

지그재그 보요소를 이용한 응력해석 및 진동해석

이덕규*

Novel Zig-Zag Beam Element for Stress Analysis and Vibration

Deog-Gyu Lee*

Abstract

Dynamic analysis of laminated beams with a embedded damping layer under tensional and compressive axial load is investigated. Improved Layer-Wise Zig-Zag Beam Theory and Interdependent Kinematic Relation are incorporated to model the laminated beams with a damping layer and a corresponding beam zig-zag finite element is developed. Flexural frequencies and modal loss factors under tension or compression axial load are calculated based on Complex Eigenvalue Method. The effects of the axial tensional and compressive load on the frequencies and loss factors are discussed.

초 록

축방향 인장 및 압축하중을 받는 점탄성층을 갖는 복합재료 적층보의 동력학적 거동을 해석하였다. 개선된 지그재그 보이론과 지배방정식에 기초한 기하학적 상관식을 이용하여 점탄성층을 갖는 복합재료 적층보를 모델링하였고 이에 기초한 보 유한요소를 개발하였다. 축방향 인장 및 압축하중하의 고유진동수와 감쇠계수는 복소수 유일법을 이용하여 계산하였다. 축방향 인장 및 압축하중이 고유진동수 및 감쇠계수에 미치는 영향을 조사하였다.

키워드 : 댐핑(damping), 지그재그이론(zig-zag theory), 감쇠계수(loss factor)

1. 서 론

점탄성 물질을 복합재료 구조물에 접합하여 심는 방법은 피로에 민감한 진동을 감소시키는데 효과적이다. 접합된 점탄성 물질은 진동 중 전단 변형을 통하여 에너지를 발산하므로 두께방향으로 각층의 기계적특성, 층의 두께, 감쇠계수가 급

격히 변하는 적층 복합재료 구조물의 거동을 정확히 예측할수 있는 층이론의 개발이 필요하다. 또한 축방향 인장 및 압축응력의 변화에 따라 고유진동수와 감쇠계수는 그 특성이 급격히 변한다.

Di Taranto[1]는 점탄성 코어를 갖는 샌드위치 보의 6차 운동방정식을 유도하였다. 표피의

* 위성응용그룹/dglee@kari.re.kr

전단변형은 무시되었고 코어의 축방향 응력은 고려되지 않았다. Mead와 Markus[2, 3], Mead[4]는 6차 운동방정식을 유도하였고 복소수 모드의 직교성을 증명하였다. 보의 두께가 얇은 구역에서 과도한 고유진동수를 예측하고 경계면상에서 불연속한 응력분포를 나타낸다. Averill[5, 6]은 1차와 3차 지그재그이론을 이용하여 보 유한요소를 개발하여 적층보의 굽힘을 해석하였다.

본 연구에서는 3차 지그재그이론과 지배방정식을 이용한 기하학적 상관관계식을 이용하여 2절점 보 유한요소를 개발하였다. 고차전단변위는 기하학적 상관기법을 통하여 소거되어 절점당 자유도의 개수는 3개이며 이는 평면변위, 횡변위 그리고 단면회전변위이다. 개발된 보 요소를 이용하여 축방향 하중하의 점탄성물질이 섞여진 단순지지와 외팔지지 복합재료 샌드위치 보의 자유진동을 해석하여 고유진동수와 감쇠계수를 계산하였고 인장 및 압축응력의 영향을 규명하였다.

2. 본 론

2.1 Zig-Zag 변위장

다층으로 구성된 보의 k 층의 지그재그 면내변위($u^{(k)}$)와 횡변위($w^{(k)}$)는 다음과 같이 정의되고 좌표계는 그림 1에 도시되어 있다(자세한 유도는 참고문헌 [7] 참조),

$$u^{(k)} = u - z \frac{\partial w}{\partial x} + h^{(k)}(z)\phi, \quad w^{(k)} = w \quad (1)$$

여기서 ϕ 는 고차전단변위를 나타낸다. 위 식에서 $h^{(k)}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$h^{(k)}(z) = z^2 + z^3 f_x + \sum_{i=1}^{k-1} (z - z_i)(a_{2i} + a_{3i} f_x) \quad (2)$$

$$f_x = \frac{(2h + \sum_{i=1}^{N-1} a_{2i})}{(3h^2 + \sum_{i=1}^{N-1} a_{3i})}$$

$$a_{3i} = \hat{a}_i \left(3z_i^2 + \sum_{q=1}^{i-1} a_{3q} \right), \quad \hat{a}_i = \left(\frac{G_{xz}^{(i)}}{G_{xz}^{(i+1)}} - 1 \right) \quad (3)$$

위 식에서 $G_{xz}^{(i)}$ 는 각층의 전단계수이다.

2.2 구성방정식

적층 보의 k 층의 점탄성물질의 복소수형태의 이방성 구성방정식은 다음과 같이 정의된다,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} E_x(1 + i\eta_x) & 0 \\ 0 & G_x(1 + i\eta_{xz}) \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} e_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (4)$$

위식에서 η_x, η_{xz} 는 각각 축방향 및 전단 감쇠계수를 나타낸다.

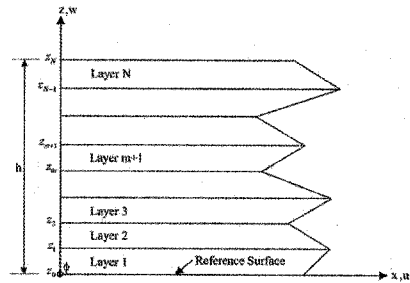


그림 1. 지그재그 변위장의 좌표계.

