

반응면 기법을 이용한 에어포일 공력형상 최적설계

박영민*, 김유신**, 정진택***, 이장연****

Aerodynamic Shape Optimization of Airfoils Using Response Surface Method

Young Min Park*, Yu-Shin Kim**, Jindeog Chung***, Jangyeon Lee****

Abstract

In this study, aerodynamic shape design of airfoils was performed by using RSM(response surface method) and two-dimensional Navier-Stokes solver. Numerical experiment points were determined by D-optimal method and quadratic response surfaces were constructed by using JMP. For the validations of design method, NACA 64621 airfoil was inversely designed to have aerodynamic characteristics of Bell airfoil. The design method was applied to the aerodynamic design of both smart UAV wing airfoil and low Reynolds rotor-blade airfoil for unmanned helicopter. The optimized airfoils showed improved performance with various constraint conditions.

초 록

본 논문에서는 반응면 기법(response surface method)과 2차원 Navier-Stokes 방정식 해법을 이용하여 에어포일을 설계하였다. 수치 실험점들은 D-optimal 방법을 기반으로 선정하였으며 반응면 함수는 JMP를 이용하여 2차의 함수로 구성하였다. 설계기법의 검증은 NACA 64621 에어포일을 기저로 하여 Bell 에어포일의 공력특성을 갖도록 역설계하여 수행하였다. 설계기법은 스마트 무인기의 장기체공 능력을 위한 에어포일과 무인기용 로터에 적합한 저 Reynolds 에어포일 설계에 적용하였으며 제약조건을 만족하는 우수한 공력특성의 에어포일을 획득할 수 있었다.

키워드 : 에어포일(airfoil), 형상설계(shape design), 반응면 기법(response surface method)

1. 서 론

고정의 및 회전의 항공기의 고성능화와 더불어 복합재료 등의 제작기술이 발달함에 따라 공

기역학적 최적형상을 위한 다양한 설계 기법이 시도되고 있다. 이중 반응면 기법은 수치실험을 통하여 획득한 결과를 토대로 설계변수를 독립변수로 하는 모델식을 만든 후에 이를 최적화하는

* 공력성능그룹/ympark@kari.re.kr

*** 공력성능그룹/jdchung@kari.re.kr

** 스마트무인기개발사업단/genkim@kari.re.kr

**** 항공기술실/jylee@kari.re.kr

방법으로 제한된 수의 수치실험으로 설계공간에서 목적함수를 효율적으로 모사할 수 있도록 통계학적인 기법을 이용한다[1]. 반응면을 이용하는 설계기법은 아래와 같은 특성이 있으며 실제 헬리콥터 등의 에어포일 설계 등에 다양하게 이용되고 있다[2].

- 민감도(sensitivity)를 구할 수 없는 경우에도 최적화가 가능하다.
- 실제실험 및 수치실험에 대하여 설계기법의 적용이 가능하다.
- 입력정보 및 출력정보만 있으면 설계가 가능하므로 기존의 해석도구를 용이하게 이용할 수 있다.
- 다학제간 최적설계 (MDO)로의 확장이 용이하다.
- 설계 공간에 고주파 노이즈 특성이 있는 경우 이를 감쇄시켜, 전역 최적해를 구하는 방향으로 설계가 진행된다.
- Approximation 오차가 존재한다.
- 설계변수의 영역에 민감하게 반응한다.
- 계산시간에 제약이 따른다.

본 논문에서는 위의 특성 중에서 민감도를 이용하지 않고 기존의 해석도구를 용이하게 접합하여 구현할 수 있다는 특성에 착안하여 실제 연구 중인 에어포일에 대하여 반응면 기법을 이용하여 공력특성을 개선하도록 최적설계 하였다.

본문에서는 RSM방법에 대한 설명과 실제 현장에서 접할 수 있는 도구를 이용하여 에어포일을 설계하는 과정을 설명하였다. 설계기법은 스마트 무인기 에어포일을 역설계 하여 검증하였고 구축한 기법은 스마트 무인기 날개용 에어포일의 최적설계 그리고 무인기 로터용 에어포일의 최적설계 과정에 적용하였다.

