

Debye 매질에 대한 메모리 효율적인 JEC (FD)²TD 수치 해석 기법

Memory-Efficiently Modified JEC (FD)²TD Method for Debye Medium

김 현 · 홍 익 표* · 육 종 관

Hyun Kim · Ik-Pyo Hong* · Jong-Gwan Yook

요 약

Debye 매질에 대한 (FD)²TD 해석에 있어 JEC(JE Convolution) 기법은 기존의 기법들보다 적은 분산 오차를 가지지만 긴 계산 시간과 추가의 메모리를 필요로 하는 단점을 지닌다. 따라서 본 논문에서는 컨볼루션의 이산 적분 구간을 변경해 줌으로써 유도되는 수정된 JEC 기법을 제안하였고 그 결과 기존의 RC(Recursive Convolution)나 JEC 기법보다 적은 분산 오차를 보이는 것을 확인할 수 있었다. 또한 수정된 JEC 기법이 기존 기법들 중 가장 간단한 RC 기법과 같은 계산 복잡도와 메모리량을 요구하면서도 그보다 적은 분산 오차를 보인다는 것을 확인하였다.

Abstract

JEC method for Debye medium is required more memory resources and long calculation time than already well-known method such as RC method. It has been observed that JEC method would be converted to a memory efficient method by a change of discrete convolution integral range. The modified JEC method proposed here requires memory and calculation time similar to RC method, while it has a same or a smaller dispersion error than conventional methods, RC and JEC.

Key words : FDTD, Dispersive Medium, Recursive Convolution, Current Density

I. 서 론

분산 매질에 대한 (FD)²TD 수치 해석 기법으로 1990년대 초반 Luebbers^[1]에 의해 RC(Recursive Convolution) 기법이 제안되었다. 이는 주파수 영역에서 곱의 관계가 시간 영역에서는 컨볼루션 형태로 변환됨을 이용한 기법이다. 이 기법에서 적분 형태의 관계식을 이산화 하여 반복 연산식 형태로 (FD)²TD 수식을 유도하였고 이를 이용하여 Debye 매질에 대한 해석을 시도하였다.

분산 매질에 대한 또 다른 접근 방법으로 ADE

(Auxiliary Differential Equation) 기법이라 불리는 방법이 제시되기도 하였다^[2]. 이 기법은 주파수 영역에서 전기장과 전속 밀도의 관계식을 변형할 경우, 변형된 관계식이 시간영역에서는 시간에 대한 미분의 관계식으로 유도됨을 이용하였다. 이 기법은 RC 기법보다 적은 분산 오차를 가지는 장점이 있지만 RC 기법에 비해 추가적인 계산 과정과 메모리가 필요하여 계산시간이 오래 걸리는 단점을 가지고 있다^{[2],[3]}.

이후 Chen^[4] 등에 의해 JEC(JE Convolution) 기법이 제시되었는데 이는 전류 밀도와 전기장의 관계식에서 유도된 것으로 RC 기법과 같은 컨볼루션 관계

연세대학교 전기전자공학과(Department of Electrical and Electronics Engineering, Yonsei University)

*공주대학교 정보통신공학과(Department of Information and Communication Engineering, Kongju National University)

· 논문 번호 : 20041223-164

· 수정완료일자 : 2005년 5월 12일

를 이용한 기법이다. JEC 기법은 RC 기법과 유사하지만 분산 매질의 종류에 따라서는 RC 기법보다 많은 메모리와 계산 시간을 요구하는 단점을 지닌다.

앞서 기존의 방법으로 RC, ADE, JEC 기법 등이 제시되었는데 이 기법들은 컴퓨터 자원, 계산 속도, 정확성 면에서 장단점을 가지고 있다. 우선 RC 기법의 경우 이들 기법 중 최소의 메모리를 요구하고 계산 속도 면에서 빠른 장점을 가지지만 분산 오차가 커서 정확성이 떨어진다는 단점을 지니고 있다^{[2],[3]}. ADE 기법의 경우에는 분산 오차가 작다는 장점을 가지고 있지만 계산 과정에 있어 오랜 시간이 걸릴 뿐만 아니라 다중 폴(multi pole)을 가지는 Debye 매질에 대해서는 해석이 불가능하다는 단점을 가지고 있다. 마지막으로 JEC 기법은 속도면에서 ADE 기법보다 빠르고 정확성 면에서는 RC 기법보다 우수하지만 기존 기법들보다 요구되는 메모리량이 많다는 단점을 가진다^[4]. JEC의 이러한 단점을 극복하기 위해 본 논문에서는 기존의 RC 기법과는 달리 유한 차분법에 앞서 미분을 적용하는 방법을 제시하였다. 그 결과 RC 기법과 같은 메모리를 사용하면서도 적은 분산 오차의 특성을 보이는 기법을 유도할 수 있었다.