2.3 지배방정식

Hamilton의 원리를 이용하여 지배방정식을 다음과 같이 유도하였다.

$$\delta \Pi = \delta \int_{t_1}^{t_2} (U_B + U_S + V - T - W_e) dt = 0 \quad (5)$$

위식에서 $\delta U_B, \delta U_S, \delta V, \delta T, \delta W_e$ 는 각각 굽힘변형에너지, 전단변형에너지, 초기 축응력에 의한 에너지, 운동에너지, 외부 힘에 의한 에너지를 나타낸다. 굽힘변형에너지(δU_B)는 다음과 같이 표현된다.

$$\delta U_B = \int_0^L \begin{Bmatrix} \delta u_{,x} \\ \delta w_{,xx} \\ \delta \phi_{,x} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & -B & Q \\ -B & D & -E \\ Q & -E & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ w_{,xx} \\ \phi_{,x} \end{Bmatrix} dx \quad (6)$$

위식에서,

$$(A, B, D) = b \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} E_x^{(k)} (1 + i\eta_x^{(k)}) (1, z, z^2) dz, \quad (7)$$

$$(Q, E, G) = b \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} E_x^{(k)} (1 + i\eta_x^{(k)}) h^{(k)} (1, z, h^{(k)}) dz$$

그리고 단면에 작용하는 힘은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ -M_x \\ P_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B & Q \\ -B & D & -E \\ Q & -E & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ w_{xx} \\ \phi_x \end{Bmatrix} \quad (8)$$

그리고 전단력은 다음과 같이 정의 된다.

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} \quad (9)$$

전단변형에너지(δU_s)는 다음과 같이 표현된다.

$$\delta U_s = \int_0^L F \delta \phi dx \quad (10)$$

위식에서,

$$F = b \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} G_{xz}^{(k)} (1 + i\eta_{xz}^{(k)}) \frac{\partial h^{(k)^2}}{\partial z} dz \quad (11)$$

초기 축응력($N_{x0} = P$)에 의한 에너지(δV)는 다음과 같이 표현된다.

$$\delta V = \int_0^L N_{x0} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} dx \quad (12)$$

운동에너지(δT)는 다음과 같이 표현된다.

$$\delta T = \int_0^L \begin{Bmatrix} \delta \dot{u} \\ \delta \dot{w} \\ \delta \dot{w}_{xx} \\ \delta \dot{\phi} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_0 & H_0 & 0 & -I_1 \\ H_0 & H_2 & 0 & -H_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 \\ -I_1 & -H_1 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{w}_{xx} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} dx \quad (13)$$

위식에서,

$$(I_0, I_1, I_2) = b \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^{(k)} (1, z, z^2) dz, \quad (14)$$

$$(H_0, H_1, H_2) = b \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^{(k)} h^{(k)} (1, z, h^{(k)}) dz$$

외부 힘에 의한 에너지(δW_e)는 다음과 같이 표현된다.

$$\delta W_e = \int_0^L q \delta w dx \quad (15)$$

운동방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$\delta u: \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial u}{\partial x} - B \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Q \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = I_0 \ddot{u} - I_1 \ddot{w}_{xx} + H_0 \ddot{\phi} \quad (16)$$

$$\delta w: \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B \frac{\partial u}{\partial x} - D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + N_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b q = I_0 \ddot{w} + I_1 \ddot{u}_{xx} - I_2 \ddot{w}_{xx} + H_1 \ddot{\phi}_{xx} \quad (17)$$

$$\delta \phi: \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{\partial u}{\partial x} - E \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - F \phi = H_2 \ddot{\phi} + H_0 \ddot{u} - H_1 \ddot{w}_{xx} \quad (18)$$

기하학적 경계조건과 자연경계조건은 다음과 같이 유도된다.

Geometric	Natural
u	N_x
w	$Q_x + N_x w_x - I_1 \ddot{u} - H_1 \ddot{\phi} + I_2 \ddot{w}_{xx}$
$\frac{\partial w}{\partial x}$	M_x
ϕ	P_x

(19)

2.4 2절점 보 유한요소

2절점 보요소(그림 3 참조)는 3절점 보요소(그림 2 참조)에서 관성을 고려하지 않은 동차식(16)과 (18)을 통하여 고차전단변위 ϕ 와 버블절점에서 u 를 소거함으로써 유도된다.

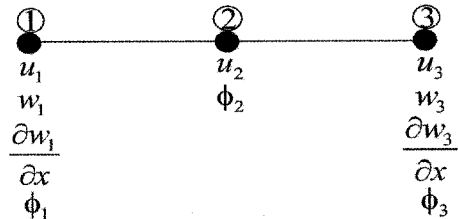


그림 2. 기하학적 상관식을 적용전 보요소(BHZ1).