2. 본 론

2.1 수치적 기법

반응면 함수를 구성하기 위한 공력계수 데이터는 2 차원 Navier-Stokes 방정식 해법을 이용하였다. 사용된 수치적 기법은 공간상으로 중앙차분법을 이용하였으며 시간적분법은 3-Factor Diagonal Scheme 기법을 이용하는 내재적 적분 기법을 이용하였다. 사용된 난류모델은 Spalart-Allmaras 난류모델이며 전유동장을 난류로 가정하였다. 격자계는 C-type 정렬 격자계를 이용하였으며 $y^+=1$ 인 위치에 초기 격자점이 위치하도록 하였다. 2차원 Navier-Stokes 방정식 해법에 대한 검증과정은 참고문헌[3]에 기술되어 있다.

2.2 반응면 기법(Response Surface Method)

반응면 기법은 목적함수 또는 제약조건을 모델링하기 위하여 다항식과 같은 함수를 구하는 통계적 기법이라 할 수 있다. 최적설계에서는 일반적으로 2차 다항식을 이용하여 반응면을 구성하며 n_v 의 설계변수, n_s 개의 실험횟수를 가정하면 반응면은 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$y^{(p)} = c_0 + \sum_i c_{ix} x_i^{(p)} + \sum_{1 \leq i < j \leq n_v} c_{ij} x_i^{(p)} x_j^{(p)} + \epsilon, p = 1, \dots, n_s \quad (1)$$

위의 회귀모델은 overdetermined 행렬 형태로 써 다시 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$y = Xc$$

위의 식에서 회귀행렬 c 는 식(2)와 같이 최소자승법(least square method)을 이용하여 구할 수 있으며 이를 위한 최소의 회귀계수 n_{rc} 는 $(n_v + 1)(n_v + 2)/2$ 로 정의될 수 있다.

$$c = (X^T X)^{-1} X^T y \quad (2)$$

실험계획법에 의하면 n_v 개의 설계변수에 대한 이동변위는 상한 및 하한 경계에 의하여 결정된다. 본 논문에서는 일반적으로 많이 이용되는 D-optimal 조건을 만족하는 3-level(-1,0,1) factorial design 방법을 이용하여 수치 실험점들을 결정하였다.

반응면 함수의 정확도 및 불확실성을 나타내

기 위하여 보통 통계적 파라미터를 이용한다. 대표적인 계수로는 결정계수(R^2 , coefficient of determination)을 들 수 있으며 회귀방정식이 데이터를 만족하는 정도에 대한 지표가 된다.

$$R^2 = \frac{SSR}{SSTO} = 1 - \frac{SSE}{SSTO} \quad (3)$$

SSTO : total sum of squares

SSR : regression sum of squares

SSE : error sum of squares

그러나 위의 계수만으로는 회귀모델의 정확성을 점검하기 어려우므로 보통 R^2_{adj} 을 주로 이용하여 아래와 같이 표기된다.

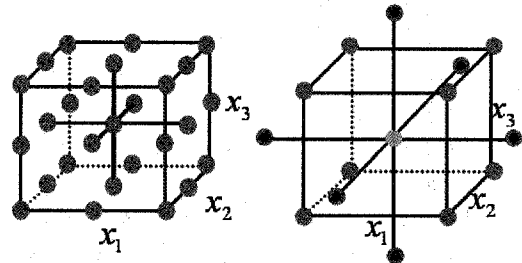
$$R^2_{adj} = 1 - \left(\frac{n_s - 1}{n_s - n_{rc}} \right) (1 - R^2) \quad (4)$$

2.3 실험점 선택

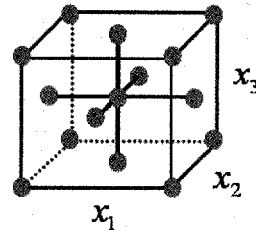
설계 공간상에서의 적절한 실험점의 결정은 반응면 함수의 정확성에 큰 영향을 미친다. 수치 계산의 안정성을 위하여 설계변수의 이동범위는 -1에서 1까지 값으로 표현될 수 있다. 수치 실험점을 선택하는 방법은 각각의 설계변수의 상한과 하한 및 중간점을 포함하는 모든 조합을 고려하는 full factorial 방법, 그리고 상한과 하한으로 이루어진 조합과 중심점 및 경계외부의 일부점을 포함하는 central composite experimental design 방법 등이 있다. 그러나 이들 방법은 각각 3 level 설계변수인 경우 3^n , $2^n + 2n + 1$ 개의 실험점이 요구되므로 설계변수가 10개 이상이면 계산량이 과다하여 계산이 불가능하다. 본 논문에서는 이러한 문제점을 피할 수 있는 D-optimal 방법을 이용하였다. D-optimal 방법은 $|X'|$ 를 최대로 하는 실험점들의 집합을 찾는 방법으로 일반적으로 central composite experimental design 방법보다 적은 수의 실험으로도 양호한 결과를 낼 수 있다. 설계변수가 n_v 개인 경우 2차원 반응면 함수를 구성하는 계수의 수는 $(n_v$