II. 수정된 JEC 기법

2-1 수식

분산 매질의 상대 유전율은 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\epsilon_s(\omega) = \epsilon_{inf} + \chi(\omega). \quad (1)$$

여기에서 $\chi(\omega)$ 는 주파수 영역에서의 자화율을 의미하며 Debye 매질의 경우 이 자화율은 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\chi(\omega) = \frac{\epsilon_s - \epsilon_{inf}}{1 + j\omega t_0}. \quad (2)$$

이때 ϵ_s 는 저주파 대역에서 매질의 상대 유전율을, ϵ_{inf} 는 고주파 대역에서 상대 유전율을 의미한다. 그리고 t_0 는 매질의 이완 시간을 의미한다.

식 (2)와 같이 표현되는 Debye 매질에서 전속 밀도와 전기장의 관계식은 시간 영역에서 다음과 같은 식 (3)처럼 나타낼 수 있다^[1].

$$\bar{D}(t) = \epsilon_0 \epsilon_{inf} \bar{E}(t) + \epsilon_0 \int_0^t \chi(t-\tau) \bar{E}(\tau) d\tau \quad (3-1)$$

$$\chi(t-\tau) = \frac{\epsilon_s - \epsilon_{inf}}{t_0} e^{-(t-\tau)/t_0}. \quad (3-2)$$

다음으로 암페어 법칙을 고려하면 전속밀도, \bar{D} 와 자기장, \bar{H} 는 식 (4)와 같은 관계식을 가진다.

$$\nabla \times \bar{H}^{n+1/2} = \frac{\partial \bar{D}^{n+1/2}}{\partial t}. \quad (4)$$

여기에서 수정된 JEC 기법은 [1]과는 달리 이산화에 앞서 미분을 적용하였다. 즉 시간에 대한 전속밀도의 미분항, $\partial \bar{D} / \partial t$ 를 구한 뒤 유한 차분법을 적용하여 이산화하는 방법이다.

우선 $\partial \bar{D} / \partial t$ 는 $\chi(t-\tau)$ 의 변수 분리를 통해 식 (5)와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{D}(t)}{\partial t} &= \epsilon_0 \epsilon_{inf} \frac{\partial \bar{E}(t)}{\partial t} \\ &+ \epsilon_0 \left(\frac{\partial \chi_t(t)}{\partial t} \int_0^t \chi_\tau(\tau) d\tau + \chi_t(t) \chi_\tau(t) \bar{E}(t) \right) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $\chi_t(t)$ 와 $\chi_\tau(\tau)$ 는 식 (6)과 같다.

$$\chi_t(t) = \frac{\epsilon_s - \epsilon_{inf}}{t_0} e^{-t/t_0} \quad (6-1)$$

$$\chi_\tau(\tau) = e^{\tau/t_0}. \quad (6-2)$$

2-2 이산화

(FD)²TD 수식을 유도하기 위해 식 (5)의 적분 구간을 $0 \leq \tau \leq n\Delta t$, $n\Delta t \leq \tau \leq (n+1/2)\Delta t$, 두 구간으로 분리한다면 식 (5)는 다음과 같은 식 (7)로 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{D}^{n+1/2}}{\partial t} &= \epsilon_0 \epsilon_{inf} \frac{\partial \bar{E}^{n+1/2}}{\partial t} \\ &+ \epsilon_0 \left[\begin{aligned} &\frac{\epsilon_s - \epsilon_{inf}}{t_0} \bar{E}^{n+1/2} - \frac{\epsilon_s - \epsilon_{inf}}{t_0^2} e^{-(n+1/2)\Delta t/t_0} \int_0^{n\Delta t} \chi_\tau(\tau) \bar{E}(\tau) d\tau \\ &- \frac{\epsilon_s - \epsilon_{inf}}{t_0^2} e^{-(n+1/2)\Delta t/t_0} \int_{n\Delta t}^{(n+1/2)\Delta t} \chi_\tau(\tau) \bar{E}(\tau) d\tau \end{aligned} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 시간 증분 Δt 동안 전기장이 상수값을 갖는다고 가정하면 구간 $m\Delta t \leq \tau \leq (m+1)\Delta t$ 에 전기장은 \bar{E}^m 이라고 나타낼 수 있다^[1]. 마찬가지로 구간 $n\Delta t$