3절점 보요소(그림 2 참조)의 평면변위(w)는 다음과 같이 보간된다.

$$u = u_1 m_1 + u_2 m_2 + u_3 m_3 \quad (20)$$

위식에서 m_1, m_2, m_3 는 다음과 같이 정의된다.

$$m_1 = 1 - 3\frac{x}{L} + 2\frac{x^2}{L^2}, m_2 = 4\frac{x}{L} - 4\frac{x^2}{L^2}, m_3 = 2\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \quad (21)$$

고차전단변위(ϕ)는 다음과 같이 보간된다.

$$\phi = m_1 \phi_1 + m_2 \phi_2 + m_3 \phi_3 \quad (22)$$

횡변위(w)는

$$w = n_1 w_1 + n_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} + n_3 w_2 + n_4 \frac{\partial w_2}{\partial x} \quad (23)$$

위식에서 n_1, n_2, n_3, n_4 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} n_1 &= 2\frac{x^3}{L^3} - 3\frac{x^2}{L^2} + 1, & n_2 &= \frac{x^3}{L^2} - 2\frac{x^2}{L} + x, \\ n_3 &= 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}, & n_4 &= \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \end{aligned} \quad (24)$$

2절점 보요소(그림 3 참조)는 식 (20), (22), (23)을 관성을 고려하지 않은 동차식 (16)과 (18)에 대입하여 $u_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ 를 소거하여 유도되며 u, ϕ 는 다음과 같이 정의된다.

$$u = M_1 u_1 + M_2 u_2 + N_1 w_1 + N_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} + N_3 w_2 + N_4 \frac{\partial w_2}{\partial x}, \quad (25)$$

$$\phi = P_1 w_1 + P_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} + P_3 w_2 + P_4 \frac{\partial w_2}{\partial x} \quad (26)$$

그리고 횡변위(w)는 식(23)과 동일하게 정의된다. 위식에서 $M_1, M_2, N_1, N_2, N_3, N_4, P_1, P_2, P_3$ 와 P_4 는 다음과 같이 정의된다.

$$M_1 = 1 - \frac{x}{L}, \quad M_2 = \frac{x}{L} \quad (27)$$

$$N_1 = -\frac{3B_r}{2A_r L} m_2, N_2 = -\frac{3B_r}{4A_r} m_2, N_3 = -N_1, N_4 = N_2 \quad (28)$$

$$P_1 = \frac{12(B_r Q_r - E_r A_r)}{F_r A_r L^2}, P_2 = \frac{6(B_r Q_r - E_r A_r)}{F_r A_r L^2}, P_3 = -P_1, P_4 = P_2 \quad (29)$$

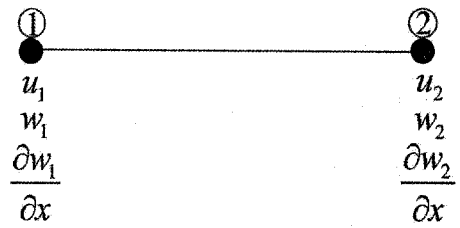


그림 2. 기하학적 상관식을 적용한 보요소(BHZZ).

위식에서 (A_r, B_r, E_r, Q_r, F_r)는 (7)과 (11)의 실수부를 나타낸다.

굽힘강성행렬($[K_B]$), 전단강성행렬($[K_S]$), 감쇠 강성행렬($[K_B^d], [K_S^d]$)은 (23), (25), (26)을 (6), (10)에 대입하여 구하고 강성행렬과 감쇠 강성행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$[K] = [K_B] + [K_S] \quad (30)$$

$$[K_D] = [K_B^d] + [K_S^d] \quad (31)$$

점근행렬($[K_T]$)은 (23)을 (12)에 대입하여 구하고 질량행렬($[M]$)은 (23), (25), (26)을 (13)에 대입하여 구한다.

2절점 보요소(BHZZ)의 경계조건은 ϕ 와 $u, w, \frac{\partial w}{\partial x}$ 사이의 기하적 상관관계를 고려하여 식 (19)로부터 다음과 같이 변화된다,

$$u: \bar{N}_x = N_x - \frac{A}{Q} P_x$$

$$w: \bar{Q}_x = Q_x + \frac{B}{Q} \left(R_x - \frac{\partial P_x}{\partial x} \right) \quad (32)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}: \bar{M}_x = M_x - \frac{B}{Q} P_x$$

3절점 보요소(BHZ1) 및 2절점 보요소(BHZZ)의 다양한 경계조건은 표 1에 도시되어 있다.

표 1. Various boundary conditions of BHZ1 and BHZ2.

Boundary Type	Geometric and Natural Boundary Conditions	
	BHZ1	BHZ2
 Clamped	$u = 0$ $w = 0$ $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ $\phi = 0$	$u = 0$ $w = 0$ $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$
 Free	$Q_x = P$ $M_x = M_0$	$\bar{Q}_x = P$ $\bar{M}_x = M_0 - \frac{B}{Q} P_x$
 Pinned	$w = 0$ $M_x = M_0$	$w = 0$ $\bar{M}_x = M_0 - \frac{B}{Q} P_x$
 Slide	$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ $\phi = 0$ $N_x = N_0$	$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ $\bar{N}_x = N_0$

2.5 Damping 해석기법

복소수 형태의 지배방정식은 유한요소법을 이용하여 다음과 같이 유도된다.

$$[M]\{\ddot{d}\} + ([K] - P[K_T] + i[K_D])\{d\} = \{0\} \quad (33)$$

(33)의 자유진동을 해석하여 모드의 감쇠계수 (η_n)를 다음과 같이 구하였다.

$$\eta_n = \frac{\lambda_I}{\lambda_R} \quad (34)$$

위식에서 λ_I 와 λ_R 은 유일모드의 허수부와 실수부의 값이다.

