 가장 긴 변의 길이가 나머지 두 길이보다 커야 하므로, 세 변의 길이를 구했다 하더라도 삼각형이 결정된다고 볼 수 없다.", "세 각의 조건이 주어지지 않았다. 세 각의 크기의 합이 180°가 된다면 맞다."와 같은 의견이 있었다. (삼각형의 성립에 대해서는 앞에서 논의하였으므로 여기서는 재론하지 않는다.)



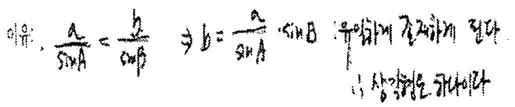
[그림 Ⅱ-8] 유형 11의 이유

삼각형의 결정 여부를 사인법칙을 써서 알아봐서는 안 된다는 유형 12의 이유의 예로는 <그림 Ⅱ-9>에 제시된 것이나 "사인 법칙은 삼각형이 결정되고 나서 생겨난 정리이다. 즉 사인 법칙의 전제 조건은 삼각형 ABC가 존재하여 각 변의 길이가 a, b, c 일 때 성립하므로, 위와 같이 아직 전제 조건이 만족하지 않은 상태에서 사인법칙을 쓸 수 없다."와 같은 것이 있었다.



[그림 Ⅱ-9] 유형 11의 이유

'옳다'라고 답한 학생들 중에는 이유를 쓰지 않은 학생들이 많았다. 학생들이 제시한 이유로는 "삼각형의 6요소를 결정하는 계산 과정이 틀리지 않았다.", "사인법칙은 증명된 법칙이므로 위와 같은 생각이 타당하다고 생각한다."와 같은 것이 있었다.



[그림 Ⅱ-10] '옳다'라고 답한 이유의 예

이상의 결과는 사인법칙이나 코사인법칙을 사용해 삼각형의 결정을 알아보는 것에 대해 상이한 판단이 학생들 사이에 존재함을 보여준다. 사인법칙을 삼각형의 결정 여부를 판단하는데 사용하는 것을 정당한 것으로 생각하는 학생들이 있는 반면, 그것이 정당하지 않다고 생각하는 학생들도 있다.

Ma(1999: 122)는 학교수학을 깊이 이해하고 있는 교사의 수업에서는 연관성, 다양한 접근, 기본적인 아이디어, 종적 일관성의 특성이 발견된다고 하였다. 그에 의하면, 학교 수학의 종적 일관성을 깊이 이해한 교사들은 특정 학년이 배워야 할 지식만 지닌 것이 아니라, 교육과정 전체를 이해하고 학생들이 이전에 배운 중요한 개념을 복습할 기회가 찾아오면 그것을 놓치지 않는다. 삼각형의 6요소가 하나로 정해지는 상황과 삼각형의 결정 상황을 완전히 같은 것으로 보는 현상, 사인법칙이나 코사인법칙을 사용해 삼각형의 결정을 알아보는 것에 대해 상이한 판단이 존재하는 현상은 삼각형의 결정조건 지도에 있어 종적 일관성에 더 충실한 교육의 필요성을 제기한다.

고등학교 10단계의 삼각형의 6요소 구하기는, 종적 일관성 면에서 볼 때, 중학교에서 학습한 삼각형의 결정조건에 대한 반성과 재음미가 이루어질 수 있는 기회이다. 고등학교에서 삼각형의 6요소 구하기 학습 지도시 단지 공식을 적용해 6요소를 구하는 것에 그치게 하지 말고, 그 과정에서 중학교에서 배운 삼각형의 결정조건이 지닌 의미를 반성할 수 있는 기회

를 제공해야 한다. 예를 들어, SSS, SAS, ASA가 논리적으로 서로 서로를 함의하고 있다는 것을 의식하게 해야 할 것이다. 또, 삼각형의 6요소 구하기와 중학교의 삼각형의 결정조건 사이의 차이점도 알게 해야 할 것이다. '옳다'고 답한 학생들은 '한 변의 길이와 세 각의 크기가 주어졌다'는 것을 '한 변의 길이 a와 세 각의 크기 A, B, C가 주어졌다'로 바꾸는 대목의 차이점에 주의하지 못하고 있다. 한 변의 길이와 세 각의 크기가 주어진 것과 a, A, B, C가 주어진 것은 다르다. 고등학교에서 사인법칙이나 코사인법칙이 사용되는 상황은 A, B, C, a, b, c라는 기호를 사용하는 상황이므로 위치가 지정된 상황으로, 한 변과 세 각이 주어진 상황은 위치가 지정되지 않은 상황으로 볼 수 있다. 이와 같은 두 상황의 차이를 반성할 수 있는 기회를 제공해야 한다.