$+1)(n_v+2)/2$ 개 이므로 이보다 큰 수 이상의 수치 계산을 수행하면 반응면을 구성할 수 있다. 일반적으로 반응면을 구성하기 위한 적정 계산수는 방정식 구성을 위한 최소수의 1.5배에서 2배이면 적합하다고 알려져 있다[4,5].

그림 1은 각각의 방법에 대하여 설계변수가 3개인 경우 실험점의 분포를 보이고 있다. 그림에서 full factorial method, central composite method, D-optimal method에 대하여 요구되는 최소 실험점의 수는 각각 27회, 15회, 10회이다.



(a) full factorial method (b) central composite method



(c) D-optimal method

그림 1. 설계변수 3개인 경우의 실험점 선택방법.

2.4 형상함수(Shape Function)

에어포일의 형상변화는 Hicks and Henne[6]의 함수를 이용하였으며 아래와 같은 함수들의 선형 조합을 통해 표현이 가능하다.

$$y = y_{base} + \sum_{k=1}^{n_s} w_k f_k, \quad f_k = \sin^3 [\pi x^{e(k)}] \quad (5)$$

$$e(k) = \frac{\ln(0.5)}{\ln(x_k)}, \quad f_k = \sqrt{x} \frac{(1-x)}{e^{(kx)}}$$

위식에서 x_k 는 sin 함수의 최대 위치 x지점을 의미한다. 아래의 그림 2는 설계변수가 상단 및

하단 각각 7개인 경우에 대하여 Hicks and Henne 형상함수 분포를 이용한 에어포일의 변형을 보이고 있다. 일반적인 Hicks and Henne 함수의 경우 끝단에서 완만한 형태의 곡선으로 표현되나 본 논문에서는 앞전에서의 형상함수를 대칭으로 끝단에 이용함으로써 끝단의 형상변화 폭에 여유를 두었다.

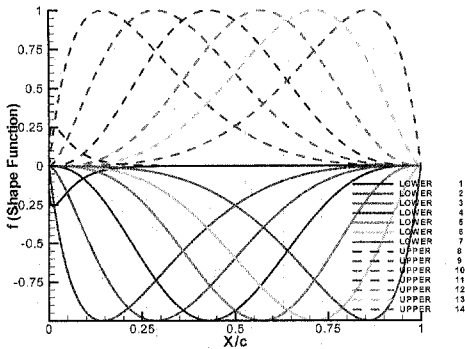


그림 2. 형상함수 분포(14 설계변수).

2.5 설계 흐름도

본 논문에서 에어포일의 설계 단계는 크게 다음과 같은 순서로 진행하였다.

- 1) 설계변수의 영역결정
- 2) DOE를 이용한 수치 실험점 구성 - JMP
- 3) 설계변수에 따른 형상 변화와 유동해석 - 2차원 Navier-Stokes 해석도구
- 4) 반응면 구성 - JMP
- 5) 최적형상 결정 - DOT

설계과정에서 우선 설계변수 및 설계영역을 설정하였다. 설계변수는 모두 상하단 14개로 하였으며 각 설계변수에 대한 설계영역은 평균적으로 코드길이의 1.5% 내외로 설정하였다. 실험점의 선택 및 반응면의 구성은 JMP[7]를 이용하여 구성하였으며 반응면이 구축된 후 이를 이용한 최적형상은 DOT[8]를 이용하여 결정하였다(그림 3). 계산과정에서는 형상변화에 따른 $C_{d_{min}}$, C_{l_0} , C_{m_0} , $C_f^{3/2}/C_d$, Cl/Cd , t/c , camber, 뒷전 각도에

대한 데이터베이스를 구축하여 반응면을 결정하였다. 최적형상은 DOT를 이용하였으며 최적화기법은 제약조건이 있는 경우에 이용되는 SQP (Sequential Quadratic Programming) 방법을 이용하였다.