3. 수치해석 및 결과

3.1 Bending of cantilever beam

끝단집중하중 및 균일분포하중을 받는 보의 끝단변위, 뿌리에서의 우력 및 전단력을 본 연구에서 개발한 보요소(BHZ1, BHZ2)를 이용하여 계산하고 티모셴코 해와 비교 하였다.

3.1.1 Tip loaded cantilever beam

끝단집중하중을 받는 외팔보(그림 4)의 끝단변위(그림 5), 뿌리에서의 우력(그림 6) 및 전단력(그림 7)을 계산 하였다. 2절점 보요소(BHZ2)가 빠른 끝단변위의 수렴도를 보여준다.

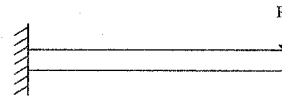


그림 4. Cantilever beam subject to tip load.

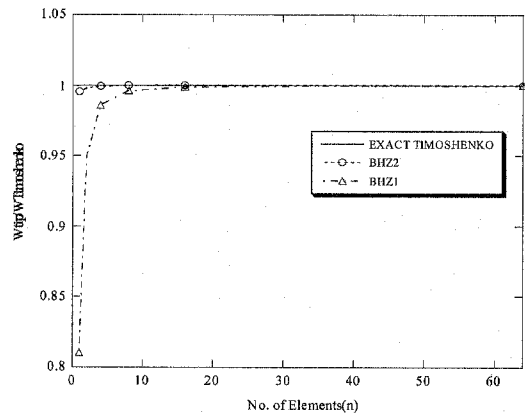


그림 5. Tip deflection of cantilevered beam subjected to an tip load as a function of discretization for $a/h = 4$.

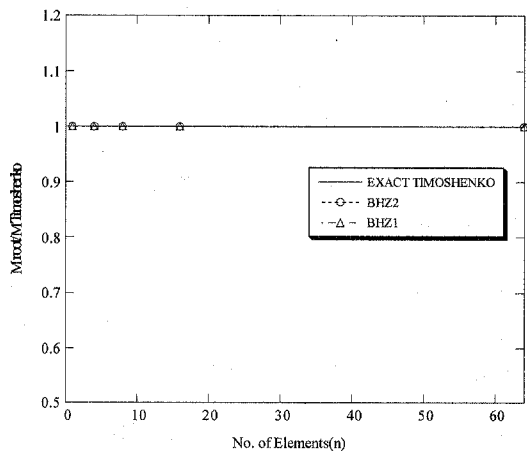


그림 6. Root bending moment of cantilevered beam subjected to an tip load as a function of discretization for $a/h = 4$.

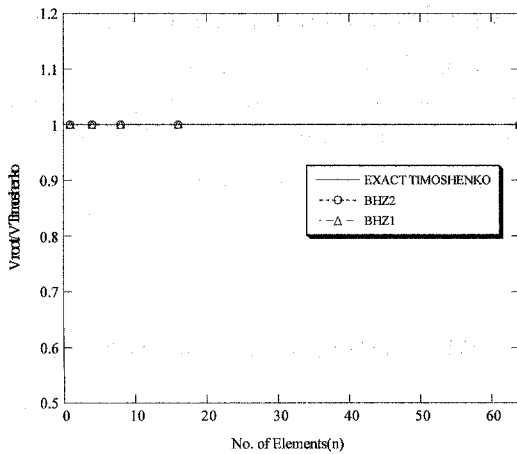


그림 7. Root shear force of cantilevered beam subjected to an tip load as a function of discretization for $a/h = 4$.

3.1.2 Uniformly loaded cantilever beam

균일분포하중을 받는 외팔보(그림 8)의 끝단 변위(그림 9), 뿌리에서의 우력(그림 10) 및 전단력(그림 11)을 계산 하였다. 2절점 보요소(BHZ2)가 빠른 끝단변위의 수렴도를 보여준다. 뿌리에서의 정확한 전단력을 얻기 위하여 16개 이상의 보요소가 필요하다.

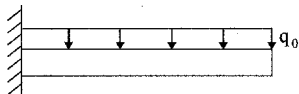


그림 8. Cantilever beam subject to uniform distributed load.

3.2 Stress analysis of simply supported laminated beam

대칭 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ 및 비대칭 $[0^\circ/90^\circ]$ 단순지지 정현하중을 받는 보의 굽힘해석을 통하여 두께방향 응력분포의 정확도를 평가 하였다. 그림 12은 보의 단면비의 변화에 따른 가운데점의 처짐을 보여준다. 대칭 적층보 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ 의 평면응력(σ_x)은 유한요소 해석후 구성방정식에 의하여 구하였고 그림 13에 도시되어 있다. 1차전단이론은 경계면에서 부정확한 평면응력(σ_x)을 예측하나 지그재

그이론은 3차원 탄성해석과 근사한 예측을 한다. 대칭 적층보 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ 의 전단응력(τ_{xz})은 평면응력을 3차원 탄성이론에 대입하여 계산 하였고 그림 14에 도시되어 있다. 지그재그이론은 1차전단이론에 비하여 3차원 탄성해석에 근사한 전단응력 분포를 보여준다. 비대칭 적층보 $[0^\circ/90^\circ]$ 의 평면응력(σ_x)은 그림 15에 도시되어 있고 전단응력(τ_{xz})은 그림 16에 도시되어 있다.