한편, 위치가 지정된 상황과 위치가 지정되지 않은 상황은 SSS, SAS, ASA라는 삼각형의 결정조건의 필요충분성 문제에 관한 새로운 관점을 시사한다. 다음 절에서 이에 대해 논의한다.

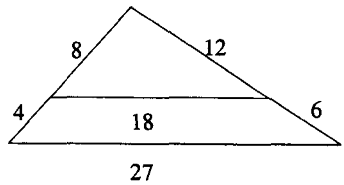
3. 탐구 맥락과 삼각형의 결정조건

SSS, SAS, ASA라는 삼각형의 결정조건 및 합동조건은 최소조건 또는 최소필수성이라는 것이 그 본질이다(최노성 2002; 박선용과 권석일 2004; Eggleton, 2001). Eggleton(2001)은 철골 구조물 제작 회사에 근무하는 한 게으른 사원이 삼각형 모양의 철골 구조물이 정확히 같은 모양인지 가능한 적게 재고 알아보는 방법을 찾는 상황'을 삼각형의 합동조건 지도의 도입 상황으로 사용하고 있다. 이 상황은 삼각형의 합동조건이 최소조건으로서 지닌 실용적 유용성을 보여주는 상황이다.[6]

최소필수성은 합동조건뿐 아니라 결정조건의 본질이다. 중학교 교과서에서는 삼각형의 결정조건이나 합동조건이 최소조건이라는 점을 언급하기도 한다(금종해 외, 2002; 이준열 외, 2002; 황석근과 이재돈, 2002 등).

그러나 탐구 활동이나 내용 구성에서는 최소조건이라는 것이 충분히 드러나지 않는다. 주어진 조건에 따라 삼각형을 작도해 삼각형이 하나 만들어짐을 확인하는 것과 같은 활동으로는 결정조건이 최소조건이라는 것이 충분히 드러나지 않는다.

결정조건을 찾는 것은 '주어진 탐구 맥락에서' 최소조건을 찾는 것이다. 결정조건은 탐구 맥락에 의존한다. 요소의 개수만 고려하는 탐구 맥락에서는 두 선분과 세 각처럼 5개의 요소가 주어져도 삼각형이 하나로 결정되지 않을 수 있다(Movshovitz-Hader & Well, 1998: 65-69).



[그림 Ⅱ-11] 5개의 요소가 같은 두 삼각형

주어진 요소의 개수만 문제로 삼는 탐구 맥락에서는 본질상 세 선분만이 삼각형의 결정조건이 된다.[7]

---

6) 우리나라 초등학교 교과서에서는 자와 각도기, 컴퍼스를 이용한 작도를 통해 합동조건을 지도한다(교육인적자원부, 2002). 요점은 한 변을 내려 놓은 다음 나머지 한 점의 위치가 결정되는지를 보는 것이다. 중학교에서도 초등학교와 마찬가지로 작도 맥락에서 결정조건이 도입된다. 초등학교와 중학교 교과서를 보면, 삼각형의 합동조건이 최소 조건이며 실생활에서 어떻게 유용한지 알게 하는 도입 맥락이 불충분하다.

7) 다음 <표 Ⅱ-4, 5>에서 삼각형의 성립은 가정한다. <표 Ⅱ-5>에서 a는 A의 대변을 뜻한다.

<표 Ⅱ-4> 주어진 요소의 개수만 고려하는 맥락에서 결정조건

주어진 요소의 개수	주어진 요소	삼각형의 결정 여부
1	한 선분/ 한 각	결정되지 않음
2	두 선분/한 선분, 한 각/ 두 각	결정되지 않음
3	세 선분	결정됨
	두 선분, 한 각 / 한 선분, 두 각 / 세 각	결정되지 않음
4	세 선분, 한 각	결정됨
	두 선분, 두 각 / 한 선분, 세 각	결정되지 않음
5	세 선분, 두 각	결정됨
	두 선분, 세 각	결정되지 않음
6	세 선분, 세 각	결정됨

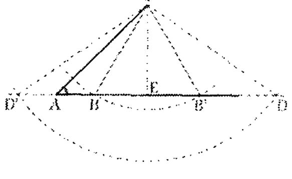
그러나 주어진 요소의 위치까지 고려하면서 요소가 하나 주어진 경우에서 시작해, 두 개, 세 개로 늘려가면서 결정조건을 탐구하는 맥락에서는 상황이 달라진다.