$\leq \tau \leq (n+1/2)\Delta t$ 에서 전기장은 \bar{E}^n 으로 표현할 수 있다. 따라서 식 (7)의 두 적분 구간은 각각 식 (8)과 (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_0^{n\Delta t} \chi_\tau(\tau) \bar{E}(\tau) d\tau = \sum_{m=0}^{n-1} \bar{E}^m \chi_\tau^m \quad (8-1)$$

$$\chi_\tau^m = \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \chi_\tau(\tau) d\tau = t_0 e^{m\Delta t/t_0} (e^{\Delta t/t_0} - 1), \quad (8-2)$$

$$\int_{n\Delta t}^{(n+1/2)\Delta t} \chi_\tau(\tau) \bar{E}(\tau) d\tau = \bar{E}^n \zeta_\tau^n \quad (9-1)$$

$$\zeta_\tau^n = \int_{n\Delta t}^{(n+1/2)\Delta t} \chi_\tau(\tau) d\tau = t_0 e^{n\Delta t/t_0} (e^{\Delta t/2t_0} - 1). \quad (9-2)$$

이를 식 (7)에 대입하여 정리하면 식 (7)은 다음과 같은 식 (10)의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{D}^{n+1/2}}{\partial t} &= \varepsilon_0 \varepsilon_{inf} \frac{\partial \bar{E}^{n+1/2}}{\partial t} + \varepsilon_0 \left[\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{inf}}{t_0} \bar{E}^{n+1/2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{inf}}{t_0^2} e^{-(n+1/2)\Delta t/t_0} \left(\sum_{m=0}^{n-1} \bar{E}^m \chi_\tau^m + \bar{E}^n \zeta_\tau^n \right) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 RC 기법과 같은 반복 연산의 식으로 변환시키기 위해 식 (11)과 같은 변수를 정의한다^[1].

$$\psi^n = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{inf}}{t_0^2} e^{-(n+1/2)\Delta t/t_0} \sum_{m=0}^{n-1} \bar{E}^m \chi_\tau^m. \quad (11)$$

여기서 ψ^{n-1} 이 식 (12)와 같으므로

$$\psi^{n-1} = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{inf}}{t_0^2} e^{-(n-1/2)\Delta t/t_0} \sum_{m=0}^{n-2} \bar{E}^m \chi_\tau^m. \quad (12)$$

식 (11)은 식 (13)과 같은 반복 연산의 식으로 변환이 가능하다.

$$\begin{aligned} \psi^n &= \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{inf}}{t_0^2} e^{-(n+1/2)\Delta t/t_0} \bar{E}^{n-1} \chi_\tau^{n-1} + e^{-\Delta t/t_0} \psi^{n-1} \\ &= \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{inf}}{t_0} e^{-\Delta t/2t_0} (1 - e^{-\Delta t/t_0}) \bar{E}^{n-1} + e^{-\Delta t/t_0} \psi^{n-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)의 반복 연산식을 고려한다면 시간에 대한 전속 밀도의 미분항인 식 (10)은 결국 식 (14)와 같은 형태의 식으로 유도된다.

$$\frac{\partial \bar{D}^{n+1/2}}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon_{inf} \frac{\partial \bar{E}^{n+1/2}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{inf}}{t_0} \bar{E}^{n+1/2}$$

$$- \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{inf}}{t_0} (1 - e^{-\Delta t/2t_0}) \bar{E}^n - \psi^n. \quad (14)$$

식 (14)와 암페어 법칙을 고려하면 Debye 매질에서 전기장 값은 다음과 같은 식을 통해 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{E}^{n+1} &= \frac{\varepsilon_{inf} / \Delta t + (\varepsilon_s - \varepsilon_{inf}) (1 - 2e^{-\Delta t/2t_0}) / 2t_0}{\varepsilon_{inf} / \Delta t + (\varepsilon_s - \varepsilon_{inf}) / 2t_0} \bar{E}^n \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon_0 (\varepsilon_{inf} / \Delta t + (\varepsilon_s - \varepsilon_{inf}) / 2t_0)} (\nabla \times \bar{H}^{n+1/2} + \psi^n). \end{aligned} \quad (15)$$

2-3 기존 기법과의 비교

2-3-1 RC 기법

기존의 RC 기법은 식 (4)의 암페어 법칙에서 우변의 시간에 대한 전속 밀도의 미분식을 식 (16)과 같은 2차 정확도를 가지는 유한 차분식으로 근사화 하였다. 그리고 식 (3)을 이용해 \bar{D}^{n+1} , \bar{D}^n 에 대한 식을 구하였다^[1].

$$\frac{\partial \bar{D}^{n+1/2}}{\partial t} = \frac{\bar{D}^{n+1} - \bar{D}^n}{\Delta t}. \quad (16)$$

그 결과 (FD)²TD 이산화 수식은 다음과 같은 형태로 나타낸다^[1].

$$\begin{aligned} \bar{E}^{n+1} &= \frac{\varepsilon_{inf}}{\varepsilon_{inf} + \chi_0} \bar{E}^n + \frac{1}{\varepsilon_{inf} + \chi_0} \psi^n \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 (\varepsilon_{inf} + \chi_0)} \nabla \times \bar{H}^{n+1/2} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\psi^n = \Delta \chi_0 \bar{E}^n + e^{-\Delta t/t_0} \psi^{n-1}. \quad (18)$$