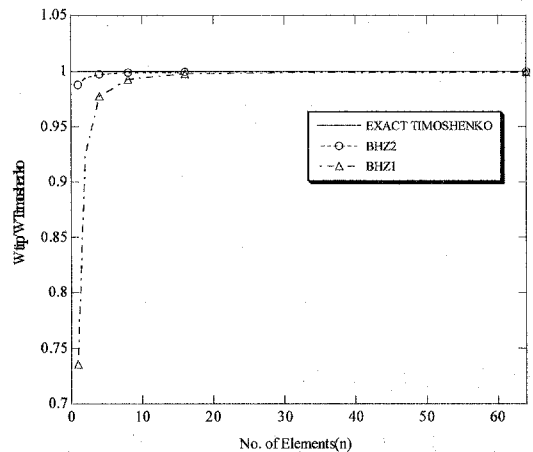


그림 9. Tip deflection of cantilevered beam subjected to an uniform distributed load as a function of discretization for $a/h = 4$.

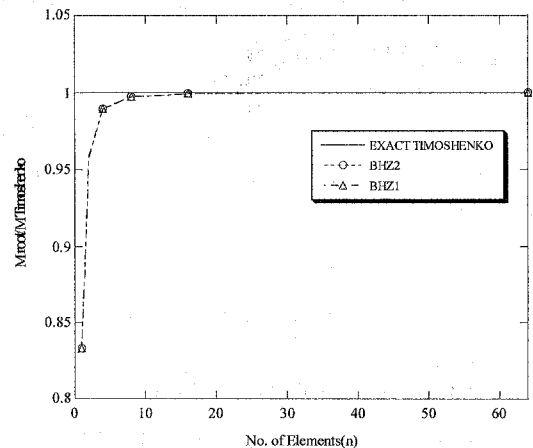


그림 10. Root bending moment of cantilevered beam subjected to an uniform distributed load as a function of discretization for $a/h = 4$.

전단응력(τ_{xz})을 평면응력(σ_x)을 이용하여 후처리하기 위하여 다음의 3차원 탄성 지배방정식을 사용하였다,

$$\frac{\partial \sigma_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(k)}}{\partial z} = 0 \quad (35)$$

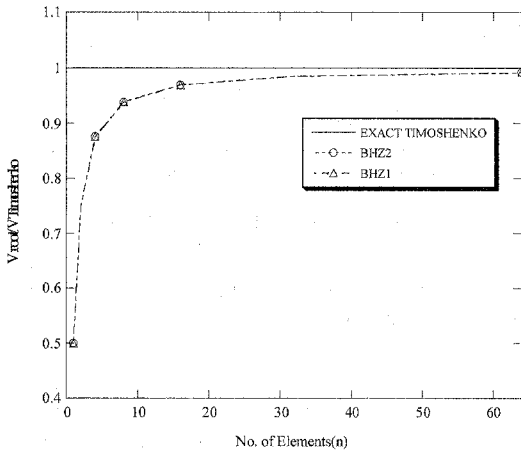


그림 11. Root shear force of cantilevered beam subjected to an uniform distributed load as a function of discretization for $a/h = 4$.

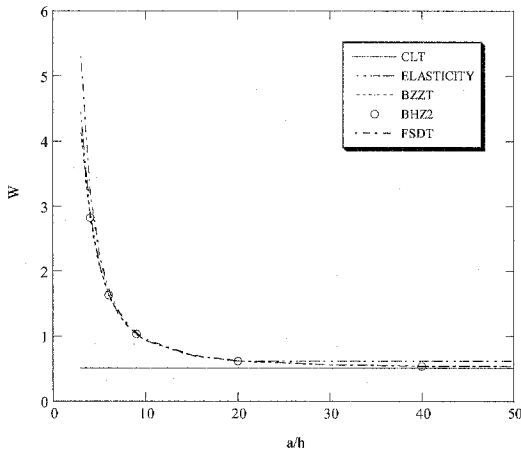


그림 12. Normalized deflection of simply supported sinusoidally loaded laminated beam $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ as a function of aspect ratio(a/h).

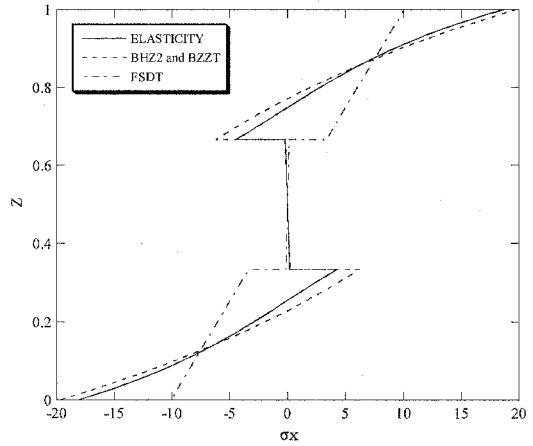


그림 13. Normalized axial stress($\sigma_x(a/2, z)$) of simply supported sinusoidally loaded laminated beam $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ for $a/h = 4$.