세 개의 요소가 주어진 경우, 우선 어떤 경우를 조사해야 할지 알아보아야 한다. 경우의 수로 생각하면 2×2×2=8, 곧 SSS, SSA, SAS, SAA, ASS, ASA, AAS, AAA의 8가지 경우를 조사해야 할 것 같으나 SSA와 ASS, SAA와 AAS는 실상 같은 경우이므로 SSS, SSA, SAS, ASA, SAA, AAA의 6가지 경우에 삼각형이 결정되는지를 탐구하게 된다.[8)]

이러한 탐구 결과, AAA와 SSA를 제외한 SSS, SAS, ASA, SAA의 네 경우가 삼각형이 결정되는 경우로 드러난다. 주어진 탐구 맥락은 각 맥락에서의 '일반성'의 범위를 결정한다. SSA는 요소의 개수와 위치를 고려하는 맥락에서는 일반성을 지닌 삼각형의 결정조건으로 인정되지 못한다.

최노성(2002)은 '$a=3$, $c=2$, A=30°'와 같이 SSS, SAS, ASA가 아니면서(SSA이면서) 삼각형이 결정되는 사례를 예로 들어 교과서의 오류를 지적하면서, 삼각형의 결정조건은 삼각형을 하나로 결정하기 위한 충분조건임에도 많은 교과서들은 이것을 필요충분조건으로 잘못 이해하고 있다고 문제를 제기하였다. 이와 같은 관점에서 보면, '두 변이 주어지고 짧은 변의 이웃각이 주어지거나, 두 변의 길이가 같고 한 각이 주어질 때'도 삼각형의 결정조건에 포함되어야 한다.

8) AC가 주어진 한 변, 각 A가 주어진 한 예각이라고 하고, C를 중심으로 다른 주어진 한 변의 길이 a를 반지름으로 해서 원을 그리면, a의 길이에 따라 생기는 삼각형의 개수가 달라진다. a=AE라면 한 개, AE< a<AC라면 2개, $a \geq$AC라면 한 개 생긴다(Heilbron, 2000).



<표 Ⅱ-5> 주어진 요소의 개수와 위치를 고려하는 맥락에서 결정조건

주어진 요소의 개수	주어진 요소	삼각형의 결정 여부
1	a	결정되지 않음
	A	결정되지 않음
2	a, b	결정되지 않음
	a, A	결정되지 않음
	a, B	결정되지 않음
	A, B	결정되지 않음(닮음)
3	a, b, c	결정됨(SSS)
	a, b, A	결정되지 않음(SSA)
	a, C, b	결정됨(SAS)
	a, B, C	결정됨(ASA)
	a, A, B	결정됨(SAA)
	A, B, C	결정되지 않음(닮음)
4	a, b, c, A	a, b, c로 환원되어 결정됨
	a, b, C, A	a, C, b로 환원되어 결정됨
	a, b, A, B	a, C, b로 환원되어 결정됨
	a, A, B, C	a, B, C로 환원되어 결정됨
5	a, b, c, A, B	a, b, c로 환원되어 결정됨
	a, b, A, B, C	a, C, b로 환원되어 결정됨
6	a, b, c, A, B, C	결정됨

박선용과 권석일(2004: 439-442)은 '세 변의 길이가 주어지면, 삼각형은 하나로 결정된다.'는 명제에서 '주어지면'을 '결정되면'의 의미로 해석하는 것이 적절하며, 이러한 해석에 따르면 SSS, SAS, ASA 각각은 삼각형이 하나로 결정되기 위한 필요충분조건이 된다. 또 '두 변이 주어지고 짧은 변의 이웃각이 주어질 때'와 같은 경우는 사인법칙이나 코사인법칙에 의해 SSS나 SAS로 환원된다. 뿐만 아니라, SSS는 세 변이라는 3가지 조건, SAS는 '두 변+한 각+한 각이 아는 두 변의 끼인각'이라는 4가지 조건, ASA는 '한 변+두 각+두 각이 아는 한 변의 양 끝각'이라는 4가지 조건이 주어진 것인데, '두 변이 주어지고 짧은 변의 이웃각이 주어질 때'는 '두 변+한 각+두 변의 길이가 다름+아는 각이 짧은 변에 이웃함'이라는 5가지 조건이 주어진 것으로 일반성의 정도가 SSS, SAS, ASA에 비해 떨어지므로 삼각형의 결정조건에 포함시키지 않는 것이 타당하다는 견해를 제시하였다.