여기서 χ_0 와 $\Delta \chi_0$ 는 다음 식과 같다.

$$\chi_0 = (\varepsilon_s - \varepsilon_{inf}) (1 - e^{-\Delta t/t_0}) \quad (19-1)$$

$$\Delta \chi_0 = (\varepsilon_s - \varepsilon_{inf}) (1 - e^{-\Delta t/t_0})^2. \quad (19-2)$$

식 (17)에서 보면 \bar{E}^{n+1} 을 계산하기 위해서는 반복연산에 필요한 변수, $\bar{H}^{n+1/2}$, \bar{E}^n 에 대한 각각의 값을 메모리에 저장하고 있어야 한다. 또한 반복 연산식을 통한 업데이트를 위해서는 변수와 \bar{E}^{n-1} 의 값을 필요로 하고 있다.

2-3-2 JEC 기법

JEC 기법은 식 (4)의 암페어 법칙을 식 (20)과 같이 전류 밀도와 전기장으로 표현할 수 있음을 이용한 방법이다^[4].

$$\nabla \times \bar{H}^{n+1/2} = \epsilon_0 \epsilon_{inf} \frac{\partial \bar{E}^{n+1/2}}{\partial t} + \bar{J}^{n+1/2} \quad (20)$$

그리고 Debye 매질의 전류 밀도에 대한 식은 다음과 같다^[4].

$$\bar{J}^{n+1/2} = \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_s - \epsilon_{inf}}{t_0} \bar{E}^{n+1/2} - \frac{\epsilon_s - \epsilon_{inf}}{t_0^2} e^{-(n+1/2)\Delta t/t_0} \int_0^{(n+1/2)\Delta t} \chi_\tau(\tau) \bar{E}(\tau) d\tau \right) \quad (21)$$

이는 식 (8)과 같다. 여기서 JEC 기법은 수정된 JEC 기법과 달리 적분 구간을 $0 \leq \tau \leq (n-1/2)\Delta t$, $(n-1/2)\Delta t \leq \tau \leq (n+1/2)\Delta t$ 구간으로 분리하여 이산화를 하여 식 (22)를 (FD)²TD 수식으로 적용하였다.

$$\begin{aligned} \bar{E}^{n+1} = & \frac{\epsilon_{inf} - \chi_0 \Delta t \left(1 - e^{-\Delta t/t_0} - \frac{2\Delta t}{t_0} e^{-\Delta t/2t_0} \right)}{\epsilon_{inf} + \chi_0 \Delta t} \bar{E}^n \\ & + \frac{\chi_0 \Delta t e^{-\Delta t/t_0}}{\epsilon_{inf} + \chi_0 \Delta t} \bar{E}^{n-1} \\ & + \frac{\Delta t}{\epsilon_0 (\epsilon_{inf} + \chi_0 \Delta t)} \left(\nabla \times \bar{H}^{n+1/2} - e^{-\Delta t/t_0} \bar{J}^{n-1/2} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

여기서 χ_0 는 $(\epsilon_s - \epsilon_{inf})/2t_0$ 을 의미한다.

식 (22)에서 볼 수 있듯이 JEC 기법의 경우 \bar{E}^{n+1} 을 계산하기 위해서는 반복연산자인 $\bar{J}^{n-1/2}$, $\bar{H}^{n+1/2}$, \bar{E}^n , \bar{E}^{n-1} 에 대한 값을 메모리에 저장하고 있어야 한다. 또한 식 (23)과 같은 방법으로 반복 연산자를 업데이트하기 위해서는 반복 연산에 필요한 변수와 \bar{E}^{n+1} , \bar{E}^n , \bar{E}^{n-1} 의 값이 필요하다.

$$\begin{aligned} \bar{J}^{n+1/2} = & e^{-\Delta t/t_0} \bar{J}^{n-1/2} \\ & + \epsilon_0 \chi_0 \left[\bar{E}^{n+1} + \left(1 - e^{-\Delta t/t_0} - \frac{2\Delta t}{t_0} e^{-\Delta t/2t_0} \right) \bar{E}^n - e^{-\Delta t/t_0} \bar{E}^{n-1} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

2-3-3 기존 기법과의 차이점

FDTD를 통해 \bar{E}^{n+1} 에 대한 계산을 할 경우 필요

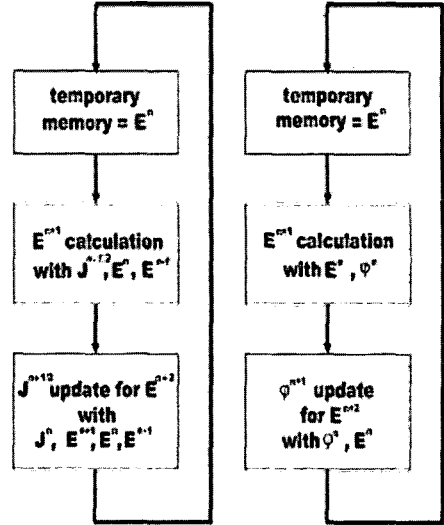


그림 1. (a) JEC 기법, (b) 수정된 JEC 기법의 흐름도
Fig. 1. Flowchart of (a) JEC method and (b) Modified JEC method.