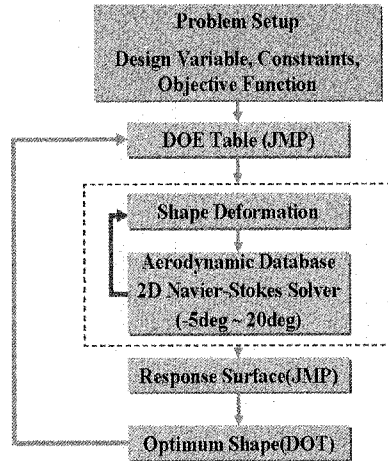


그림 3. RSM 및 2차원 Navier-Stokes 해법을 이용한 설계 과정.

3. 결과 및 토론

3.1 설계기법의 검증

본 논문에서 사용되는 설계기법을 검증하기 위하여 Bell사에서 설계한 무인기용 에어포일의 형상을 도출하도록 역설계를 시도하였다. Bell 에어포일은 앞서 설명한 유동조건에서 유동해석 도구를 이용하여 해석하면 아래의 표 1과 같은 공력특성을 갖는다.

표 1. Bell 에어포일과 역설계 에어포일의 공력계수 특성 비교

	Bell Airfoil	Inverse Design
$C_{d_{min}}$	0.0145	0.0139
C_{l_0}	0.8616	0.9094
C_{m_0}	-0.1790	-0.1715
$C_{l_{max}}$	1.738	1.734
$C_l/C_{d_{max}}$	60.23	60.26
$C_l^{1.5}/C_{d_{max}}$	70.01	69.84

Bell사에서 설계한 에어포일은 양력특성 면에서 우수하나 캠버가 과다하게 설정되어있어 기수 내림 모멘트 특성이 강하고 실속이 조기에 발생하는 특성이 있다. 설계조건에서 Bell사 에어포일의 공력특성을 만족하도록 제약조건을 설정하고 NACA 64621을 기저 에어포일로 하여 설계를 수행하여 그림 4와 같은 형상을 구할 수 있었다.

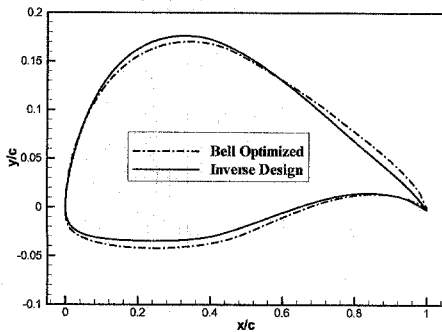


그림 4. Bell 에어포일과 역설계후 에어포일 형상비교

그림을 보면 설계 에어포일이 Bell사에서 설계한 에어포일과 매우 유사하므로 본 설계방법이 타당함을 알 수 있다.

표 2. 공력계수별 반응면 오차 비교

	R^2	R_{adjust}^2	RMS err
$C_{d_{min}}$	0.99	0.99	2.4E-5
C_{l_0}	0.99	0.99	2.0E-3
C_{m_0}	0.99	0.99	3.7E-4
t/c	0.99	0.99	2.5E-4

사용된 반응면의 정확도를 점검할 수 있는 R^2 , R_{adjust}^2 또한 표 2와 같이 매우 우수(≈ 1.0)하게 나타나 본 논문에서 사용된 반응면이 정확하게 결정되었음을 알 수 있다.

3.2 목적함수 및 설계조건

앞서 설명한 최적설계 기법을 이용하여 스마트

무인기의 장기체공 능력을 위한 에어포일과 무인기 로터를 위한 저 Reynolds 로터 에어포일을 설계하였다.

먼저 스마트 무인기의 장기체공을 위한 설계의 경우 목적 함수를 endurance factor ($Cl^{3/2}/Cd_{max}$)로 설정하였고 70 이상의 높은 값을 갖도록 하였다. 설계상의 제약조건은 조건에 맞는 Cd_{min} , Cl_0 , Cm_0 의 값의 한계를 넘지 않도록 하였다. 특히 t/c는 0.21 이상의 값을 유지하도록 하여 날개의 강성을 유지하도록 하였다. V-22의 t/c는 약 0.24이며 0.24이상에서는 동체와 나셀의 간섭항력이 증가하여 구동시스템 및 연료의 중량을 증가시켜야 한다고 알려져 있다. 에어포일의 실속 특성을 관찰하기 위하여 받음각 -5도부터 20도까지 26번의 계산을 수행하므로 총 3,354 (129 x 26) 번의 반복계산이 요구된다. 계산시간은 1회당 10분 정도 소요되므로 총 33,540분이 소요되나 다수의 프로세서를 사용하므로 비교적 빠른 시간에 결과를 구할 수 있었다.