이러한 견해들은 각각 논리적으로 일리가 있다. 그런데 무엇을 삼각형의 결정조건으로 볼 것인가, 어디까지를 삼각형의 결정조건으로 정할 것인가는 결정조건을 탐구하는 맥락에 따라 달리 판단될 수 있다. 앞에서 본 바와 같이, 요소의 위치를 고려하지 않고 요소의 개수만 문제 삼는 경우, 삼각형의 결정조건은 본질상 '세 선분이 주어진 경우' 뿐이다. 요소의 위치가 지정된 탐구 맥락에서는 SSS, SAS, ASA, SAA의

네 개가 삼각형의 결정조건이 된다.

여기서 '세 선분이 주어진 경우'와 'SSS'의 차이를 지적할 필요가 있다. SSS가 3가지 조건, SAS와 ASA가 4가지 조건이 주어진 것으로 본다면 '조건의 최소성'이라는 관점에서만 보면, SAS와 ASA를 제외한 SSS만 삼각형의 결정조건으로 받아들여야 할 것이다. 그러나 SSS도 4가지 조건이 주어진 것으로 볼 여지가 있다. 세 선분이 주어진 경우는 말 그대로 세 선분의 길이라는 세 가지 조건이 주어진 것이지만, SSS라는 표현에는 '세 선분이 연속적으로 이웃하고 있다'는 위치 지정의 네 번째 정보가 추가되어 있는 것으로 볼 수 있다. 이 네 번째 정보는 삼각형 맥락에서는 표면에 드러나지 않는다.

세 선분이 요소의 개수와 위치라는 한정 맥락에서는 SSA는 삼각형의 결정조건이 되지 못하지만, 요소의 개수와 위치를 넘어, 예를 들어 주어진 각의 크기까지 고려하면서 언제 삼각형이 결정되는지를 알아보는 탐구 맥락에서는 SSA-둔각과 SSA-직각[9]도 결정조건에 포함될 수 있다. 어떤 것을 결정조건으로 인정하고 제시할 것인가는 이와 같이 탐구 맥락에 따라 달라질 수 있다.

여기서 우리나라 교과서에서 SSS, SAS, ASA의 세 가지를 결정조건으로 인정하여 제시하는 맥락은 무엇이며, 그러한 탐구 맥락이 교과서와 수업에서 충실히 드러나고 있는가라는 문제가 제기된다. 이러한 탐구 맥락을 충실히 드러내지 못하면, 학생들은 삼각형의 결정조건에 대해 이해하지 못한 상태에서 '주어진 것이 SSS, SAS, ASA일 때만 삼각형은 결정된다'고 생각하게 될 수 있다. 우리나라 중학교 교과서에서는 위와 같은 탐구 맥락에서 4개의 조건을 결정조건으로 정하는 과정과 SAA를 결정조건에서 제외하는 과정은 드러나 있지 않다. 이러한 과정이 생략된 상태에서 처음부터 SSS, SAS, ASA가 결정조건으로 제시된다.

내각의 크기의 합의 정리를 사용한다면 SAA와 ASA는 서로가 서로를 함의하고 있는 것을 확인할 수 있다. 그러므로 이 과정을 거치면 SAA, ASA 둘 중 하나로 둘을 대표할 수 있다. 그러나 이것은 SSS, SSA, SAS, ASA, SAA, AAA를 조사하여 어느 경우에 삼각형이 결정되는지를 탐구하는 작업과 독립적인 이후 작업이다. 요소의 개수만 고려하는 탐구 맥락에서 세 선분이 주어진 경우가 결정조건이 됨을 확인하고, 그 다음으로, 요소의 위치까지 고려하는 탐구 맥락 속에서 요소의 개수를 하나, 둘, 셋으로 늘려 가며, SSS, SSA, SAS, SAA, ASS, ASA, AAS, AAA의 8 가지 경우에서 SSS, SSA, SAS, ASA, SAA, AAA의 6가지 경우로, 그 다음 SSS, SAS, ASA, SAA의 4가지 경우로, 그 다음 SSS, SAS, ASA의 3가지 경우로 결정조건을 정해 가는 탐구 과정 속에서 결정조건을 구성해 가는 경험을 할 수 있도록 하는 교재 구성과 학습 지도가 필요하다.