한 시간에 대한 전기장에 대한 각 기법들의 구조를 살펴보면 식 (17)에서 보듯이 RC 기법의 경우는 바로 전단계의 값인 \bar{E}^n 이 필요한 1-level step 구조이고, JEC 기법의 경우는, 식 (22)에서 보듯이 \bar{E}^n , \bar{E}^{n-1} 이 필요한 2-level step 구조의 식으로 표현된다. 따라서 JEC 기법은 각 셀마다 전기장에 대해 저장해야 하는 값이 RC 기법에 비해 두 배가 되고 따라서 이에 대한 추가의 메모리 자원을 요구하게 된다. 또한 반복 변수인 $\bar{J}^{n+1/2}$ 과 \bar{H}^n 에 대한 계산을 할 경우, 식 (18)과 (23)을 보면, RC 기법은 \bar{E}^n , 하나의 메모리를 요구하는 반면에 JEC 기법은 \bar{E}^{n+1} , \bar{E}^n , \bar{E}^{n-1} 을 필요로 하게 된다. 하지만 이 논문에서 제안하고 있는 수정된 JEC 기법은 RC 기법과 같이 바로 전 시간의 전기장 값만을 필요로 하게 된다(식 (13)). 따라서 또한 그림 1에서 보듯이 수정된 JEC 기법은 기존의 RC 기법과 같은 1-step 구조로서 계산 속도가 빠르다는 장점을 가지게 된다.

24 수치 해석 결과

24-1 모의실험 환경

Debye 수식으로 모델링 되는 물에 대해 제안하는 기법을 기존의 기법들과 비교하기 위해 [1]에서 같은 실험 조건에서 1차원 FDTD 모의실험을 하였다.

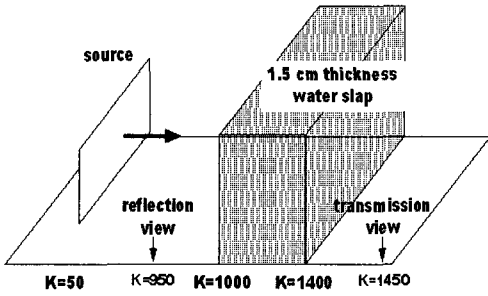


그림 2. 모의 실험 환경
Fig. 2. The simulation conditions.

이때 모의실험 환경은 그림 2와 같으며, 이때 매질의 상대 유전율은 식 (2)와 같은 Debye 모델 형태로 나타내어지며, $\epsilon_{inf}=1.8$, $\epsilon_s=81.0$, $\tau_0=9.4 p sec$ 로 주어진다. 한편 셀의 크기는, $\Delta x=37.5 \mu m$ 으로 정하였고 시간중분은, $\Delta t=62.5 f sec$ 로 정하였다.

전체 계산 셀 수는 1,500개로 이 중 400개의 셀을 Debye 매질로 가정하였다. 모의 실험 양쪽 경계면에서는, 흡수 경계 조건으로 Mur의 1차 경계조건을 적용한 super abc를 사용하여 중단시켜 반사파가 계산 공간으로 되돌아오는 것을 최소화 하였다^[5]. 입력 신호로는 $E_{inc} = e^{-(t-t_0)^2/T^2} \sin(\omega_0 t)$, $t_0=400 \Delta t$, $T=100 \Delta t$, $\omega_0=2\pi e10[rad/sec]$ 로 표현되는 가우시안 펄스를 사용하였다.

2.4.2 모의 실험 결과

모의 실험을 한 후 그림 2와 같은 지점에서 입사

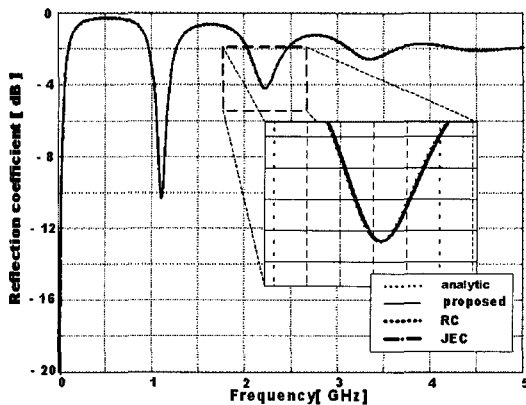


그림 3. 1.5 cm 두께의 물에 대한 다중 반사 계수
Fig. 3. Multiple reflection coefficient for a 1.5 cm thickness water slab.