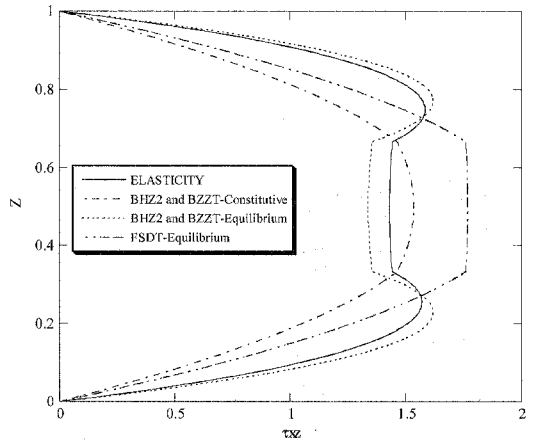


그림 14. Normalized transverse shear stress ($\tau_{xz}(0, z)$) of simply supported sinusoidally loaded laminated beam $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ for $a/h = 4$.

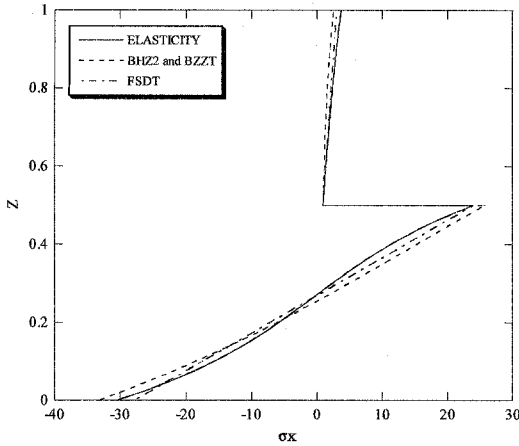


그림 15. Normalized axial stress($\sigma_x(a/2, z)$) of simply supported sinusoidally loaded laminated beam[$0^\circ/90^\circ$] for $a/h = 4$.

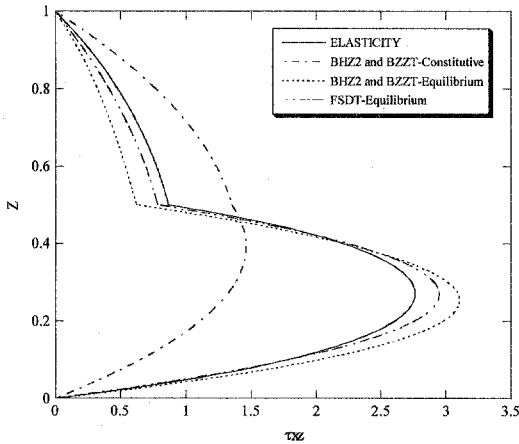


그림 16. Normalized transverse shear stress ($\tau_{xz}(0, z)$) of simply supported sinusoidally loaded laminated beam [$0^\circ/90^\circ$] for $a/h = 4$.

3.3 Damping analysis of laminated beam with viscoelastic layer

고차 지그재그이론과 기하학적상관관계식을 이용하여 개발된 2절점 보 요소를 이용하여 인장 및 압축하중을 받는 점탄성물질이 코어에 십어진 단순지지 및 외팔지지 샌드위치 보의 고유진동수

와 감쇠계수를 계산하였다. Complex eigenvalue method를 이용하여 고유진동을 해석하였으며 EISPACK부프로그램으로 다음을 사용하였다; CBAL, COMHES, COMLRS, CBABK2. 샌드위치 보의 구성은 그림 17에 표시 되어 있다.

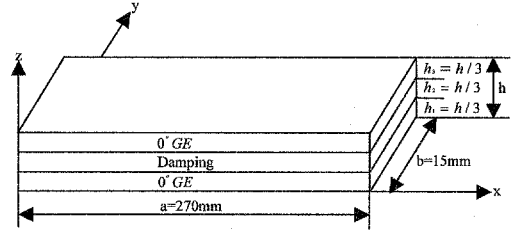


그림 17. 샌드위치 보의 구성.

복합재료판은 glass/epoxy로 구성되었고 탄성 계수는 다음과 같다(참고문헌 [8] 참조).

$$E_x^{(1)} = E_x^{(3)} = 45,540 \text{ N/mm}^2, \quad G_{xz}^{(1)} = G_{xz}^{(3)} = 4,190 \text{ N/mm}^2,$$

$$\nu^{(1)} = \nu^{(3)} = 0.33, \quad \eta_x^{(1)} = \eta_{xz}^{(1)} = \eta_x^{(3)} = \eta_{xz}^{(3)} = 0$$

$$\rho^{(1)} = \rho^{(3)} = 2.04 \times 10^{-9} \text{ N} \cdot \text{sec}^2/\text{mm}^4,$$

Damping 코어는 고무의 특성을 같은 물질로 구성되고 기계적 특성은 다음과 같다(참고문헌 [8] 참조),

$$E_x^{(2)} = 15.9 \text{ N/mm}^2, \quad G_{xz}^{(2)} = 5.5 \text{ N/mm}^2,$$

$$\nu^{(2)} = 0.45,$$

$$\rho^{(2)} = 1.2 \times 10^{-9} \text{ N} \cdot \text{sec}^2/\text{mm}^4,$$

$$\eta_x^{(2)} = \eta_{xz}^{(2)} = 1$$

점탄성물질은 온도와 진동수의 함수이나 많은 점탄성물질이 감쇠계수 1근처에서 광범위한 정점을 갖기 때문에 점탄성코어의 감쇠계수를 1로 가정하였다. 진동수는 아래와 같이 무차원화 되었다.