박선용과 권석일(2004)은 삼각형의 결정조건을 만족하는지의 여부를 판가름하는데 결정적인 도움을 주는 코사인 제2법칙은 고등학교에 나오므로 중학생들이 사실상 삼각형이 하나로 결정되는지 판단할 수 없는 교육과정 구성상 문제점이 있다고 지적하였다. 교육은 장기적인 과정이므로, 중학교에서는 요소의 개수와 위치까지 고려하는 탐구맥락에서 SSS, SAS, ASA의 셋을 합친 것을 결정조건으로 다루는 것이 학습량이나 수준의 면에서 적절할 것이다. 요소의 개수와 위치를 고려하는 맥락을 넘어 각의

9) 주어진 각이 직각이거나 둔각인 경우

크기 등 더 상세화된 조건을 고려하면서 SSA에 대해 탐구하는 것은 심화 발전 과제로 다룰 수 있을 것이다. 고등학교에서 사인법칙과 코사인법칙을 학습한 후에는 SSS, SAS, ASA가 서로가 서로를 함의하고 있다는 것을 알아볼 수 있을 것이다. 이 과정을 통해, 중학교와는 달리, SSS, SAS, ASA '각각이' 삼각형이 결정되기 위한 필요충분조건임을 인식하게 할 수 있을 것이다.[10)]

4. 삼각형의 합동조건과 대응

2003년 한국교육과정평가원의 학업성취도 검사를 통해 중학교 3학년 학생들을 대상으로 다음 문항을 사용하여 삼각형의 합동 조건에 대한 이해를 조사한 결과는 <표 Ⅱ-6>과 같다(조영미, 이대현, 이봉주, 2004: 175-181). 문항 (1)의 정답율이 약 35%, 문항 (2)의 정답율이 약 11%로, 삼각형의 합동조건에 관한 학생들의 이해는 전체적으로 만족스럽지 못한 것으로 보인다.

(1) 세 각의 크기가 각각 같고 두 변의 길이가 각각 같은 두 삼각형은 합동인가? 합동이면 그 이유를 쓰고, 합동이 아니면 합동이 아닌 예를 드시오.

(2) 두 변의 길이가 각각 같고 한 각의 크기가 각각 같은 두 삼각형은 합동인가? 합동이면 그 이유를 쓰고, 합동이 아니면 합동이 아닌 예를 드시오.

SSS, SAS, ASA가 삼각형의 합동조건이 되는 이유는 그것이 삼각형의 결정조건이기 때문이다. 일반적으로 중학교 교과서에서도 삼각형의 결정조건이 만족되면 삼각형의 모양과 크기가 하나로 결정되므로 결정조건에 의해 두 삼각형은 합동임을 알 수 있다고 설명하고 있다(배종수, 2002: 78; 황석근과 이재돈, 2002: 66).

그렇지만 결정조건과 합동조건은 처음에 주어진 것을 무엇으로 보는가에 있어 차이가 있다. 결정조건을 세 선분이 주어지는 상황으로 보면 성립 여부가 중요하다. 그러나 합동조건에서는 이미 두 개의 삼각형이 만들어져 있으므로 성립은 따질 필요가 없다.

<표 Ⅱ-6> 삼각형의 합동조건에 대한 학생 조사 결과

번 호	유 형	응답자수(%)
(1)	합동이 아니라고 하고 반례를 올바르게 제시한 경우	1045(34.7)
	합동이 아니라고 하고, 반례를 직접 제시하지 않은 경우	372(12.3)
	합동이 아니라고 하고, 잘못된 반례를 제시한 경우	139(4.6)
	무응답	347(11.5)
	합동이라고 한 경우	1103(36.6)
(2)	합동이 아니라고 하고 반례를 올바르게 제시한 경우	326(10.8)
	합동이 아니라고 하고, 반례를 직접 제시하지 않은 경우	384(12.7)
	합동이 아니라고 하고, 잘못된 반례를 제시한 경우	218(7.2)
	무응답	476(15.8)
	합동이라고 한 경우	1606(53.3)

10) 사인법칙과 코사인법칙이라는 수단을 가지고 있는 상태에서는 SSS 하나로 삼각형의 결정조건을 나타낼 수도 있다. 그러나 SSS만 삼각형의 결정조건으로 하고 ASA나 SAS의 경우 법칙을 이용해 SSS로 환원되는지 알아봐서 결정 여부를 판단하는 것보다는 SSS, SAS, ASA를 각각 결정조건으로 하는 편이 효율적이다.