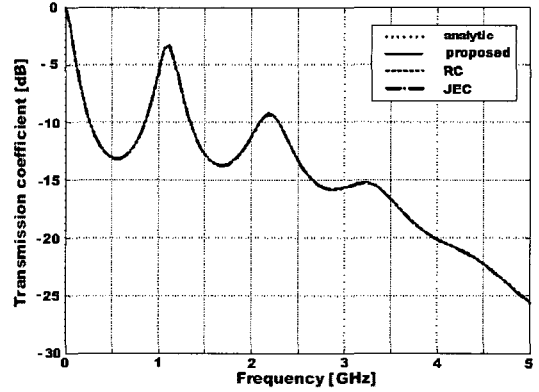


그림 4. 1.5 cm 두께의 물에 대한 다중 투과 계수
Fig. 4. Multiple transmission coefficient for a 1.5 cm thickness water slab.

파의 반사파와 투과파를 측정하여 물에 대한 다중 반사 계수(multiple reflection coefficient)와 다중 투과 계수(multiple transmission coefficient)를 구하였다.

그 결과 그림 3과 그림 4와 같이 수정된 JEC 기법을 통해 구한 해석값이 수식 해와 일치함을 보였다. 이로부터 분산 매질 해석에 있어 본 논문에서 제안하는 수정된 JEC 기법을 사용하는 것은 타당성이 있다는 것을 확인할 수 있다.

2.4.3 분산 오차 분석

제안하는 기법의 정확성을 비교하기 위해 기존의 방법들과 분산 오차를 계산하였다. 분산 오차는 식 (24)를 통해 구한 전파 상수, \hat{k}_x 와 식 (26)과 같은 수식을 통해 구한 전파 상수, k_x 사이의 오차로 이의 상대 오차로 식 (25)와 같이 정의된다^[3].

$$\hat{k}_x = \frac{2}{\Delta x} \sin^{-1} \left(\frac{\Delta x \sqrt{\hat{\epsilon}_r(\omega)} \sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\Delta t c_0} \right). \quad (24)$$

이때 c_0 는 진공에서 빛의 속도를 나타내고 $\hat{\epsilon}_r(\omega)$ 는 수치 해석적 상대 유전율을 의미한다.

$$e^{real} = \left| \frac{\text{Re}\{k_x - \hat{k}_x\}}{\text{Re}\{k_x\}} \right| \quad (25-1)$$

$$e^{real} = \left| \frac{\text{Im}\{k_x - \hat{k}_x\}}{\text{Im}\{k_x\}} \right|. \quad (25-2)$$

여기서 k_x 는 다음과 같은 식 (26)을 통해 구한다.

$$k_x^2 = \omega^2 \epsilon_r(\omega) / c_0^2 \quad (26)$$

$\epsilon_r(\omega)$ 는 식 (1)과 같은 수식 모델이다.

전과 상수를 구하기 위해 Young^[3]이 제시한 것과 같은 방법을 통해 수정된 JEC 기법과 RC 기법의 수치 해석적 상대 유전율을 구하면 각각 식 (27), (28)과 같다.

$$\hat{\epsilon}_r(\omega) = \epsilon_{inf} + \frac{\epsilon_s - \epsilon_{inf}}{j\Omega t_0} \left[\Lambda - \frac{(1 - e^{-\Delta t / 2t_0}) e^{-j\omega \Delta t / 2}}{2 \sinh((1 + j\omega t_0) \Delta t / 2t_0)} \right] \quad (27)$$

$$\hat{\epsilon}_r(\omega) = \epsilon_{inf} + \frac{\epsilon_s - \epsilon_{inf}}{j\Omega \Delta t} (1 - e^{-\Delta t / 2t_0}) e^{j\omega \Delta t / 2} - \frac{(\epsilon_s - \epsilon_{inf})(1 - e^{-\Delta t / t_0})^2 e^{-\Delta t / 2t_0}}{2 j\Omega \Delta t \sinh((1 + j\omega t_0) \Delta t / 2t_0)} \quad (28)$$

여기서 Λ , Ω 는 다음과 같이 정의한다.

$$\Lambda = \cos\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \quad (29-1)$$

$$\Omega = \frac{2}{\Delta t} \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \quad (29-2)$$

한편 JEC 기법에 대한 수치 해석적 상대 유전율은 식 (30)과 같은데 이에 대한 유도 과정은 부록에 언급하였다.