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{\rho a^4}{D_t}} \quad \rho = \rho^{(1)} h_1 + \rho^{(2)} h_2 + \rho^{(3)} h_3$$

$$D_t = E_x^{(1)} \frac{h_1^3}{12} + E_x^{(3)} \frac{h_3^3}{12} \quad (36)$$

단순지지 경계조건($w=0, N_x=0, M_x=0, P_x=0$)을 만족시키는 보의 해는 다음과 같이 표시된다.

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} U_m e^{i\omega t} \cos \alpha x, w = \sum_{m=1}^{\infty} W_m e^{i\omega t} \sin \alpha x, \phi = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m e^{i\omega t} \cos \alpha x, \alpha = \frac{m\pi}{a} \quad (37)$$

(37)를 운동방정식 (16-18)에 대입하여 정리하면 특성방정식은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} A\alpha^2 & -B\alpha^3 & Q\alpha^2 \\ -B\alpha^3 & D\alpha^4 & -E\alpha^3 \\ Q\alpha^2 & -E\alpha^3 & G\alpha^2 + F \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_m \\ W_m \\ \Phi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} I_0 & -I_1\alpha & H_0 \\ -I_1\alpha & I_0 + I_2\alpha^2 & -H_1\alpha \\ H_0 & -H_1\alpha & H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_m \\ W_m \\ \Phi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

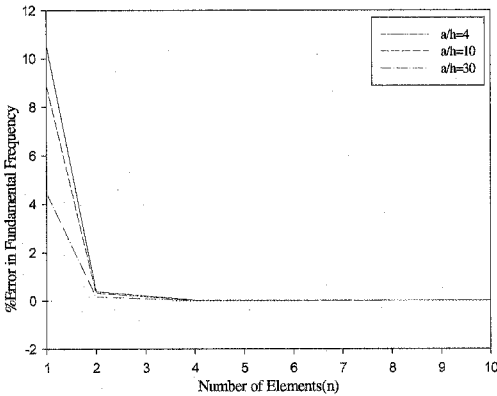


그림 18. 단순지지 샌드위치 보의 이산화 정도에 따른 기본진동수의 %오차.

해석적으로 구한 기본진동수(첫 굽힘)는 $m=1$ 일 때 (38)의 고유진동을 해석하여 계산한다. 그림 5는 본 연구에서 개발한 2절점 보요소를 이용하여 단순지지 샌드위치보의 고유진동수를 계산하고 이산화 정도에 따른 %오차를 보여준다. %오차는 보요소를 사용하여 계산한 기본진동수(첫 굽힘)를 해석적으로 구한 기본진동수의 비로 정의된다. 4개의 보요소를 사용했을 때 %오차는 0.03이하가 된다.

3.3.1 단순지지 샌드위치보의 진동해석

인장 및 압축하중을 받는 점탄성 물질이 코어에 심어진 단순지지 샌드위치보(그림 19 참조)의 고유진동수와 감쇠계수를 10개의 2절점 보요소를 이용하여 계산하였다. 그림 20과 21은 단면비 (a/h)가 30일 때의 점탄성 코어를 가지는 단순지지 샌드위치 보의 고유진동수와 감쇠계수를 보여주는데 인장응력이 증가함에 따라 고유진동수는 증가하는 반면 감쇠계수는 감소하는데 이는 인장하중이 보의 강성계수를 증가시켜 점탄성코어에서의 전단변형을 감소시키고 에너지의 발산을 저하시킨다. 압축응력이 작용할 경우에 고유진동수는 감소하고 1차 굽힘진동수는 압축하중이 90N 일때 0 이 되고 이 하중은 좌굴하중(P_{cr})으로 정의된다. 감쇠계수는 증가하며 1차 감쇠계수는 이 좌굴하중에서 무한대가 된다.

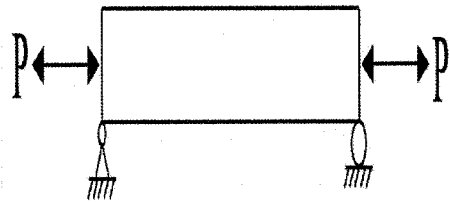


그림 19. 축방향 인장/압축하중을 받는 단순지지 보.

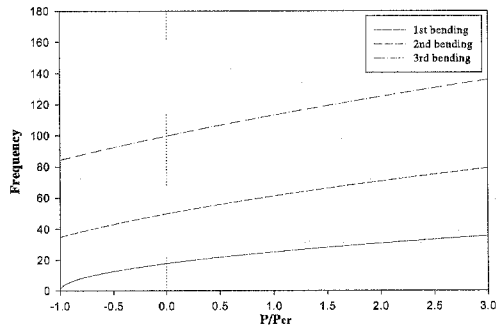


그림 20. 축방향 하중을 받는 점탄성코어를 갖는 단순지지 샌드위치 보의 고유진동수 ($a/h=30$).

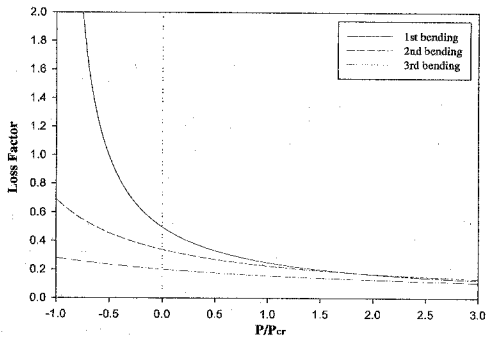


그림 21. 축방향 하중을 받는 점탄성코어를 갖는 단순지지 샌드위치 보의 감쇠계수 ($a/h=30$).