이 외에도 결정과 합동 사이에는 중요한 차이가 하나 더 있다. 그것은 바로 대응이다. 결정과는 달리 합동에서는 대응이 매우 중요한 개념이 된다. 대응이 가정되지 않으면 다섯 개의 요소가 같아도 두 삼각형이 합동이 아닐 수 있다. 그러나 대응이 가정되면, 임의의 네 개의 요소만 같으면 두 삼각형은 언제나 합동이다. 삼각형의 합동에서 '대응'의 중요성을 알게 하려면 세 개의 요소가 같을 때만 다루지 말고 임의의 4개의 요소가 같은 경우까지 다루어야 할 것이다. 삼각형의 합동에서 '대응'의 중요성을 이해한다는 것에는 5개의 요소가 같아도 합동이 아닐 수 있지만 '대응'이 있으면 4개의 요소만 같으면 합동이라는 것을 인식하는 것이 포함된다.

중학교 교과서에서는 삼각형의 합동조건을 제시할 때에 결정조건에 '대응하는' 이라는 말을 추가하고 있다. 그리고 결정조건에서의 '주어질 때'가 합동조건에서는 '같을 때'로 바뀐다.

삼각형의 합동조건

1. 대응하는 세 변의 길이가 같을 때
2. 대응하는 두 변의 길이가 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때
3. 대응하는 한 변의 길이가 같고, 그 양끝각의 크기가 각각 같을 때

결정에서는 대응을 생각할 수 없지만 결정조건에 나오는 '끼인'이나 '양끝'과 같은 '위치 지정' 수식어는 합동에서의 대응과 마찬가지의 역할을 한다. 이는 삼각형의 합동조건에서 '대응하는' 이라는 수식어는 논리적으로 불필요한 것임을 시사한다. 세 변이 주어진 경우는, '끼인'이나 '양끝'과 같은 한정사가 없다. 그러나 삼각형에는 변이 세 개 밖에 없기 때문에, 세 변은 자동적으로 서로 '연속적으로 이웃한' 변이 된다. SSS 합동 조건에는 대응을 함의하고 있는 수식어가 없는 것처럼 보이지만, 삼각형이기 때문에 세 변이라는 말 속에 대응이 붙박혀 있는 셈이다. 결국 SSS, SAS, ASA 합동조건에서도 '대응하는' 이라는 수식어는 논리상 불필요하다. 어느 두 삼각형이든 세 변의 길이가 서로 같으면 합동이고, 어떤 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 같으면 합동이며, 어느 한 변의 길이가 같고 그 양끝각의 크기가 각각 같으면 합동이다.

또한 중학교 수학의 도형 영역에서 대응이라는 용어는 임의의 짝짓기의 의미보다는 합동, 닮음, 대칭이라는 맥락에서 특수한 위치 관계에 있는 두 도형을 표현하는데 사용된다. 이와 같은 용어 사용의 맥락을 고려하면, 두 삼각형의 합동 여부를 알아보는 상황에서 '대응하는' 이라는 말을 사용하는 것은 어색하다. 합동이면 대응을 말할 수 있지만 합동인지 모르는 상황-합동조건을 이용하여 두 삼각형의 합동을 판별하는 상황은 합동인지 아닌지 모르는 상황이다-에서 '대응하는' 이라는 말을 삼각형의 합동조건 안에 쓰는 것은 용법상 어색하며 실제 합동을 판단하는 데에도 도움이 안 된다. 합동인지 아닌지 모르는 상황에서 무엇이 무엇에 대응하는지 알 수 없기 때문에, 크기가 같은 변이나 각을 이렇게 저렇게 짝지어가면서 비교해 볼 수밖에 없기 때문이다.