무인기 로터용 저 Reynolds 에어포일 설계의 목표는 제자리 비행성능 향상에 있으므로 제자리 비행 성능의 지표가 되는 F.M.(figure of merit) 값을 최대화할 수 있도록 아래의 수식에서 $Cl^{3/2}/Cd$ 값이 최대가 되도록 설계목표를 설정하였다.

$$F.M. = \frac{1}{1 + \frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{\sigma} \frac{Cl^{3/2}}{cd}}} \quad (6)$$

이를 위해 현재 상태의 $Cl^{3/2}/Cd_{max}$ 값을 유지하고 특정 받음각(8도~12도) 영역에서 항력계수의 평균값이 최소가 될 수 있도록 설계목표를 설정하였다. 설계과정에서 t/c 값은 기저 에어포일의 값을 초과하지 않도록 하였으며 각각 제약조건으로 Cd_{min} , Cl_0 , Cm_0 을 조절하여 기저 에어포일의 특성을 유지하도록 하였다.

3.2 스마트 무인기 날개용 에어포일 설계

반응면 기법을 이용하여 스마트 무인기의 날

개를 설계하였다. 모든 계산에 사용된 유동조건은 고도 10,000ft 순항조건인 Mach 수 0.21, Re 수 $3.71E6$ 인 조건으로 하였으며 동일한 수치적 기법 및 격자계를 사용하였다.

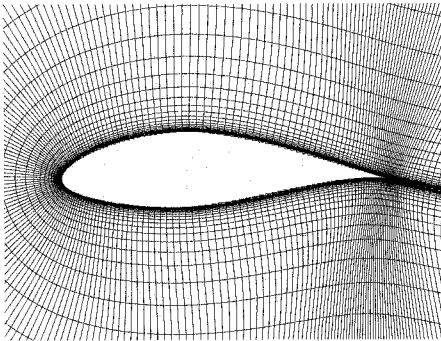


그림 5. NACA 64621 에어포일 및 계산용 격자계.

초기 설계조건은 C_{l_0} 값을 0.9 이상인 고양력 조건을 목표로 하였으나 만족하는 $C_{d_{min}}$ 이 존재하지 않아 0.7 이상으로 수정하였다. 기저 에어포일은 검증과정에서 사용한 에어포일과 동일한 NACA 64621(301x51)을 사용하였으며 설계에 사용된 제약조건을 정리하면 아래와 같다(그림 5).

● 목적함수

$$Cl^{3/2}/Cd_{max} \text{ 최대화 (70 이상)}$$

● 제약조건

$$Cd_{min} < 0.013, Cl_0 > 0.70,$$

$$Cm_0 > -0.19, t/c > 0.21$$

그림 6은 설계된 형상을 기저 에어포일과 Bell사에서 설계한 에어포일을 비교한 그림으로 두 에어포일의 중간에서 최적형상이 결정되었음을 확인할 수 있다. 형상은 전반적으로 뒷전으로 갈수록 얇아지고 Bell사에서 설계한 에어포일보다 약간 캠버가 감소하였다. 설계된 에어포일의 공력특성을 아래의 표 3에 비교하였다.

표 3을 보면 RSM으로 예측한 공력계수의 분포가 실제 설계된 에어포일의 공력계수와 거의

일치하는 것을 확인할 수 있다. 설계된 에어포일은 기저 에어포일인 NACA 64621 보다 Cl/Cd_{max} 는 약 8%, $Cl^{3/2}/Cd_{max}$ 는 약 10% 정도 개선되었다. 특히 Cd_{min} 값은 기저 에어포일과 비교하여 거의 동일한 값을 유지함으로써 우수한 항력특성을 보였다.

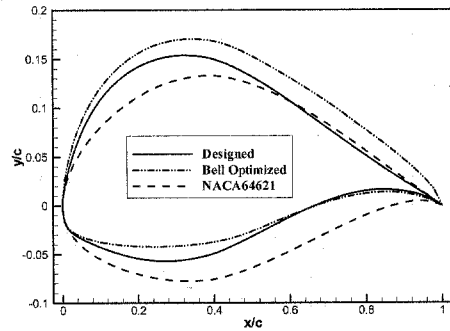


그림 6. 스마트 무인기용 에어포일 설계결과.