$$\hat{\epsilon}_r(\omega) = \epsilon_{inf} + \frac{\epsilon_s - \epsilon_{inf}}{j\Omega t_0} \left[\Lambda - \frac{\Delta t}{2t_0 \sinh((1 + j\omega t_0) \Delta t / 2t_0)} \right] \quad (30)$$

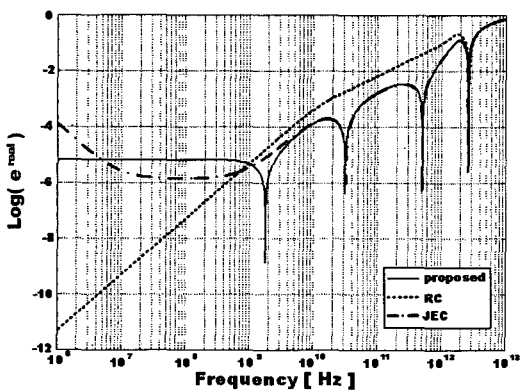


그림 5. 제안된 기법의 상대 위상 오차
Fig. 5. Relative phasor error for proposed method.

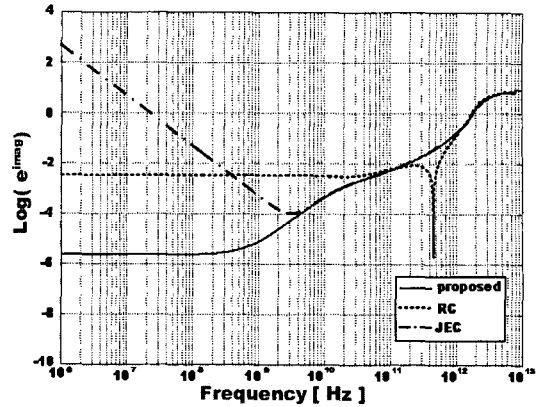


그림 6. 제안된 기법의 상대 감쇠 오차
Fig. 6. Relative attenuation error for proposed method.

식 (24)를 이용해 모의 실험과 같은 (FD)²TD 실험 조건에서 각 기법들의 분산 오차를 구하면 그림 5, 6과 같은 형태를 보인다. 그래프에서 확인할 수 있듯이 제안된 수정된 JEC 기법은 분산 오차 면에서 주파수에 따라 기존의 기법보다 같거나 작은 오차를 보이는 것을 확인할 수 있었다.

III. 결 론

본 논문에서 제시하는 수정된 JEC 기법은 그림 1을 통해 확인할 수 있듯이 기존의 JEC 기법과 비교해 간단한 계산 과정과 메모리를 요구하는 장점을 가지고 있다. 또한 수정된 JEC 기법은 RC 기법과 동일한 계산 과정과 메모리를 필요로 하고 있다. 한편 분산 오차를 분석한 결과 기존의 RC, JEC 기법에 비해 작은 감쇠 오차를 가지는 것을 확인할 수 있었다.

부 록

비자기 Debye 매질에 대한 JEC 기법에서 맥스웰 방정식은 다음과 같은 (FD)²TD 식으로 나타낸다.

$$\mu_0 \frac{\bar{H}^{n+1/2} - \bar{H}^{n-1/2}}{\Delta t} = \nabla \times \bar{E}^n \quad (A1)$$

$$\epsilon_0 \epsilon_{inf} \frac{\bar{E}^{n+1} - \bar{E}^n}{\Delta t} = \nabla \times \bar{H}^{n+1/2} - \bar{J}^{n+1/2} \quad (A2)$$

$$\bar{J}^{n+1/2} = e^{-\Delta t / t_0} \bar{J}^{n-1/2} + \epsilon_0 \chi_0 \left[\bar{E}^{n+1} + (1 - e^{-\Delta t / t_0} - (2\Delta t / t_0) e^{-\Delta t / 2t_0}) \bar{E}^n - e^{-\Delta t / t_0} \bar{E}^{n-1} \right] \quad (A3)$$

여기서 전기장, 자기장, 전류밀도의 고유 함수를 아래 식 (A4)로 정의할 수 있다^[3].

$$\bar{E}^n = \hat{e}(\hat{k}, \omega) e^{j\omega n \Delta t - j\hat{k} \cdot \bar{x}} \quad (\text{A4-1})$$

$$\bar{H}^n = \hat{h}(\hat{k}, \omega) e^{j\omega n \Delta t - j\hat{k} \cdot \bar{x}} \quad (\text{A4-2})$$

$$\bar{J}^n = \hat{j}(\hat{k}, \omega) e^{j\omega n \Delta t - j\hat{k} \cdot \bar{x}} \quad (\text{A4-3})$$

이를 (FD)²TD 수식에 대입하면 다음과 같은 식으로 정리된다.