이와 같은 문제점이 있음에도 불구하고, 교과서에서 합동조건을 기술할 때에 '대응하는' 이라는 말을 사용하는 것은 다음과 같은 고려의 결과일 수 있다. 삼각형의 합동조건에서 '대응하는'을 빼면 '1. 세 변의 길이가 같을 때, 2. 두 변의 길이가 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때, 3. 한 변의 길이가 같고, 그 양끝각의 크기가 각각 같을 때'가 된다. 이 표현들이 학생들에게, 예를 들어 '1. 세 변의 길이가 같을

때'가 정삼각형을 뜻하는 것처럼 오해될 소지가 있다.[11] 이와 같은 오해의 소지를 줄이면서 '대응하는' 이라는 표현을 쓰지 않고 삼각형의 합동 조건을 기술하는 방법을 모색할 필요가 있다.

III. 결 론

이 논문은 학교수학의 삼각형의 결정조건과 합동조건에 대한 분석적 논의로, 삼각형의 성립과 삼각형의 결정, 삼각형의 6요소 구하기와 삼각형의 결정, 삼각형의 결정조건과 필요충분성의 문제, 삼각형의 합동조건과 대응에 대하여 다루었다. 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 중등 수학 예비 교사들과 중고등학생을 대상으로 조사한 바에 의하면, 조사 대상자 중 적지 않은 수가 삼각형의 결정조건과 합동조건에 대해 그릇되거나 불충분한 이해를 하고 있었다. 이들의 응답으로부터 삼각형이 성립되지 않으므로 삼각형이 결정되지 않는다고 보는 현상, 삼각형의 6요소가 구해지는 상황과 삼각형의 결정 상황을 같은 것으로 보는 현상이 관찰되었다. 둘째, 처음에 주어지는 것을 변이 아닌 선분으로 보는 것이 삼각형의 결정조건의 고유의 관심을 더 잘 드러낸다. 셋째, 고등학교에서 삼각형의 6요소 구하기 학습 지도시 중학교에서 배운 삼각형의 결정조건이 지닌 의미를 재음미할 기회를 제공해야 한다. 넷째, 무엇을 삼각형의 결정조건으로 볼 것인가, 어디까지를 삼각형의 결정조건으로 정할 것인가는 논리적으로만 판단할 문제가 아니라 결정조건을 탐구하는 맥락에 따라 달리 판단될 수 있는 문제이다. 다섯째, 3개의 요소가 주어진 경우, SSS, SSA, SAS, SAA, ASS, ASA, AAS, AAA의 8 가지 경우에서 시작해 SSS, SSA, SAS, ASA, SAA, AAA 이어서 SSS, SAS, ASA, SAA를 거쳐 SSS, SAS, ASA로 가는 탐구 과정 속에서 결정조건이 지닌 최소필수성을 인식할 수 있게 하는 교재 구성과 학습 지도가 필요하다. 여섯째, 합동에서 '대응'의 중요성을 인식하게 하는 학습 지도가 필요하다. 일곱째, 삼각형의 합동조건에서 '대응하는' 이라는 표현이 지닌 문제점을 해소하는 방안을 모색할 필요가 있다.

참고문헌

강옥기 · 정순영 · 이환철(2002). **중학교 수학 7-나**. 서울: 두산

고성은 · 박복현 · 김준희 · 최수일 · 강운중 · 소순영(2003). **중학교 수학 7-나**. 서울: 블랙박스.

교육인적자원부(2002). **수학 5-나**. 서울: 대한교과서.

금종해 · 이만근 · 이미라 · 김영주(2002). **중학교 수학 7-나**. 서울: 고려출판.

박규홍 · 한옥동 · 김성국 · 임창우 · 고성군 · 김유태 · 육상국 · 박재용 (2002). **중학교 수학 7-나**. 서울: 두레교육.

박두일 · 신동선 · 강영환 · 윤재성 · 김인종(2002). **중학교 수학 7-나**. 서울: 교학사.

박선용 · 권석일(2004). '삼각형의 결정조건'에 대한 논의의 분석. **수학교육학연구, 14**(4), 435-446.

11) 실제로 2003년도 학업성취도 평가에서도 '세 각의 크기가 각각 같은 두 삼각형'을 정삼각형으로, '두 변의 길이가 각각 같고 한 각의 크기가 같은 두 삼각형'을 이등변삼각형으로 생각하여 풀이를 시도한 답안들이 발견되었다(조영미, 이대현, 이봉주, 구자형, 2004: 181).