설계된 에어포일은 그림에서 보듯이 뒷전으로 갈수록 두께가 급격하게 감소함을 확인할 수 있다. 이러한 두께분포는 구조적으로 문제가 발생할 수 있고 제작 또한 어려우므로 뒷전각에 대한 제약조건을 추가하여 재설계를 수행하였다.

표 3. NACA 64621, Bell 에어포일 그리고 설계 에어포일의 공력계수 특성비교.

	NACA 64621	Bell Airfoil	RSM	Design
$C_{d_{min}}$	0.0123	0.0145	0.0131	0.0128
C_{l_0}	0.4528	0.8616	0.7004	0.6994
C_{m_0}	-0.1094	-0.1790	-0.1396	-0.139
$C_{l_{max}}$	1.6086	1.738	-	1.778
Cl/Cd_{max}	58.16	60.16	62.22	62.49
$Cl^{1.5}/Cd_{max}$	63.92	70.01	73.52	72.60

계산결과 양력계수 및 모멘트 계수는 특징한 경향성을 보이지 않았으나 $Cl^{3/2}/Cd_{max}$ 및 Cl/Cd_{max} 는 뒷전각이 증가할수록 성능이 저하되는 것을 관찰할 수 있었다. 따라서 허용 가능한

한도 내에서 뒷전각을 최소화하는 방법이 효과적이라 할 수 있다. 본 논문에서는 실제 날개제작을 고려하여 뒷전각이 10도인 경우를 최적의 형상으로 설정하였다(그림 7).

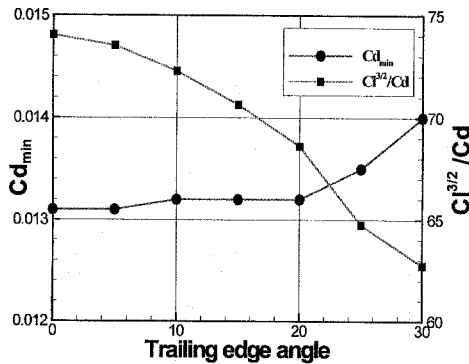


그림 7. 뒷전각도에 따른 공력특성비교.

3.3 무인기 로터용 저 Re 에어포일 설계

반응면 기법을 이용하여 무인 헬리콥터 로터 블레이드에 적합한 익형을 설계하였다. 설계 에어포일은 전체적인 로터의 성능개선을 볼 수 있도록 0.75R 지점을 선택하여 설계하였다. 계산에 사용된 유동조건은 0.75R 지점에서의 마하수와 Reynolds수인 0.29와 0.9E6으로 설정하였다.

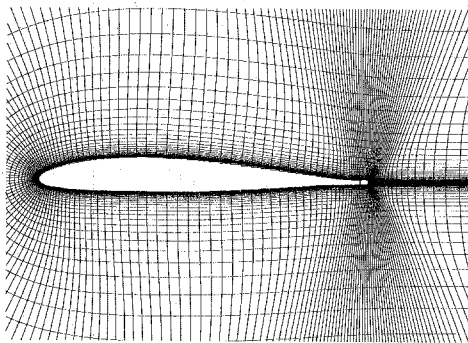


그림 8. RMAX용 에어포일 및 계산용 격자계.

그림 8은 YAMAHA사의 RMAX 무인 헬리콥터에 이용되는 에어포일의 형상과 정렬 격자계(261x61)를 보이고 있다. 주 양력부분의 설계를

위해서 다음과 같은 목적함수에 대하여 설계를 수행하였다.

- 목적함수

C_d 최소화 (받음각 8도~14도 영역)

- 제약조건

$C_{d_{min}} < 0.012$, $Cl^{3/2}/C_{d_{max}} > 61$,

$Cl_0 > 0.35$, $C_{m_0} > -0.07$, $t/c > 0.10$

그림 9는 설계 전과 설계 후의 익형을 도시한 그림으로 실속특성을 개선하기 위하여 앞전이 droop 형상과 유사해지고 캠버가 다소 증가했음을 관찰할 수 있다. 설계 후 에어포일은 공력계수 특성은 표 4에 나타내었다. 표를 보면 $Cl^{3/2}/C_{d_{max}}$ 값이 약 18% 정도 증가하였고 Cl_{max} 또한 1.25에서 약 15% 정도 증가하였다. 관심영역에서 C_d 값의 평균은 초기에 0.034에서 설계 후 약 10%정도 감소하였다.