$$j\Omega \mu_0 \hat{h}(\hat{k}, \omega) = j\bar{K} \times \hat{e}(\hat{k}, \omega) \quad (\text{A5})$$

$$j\Omega \varepsilon_0 \varepsilon_{inf} \hat{e}(\hat{k}, \omega) = -j\bar{K} \times \hat{h}(\hat{k}, \omega) - \hat{j}(\hat{k}, \omega) \quad (\text{A6})$$

$$\hat{j}(\hat{k}, \omega) = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_{inf})}{2t_0 (e^{j\omega \Delta t / 2} - e^{-\Delta t / t_0} e^{-j\omega \Delta t / 2})} \cdot \left[(1 + e^{j\omega \Delta t}) - e^{-\Delta t / t_0} (1 + e^{-j\omega \Delta t}) - (2\Delta t / t_0) e^{-\Delta t / 2t_0} \right] \hat{e}(\hat{k}, \omega). \quad (\text{A7})$$

여기서

$$\bar{K} = \frac{2}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \hat{x} + \frac{2}{\Delta y} \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \hat{y} + \frac{2}{\Delta z} \sin\left(\frac{k_z \Delta z}{2}\right) \hat{z}. \quad (\text{A8})$$

이때 Δx , Δy , Δz 는 셀의 크기를 의미하며 k_x , k_y , k_z 는 전파 상수를 의미한다.

여기서 식 (A7)을 식 (A6)에 대입하면 식 (A6)은 $\hat{e}(\hat{k}, \omega)$ 와 $\hat{h}(\hat{k}, \omega)$ 의 관계식으로 나타난다. 그리고 이를 식 (A9)와 같은 형태로 정리함으로써 JEC 기법에 관한 수치 해석적 상대 유전율, $\hat{\varepsilon}_r(\omega)$ 를 구할 수 있다.

$$j\Omega \varepsilon_0 \hat{\varepsilon}_r(\omega) \hat{e}(\hat{k}, \omega) = -j\bar{K} \times \hat{h}(\hat{k}, \omega). \quad (\text{A9})$$

참고 문헌

- [1] R. J. Luebbers, F. Hunsberger, and K. Kunz, "A frequency-dependent finite difference time domain formulation for dispersive materials", *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, vol. 32, pp. 222-227, 1990.
- [2] J. L. Young, R. O. Nelson, "A summary and systematic analysis of FDTD algorithms for linearly dispersive media", *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 43, pp. 61-77, Feb. 2001.
- [3] J. L. Young, A. Kittichartphayak, Y. M. Kwok, and D. Sullivan, "On the dispersion errors related to (FD)²TD type schemes", *IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech.*, vol. 43, pp. 1902-1910, Aug. 1995.
- [4] Q. Chen, M. Katsurai, and P. H. Aoyagi, "An FDTD formulation for dispersive media using a current density", *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 46, pp. 1739-1745, 1998.
- [5] K. K. Mei, J. Fang, "Superabsorption - A method to improve absorbing boundary conditions", *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 40, pp. 1001-1010, Sep. 1992.
- [6] D. F. Kelly, R. J. Luebbers, "Piecewise linear recursive convolution for dispersive media using FDTD", *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 44, pp. 792-797, 1996.
- [7] A. Taflove, S. C. Hanes, *Computational Electrodynamics-The Finite-Difference Time Domain Method*, 2nd, A.H. Publishers.

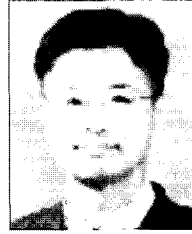
김 현



2002년 8월: 연세대학교 전기전자 공학과 (공학사)
2005년 2월: 연세대학교 전기전자 공학과 (공학석사)
2005년 3월~현재: 연세대학교 전기전자공학과 박사과정
[주 관심분야] 마이크로파 수치 해석

석

육 중 관



1987년: 연세대학교 전자공학과 (공학사)
1989년: 연세대학교 전자공학과 (공학석사)
1998년: University of Michigan 전기전자공학과 (공학박사)
1997년 1월~1998년 10월: University of Michigan Research Fellow

1998년 11월~1999년 2월: Qualcomm Inc. Senior Engineer
1999년 3월~2000년 2월: 광주과학기술원 조교수
2000년 3월~현재: 연세대학교 전기전자공학과 조교수
[주 관심분야] 마이크로파 구조 해석 및 설계, RF MEMS, 박막공진 구조

홍 익 표



1994년 2월: 연세대학교 전자공학과 (공학사)
1996년 2월: 연세대학교 전자공학과 (공학석사)
2000년 2월: 연세대학교 전기컴퓨터공학과 (공학박사)
2000년 3월~2003년 2월: 삼성전자

정보통신연구소 책임연구원

2003년 3월~현재: 공주대학교 정보통신공학부 전임강사
[주 관심분야] 전자기 수치 해석, 무선통신