박윤범 · 박혜숙 · 권혁천 · 육인선 (2002). **중학교 수학 7-나**. 서울: 대한교과서.

배종수 · 박종률 · 윤행원 · 유종광 · 김문환 · 민기열 · 박동익 · 우현철 (2002). **중학교 수학 7-나**. 서울: 한성과학연구소.

신항균(2002). **중학교 수학 7-나**. 서울: 형설출판사.

양승갑 · 박영수 · 박원선 · 배종숙 · 성덕현 · 이성길 · 홍우철(2002). **중학교 수학 7-나**. 서울: 금성출판사.

이준열 · 장훈 · 최부림 · 남호영, 이상은(2002). **중학교 수학 7-나**. 서울: 디딤돌.

전평국 · 신동윤 · 방승진 · 황현모 · 정석규(2002). **중학교 수학 7-나**. 서울: 교학연구사.

조영미 · 이대현 · 이봉주 · 구자형(2004). **2003년 국가수준 학업성취도 평가 연구-수학-**. 연구보고 RRE 2004-1-4. 한국교육과정평가원.

조태근 · 임성모 · 정상권 · 이재학 · 이성재 (2002). **중학교 수학 7-나**. 서울: 금성출판사.

최노성 (2002). 삼각형의 결정조건. **수학사랑 36,** 142-143.

최봉대(2002). **고등학교 수학 10-나**. 서울: 중앙교육진흥연구소.

황석근 · 이재돈 (2002). **중학교 수학 7-나**. 서울: 한서출판사.

Beran. D. (1992). SSA and the Steiner-Lehmus theorem. *Mathematics Teacher 85*(5). NCTM.

Eggleton, P. J. (2001). Triangles à la Fettuccine : A hands-on approach to triangle-congruence theorems. *Mathematics Teacher 94*(7), 534-537. NCTM.

González, J. L. (1999). Didactical analysis : A non empirical gualitative method for research in mathematics education. In I. Schwank (Ed.), *European research in mathematics education : Proceedings of the first conference of the european society for research in mathematics* (pp. 245-256). Osnabruck : Germany.

Heilbron, J. L. (2000). *Geometry civilized: history, culture, and technique*. NY: Oxford University Press.

Ma. L. (1999). *Knowing and teaching elemenary mathematics.* Mahwah: Lawrence Erlbaum Assdicaites, Inc.

Movshovitz-Hader, N., & Well, J. (1998). *One equals zero and other mathematical surprises.*. CA: Key Curriculum Press.

Woo, Jeongho (2004). School mathematics as a major subject for 'human education'. *School Mathematics 6*(4), 313-324.

Didactical Analysis on Triangle-Determining Conditions and Triangle-Congruence Conditions

Yim, Jaehoon (Gyeongin National University of Education)

This study intends to analyze didactically on triangle-determining conditions and triangle-congruence conditions. The result of this study revealed the followings:

Firstly, many pre-service mathematics teachers and secondary school students have insufficient understanding or misunderstanding on triangle-determining conditions and triangle-congruence conditions. Secondly, the term segment instead of edge may show well the concern of triangle-determining conditions. Thirdly, when students learn the method of finding six elements of triangle using the law of sines and cosines in high school, they should be given the opportunity to reflect the relation and the difference between triangle-determining situation and the situation of finding six elements of triangle. Fourthly, accepting some conditions like SSA-obtuse as a triangle-determining condition or not is not just a logical problem. It depends on the specific contexts investigating triangle-determining conditions. Fifthly, textbooks and classroom teaching need to guide students to discover triangle-determining conditions in the process of inquiry from SSS, SSA, SAS, SAA, ASS, ASA, AAS, AAA to SSS, SAS, ASA, SAA. Sixthly, it is necessary to have students know the significance of 'correspondence' in congruence conditions. Finally, there are some problems of using the term 'correspondent' in describing triangle-congruence conditions.

* **Key words** : didactical analysis(교수학적 분석), triangle-determining condition(삼각형의 결정조건), triangle-congruence condition(삼각형의 합동조건), correspondence (대응), the law of sines and cosines(사인법칙과 코사인법칙)

논문접수 : 2005. 4. 2.
심사완료 : 2005. 4. 30.