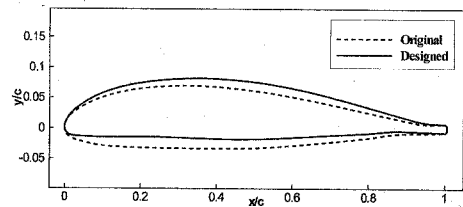


그림 9. RMAX 익형의 최적 설계 결과.

표 4. RMAX 에어포일과 설계 에어포일의 공력계수 특성비교.

	RMAX	RSM	Design
$C_{d_{min}}$	0.0120	0.0120	0.0122
C_{l_0}	0.1223	0.2990	0.2982
C_{m_0}	-0.0149	-0.0543	-0.0503
Cl_{max}	1.252	1.385	1.438
$C_l/C_{d_{max}}$	50.94	58.96	57.11
$Cl^{3/2}/C_{d_{max}}$	52.05	62.81	61.66

그림 10은 설계 에어포일의 양력 및 항력계수를 도시한 그림으로 8도와 12도 영역에서 항력계수가 기존 에어포일에 비교하여 다소 감소하였음을 확인할 수 있다. 양력계수 또한 캠버의 증가

로 인해 초기 에어포일보다 높은 값을 갖는다. 이러한 특성으로 인하여 $C_l/C_{d_{max}}$ 의 경우 약 12% 정도 개선될 수 있었다.

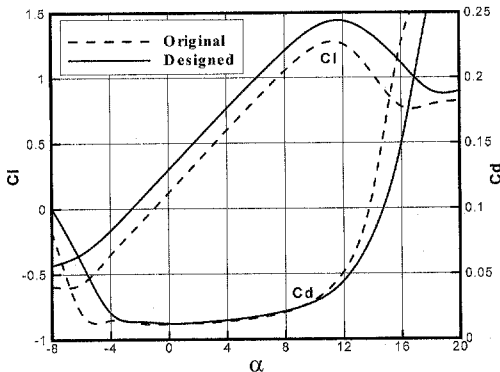


그림 10. RMAX 및 설계 에어포일의 양력 및 항력계수 비교

4. 결 론

본 연구에서는 반응면 기법과 2차원 Navier-Stokes 방정식 해법을 이용하여 에어포일을 최적 설계하였다. 설계기법의 검증은 Bell 에어포일을 역설계하여 본 설계방법의 정확성을 점검하였다. 반응면 구성을 위한 수치 실험점의 분포결정 과정이나 반응면 함수의 구성은 JMP의 D-optimal 방법을 이용하였으며 최적형상은 DOT의 SQP 방법을 이용하여 결정하였다. 최적설계 기법은 장기체공을 위한 스마트 무인기 날개 에어포일과 무인기 로터용 저 Reynolds 에어포일에 대하여 적용하였으며 공력특성이 우수한 에어포일 형상을 획득할 수 있었다.

본 논문에서 이용된 설계기법은 향후 3차원 형상에 적용하여 보다 실질적인 공력형상 최적설계에 이용할 계획이다.

참 고 문 헌

1. R. H. Myers, and D. C. Montgomery, "Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed

- Experiment," John Wiley & sons, 1995.

2. H. Sun, Y. Kim, S. Lee and D. Lee, "Aerodynamic Design of Helicopter Rotor Blade in Forward Flight using Response Surface Methodology," 58th AHS Forum, Montreal, Canada, 2002.
3. 박영민 외, "CFD를 이용한 V-22 프로토타입 에어포일의 공력DB 구축," SUDC-ED-B21-02-001-R0, 2003.
4. G. Venter, R. T. Haftka, and J. H. Starnes, Jr. "Construction of Response Surface for Design Optimization Applications," AIAA-96-4040-CP.
5. A. A. Giunta, " Aircraft Multidisciplinary Design Optimization Using Design of Experimental Theory and Response Surface Modeling Methods," Ph. D. Dissertation, Department of Aerospace Engineering, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, 1997.
6. R. M. Hicks and P. A. Herne, "Wing Design by Numerical Optimization," *Journal of Aircraft*, Vol. 15, No 7, 1978.
7. JMP user's guide, SAS Institute Inc. 2002.
8. DOT user's manual, Vanderplaats Research & Development Inc. 1995.