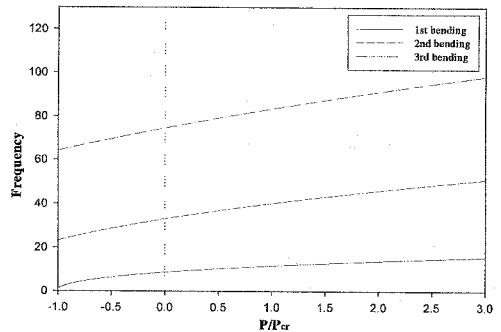


그림 23. 축방향 하중을 받는 점탄성 코어를 갖는 외팔지지 샌드위치 보의 고유진동수 ($a/h=30$).

3.3.2 외팔지지 샌드위치 보의 진동해석

인장 및 압축하중을 받는 점탄성 물질이 코어에 심어진 외팔지지 샌드위치 보(그림 22 참조)의 고유진동수와 감쇠계수를 10개의 2절점 보 요소를 이용하여 계산하였다. 그림 23 와 24 은 단면비가 30일 때의 점탄성 코어를 갖는 외팔지지 샌드위치보의 고유진동수와 감쇠계수를 보여주는데 인장응력이 증가함에 따라 고유진동수는 증가하고 감쇠계수는 감소한다. 압축응력이 작용할 경우에는 고유진동수는 감소하고 감쇠계수는 증가하는데 1차 고유진동수는 압축하중이 $53N$ 일 때 0이되고 감쇠계수는 무한대가 된다.

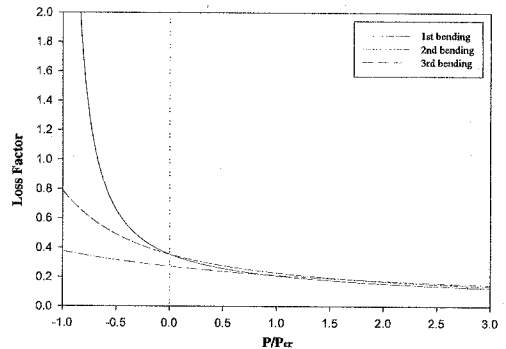


그림 24. 축방향 하중을 받는 점탄성 코어를 갖는 외팔지지 샌드위치 보의 감쇠계수 ($a/h=30$).

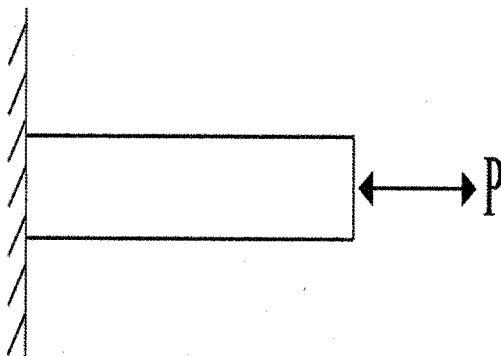


그림 22. 축방향 인장/압축하중을 받는 외팔지지 보.

4. 결 론

3차 지그재그이론과 지배방정식을 이용한 기하학적상관관계식을 이용하여 고차 전단변위를 제거한 2절점 보 요소를 개발하여 축방향 인장 및 압축하중을 받는 점탄성 코어를 가지는 샌드위치 보의 자유진동을 해석하여 고유진동수와 감쇠계수를 계산하였다. 인장하중이 작용할 때 고유진동수는 증가하고 감쇠계수는 감소한다. 압축하중이 작용할 때는 고유진동수는 감소하고 감쇠계수는 증가하였다.

참 고 문 헌

1. Di Taranto, R. A., "Theory of Vibration Bending for Elastic and Viscoelastic Layered Finite-Length Beams." *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 87, 1965, pp. 881-886.
2. Mead, D. J. and Markus, S., "The Forced Vibration of a Three-Layer, Damped Sandwich Beam with Arbitrary Boundary Conditions." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 10, 1969, pp. 163-175.
3. Mead, D. J. and Markus, S., "Loss Factors and Resonant Frequencies of Encastre Damped Sandwich Beams." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 12, 1970, pp. 99-112.
4. Mead, D. J., "A Comparison of Some Equations for the Flexural Vibration of Damped Sandwich Beams." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 83, 1982, pp. 363-377.
5. Averill, R. C., "Static and Dynamic Response of Moderately Thick Laminated Beams with Damage." *Composite Engineering*, Vol. 4, 1994, pp. 381-395.
6. Averill, R. C. and Yip, Y. C., "Development of Simple, Robust Finite Element Based on Refined Theories for Thick Laminated Beams." *Computers & Structures*, Vol. 59, 1996, pp. 529-546.
7. Lee, D. G. and Kosmatka, J. B., "Passively Damped Vibration of Composite Plates with Zig-Zag Elements." *The 41st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, April 3--6, 2000. Paper No. AIAA-2000-1473.
8. Moser, K. and Lumassegger, M., "Increasing the Damping of Flexural Vibrations of Laminated Structures by Incorporation of Soft Intermediate Plies with Minimum Reduction of Stiffness." *Composite Structures*, Vol. 10, 1988, pp. 321-333.