

극초음속 유동장의 경계층 해석

Boundary Layer Analysis in a Hypersonic Flow Field

손창현* 최 승* 문수연* 김재영** 이열화**
 Sohn, Chang-Hyun Choi, Seung Moon, Su-Yuon Kim, Jae-Yung Lee, Yul-Hwa

ABSTRACT

Matching inviscid and boundary layer methods are developed for analysis of hypersonic flow with thick boundary layer. The new equations match all the boundary layer properties with a variation in the inviscid solution near the edge, except for the normal velocity. Computational comparison are performed for incompressible and compressible flows over a flat plate. Results from the present method are compared with Navier-Stokes solutions. The present results are in good agreement with Navier-Stokes solutions. They show that the new technique can provide improved predictions of heating rates and skin friction predictions for preliminary design of vehicles where shear layers and entropy layer swallowing are important for preliminary design.

주요기술용어(주제어) : Matching inviscid and boundary layer methods(비점성 유동장과 경계층 방정식의 결합 방법), Hypersonic flow(극초음속), Numerical analysis(수치해석), Incompressible flows(비압축성 유동), Compressible flows(압축성 유동), Turbulent flow(난류 유동)

1. 머리말

극초음속 비행체 개발을 위하여 공기와의 마찰로 인한 구조물에 미치는 온도 상승과 그에 따른 특이현상을 정확히 예측하는 것은 매우 중요한 일이다. 비행체에 발생하는 열과 특이 현상을 정확히 예측해야만 비행체를 열에너지로부터 보호할 수 있고 안정성을 확보할 수 있기 때문이다. 그러나 극초음속 비행 상태에서 일어나는 공기 가열 현상 및 특이 현상은

극초음속 비행 상태에서 일어나기 때문에 그 비행 조건과 같은 조건에서 실험적으로 해석하기에는 너무나 막대한 비용과 시간이 필요하게 된다. 따라서 설계단계에서는 이들 현상을 예측할 수 있는 전산 유동 해석 방법을 사용하여 설계를 수행하는 것이 필요하다.

극초음속 비행체의 높은 운동 에너지는 충격파를 발생시키고, 충격파 이후 기체의 내부 에너지로 변환하여 유동장내에서 높은 온도로 가열되어 유동장내에 존재하는 분자 구성비 및 물질적 특성에 큰 영향을 미치게 된다. 한 예로 미국에서 개발된 우주 왕복선의 경우 안정된 비행 자세를 유지하기 위한 제어면의 트림(trim) 각이 열량적 완전기체 가정 하에 예측한 값의 두 배 이상으로 되어야 하는 문제를 일으키기도 한다.^[1] 따라서 이에 관한 연구는 미국 등 항공우주

† 2004년 5월 15일 접수~2004년 7월 12일 심사완료

* 경북대학교(Kyungpook National University)

** 국방과학연구소(ADD)

주저자 이메일 : chsohn@knu.ac.kr

선진국에서 많은 연구가 이루어져왔다.

평형 화학반응이 포함된 7종의 경계층 방정식 해석에서는 경계층 끝단에서의 와류(vorticity)를 전혀 고려하지 못한다. 그러나 극초음속 유동에서 강한 충격파를 지난 유동은 손실로 인해 엔트로피 구배가 심하고 엔트로피의 구배는 큰 와류(vorticity)를 생성하게 된다. 더욱이 고도가 높은 곳에서의 비행 조건은 매우 낮은 밀도를 가지기 때문에 Reynolds 수가 낮고 따라서 경계층의 두께가 매우 증가하여 높은 Reynold 수 가정 하에 사용되어지는 기존 경계층 해석은 정확한 표면 마찰 계수와 열 발생량을 구하는데 있어서 많은 오차를 유발하게 된다.^[2,3,4]

본 연구에서는 경계층 끝단에서의 와류(vorticity)를 고려할 수 있는 비점성 유동장과 경계층방정식을 결합하는 방법을^[5] 사용하여, 경계층 끝단의 와류(vorticity) 영향을 전혀 고려하지 못하는 기존의 경계층 방정식보다 표면 마찰 계수와 열 발생량 예측의 정확도를 높이고자 한다.

2. 비점성-경계층 결합 방법

기본개념을 이해하기 위해 2차원, 비압축성, 층류유동에 대해 살펴보면, 비점성 방정식은 아래와 같이 된다.

$$\text{Continuity} \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\text{X-momentum} \quad U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2)$$

$$\text{Y-momentum} \quad U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (3)$$

경계조건은 다음과 같다.

$$y=0 \text{ 일때 } V(x, 0)=0$$

$y=\infty$ 일때 $U^2 + V^2 = U_\infty^2 + V_\infty^2$ 이 된다. 여기서 대문자 U, V는 비점성 방정식의 속도를 나타낸다.

기존의 층류 경계층 방정식은 다음과 같다.

$$\text{Continuity} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$\text{X-momentum} \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (5)$$

$$\text{Y-momentum} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

기존의 경계층방정식 이론은 식 (2)에서 비점성 속도 구배 $\partial U/\partial y$ 의 항은 무시하여 식 (7)과 같이 적용하며, 경계층의 X-운동량 방정식에 적용하면 (8)식과 같이 된다.

$$U \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} \quad (7)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} \quad (8)$$

경계 조건은 $y=0$ 일때 $u(x, 0)=0$ and $v(x, 0)=0$

$y=\infty$ 일때 $u=U(x, 0)$ 이다.

경계층 방정식에서의 소문자 u, v는 경계층의 속도 값을 나타내고, $y \geq \delta$ 에서는 $u=U(x, y)$, $v=V(x, y)$ 이 된다.

비점성 유동장과 경계층방정식을 결합하는 방법은 식 (2)의 $\partial U/\partial y$ 의 항을 무시하지 않고 식 (5)에 대입하며, 그 결과는 (9)식이 된다.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \quad (9)$$

(2)식은 점성의 항을 생략한 비점성 운동량 방정식이며, 만일 (2)식에서 y 방향의 소산항인 이차미분항인 점성 항을 생략하지 않고 (5)식에 대입하면 (10)식과 같이 쓸 수 있다.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (10)$$

여기서 수직속도성분은 (1)식을 적분하여 식 (11)

과 같이 구한다.

$$\bar{V} = \bar{V}_w(x) - \int_0^y \frac{\partial U}{\partial x} dy \quad (11)$$

$\bar{V}_w(x)$ 를 벽면에서의 비점성 배제(inviscid transpiration)속도라 정의하고, $V(x, 0) = V_w(x)$ 이 된다.

$\bar{V}_w(x)$ 는 식 (4)을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\bar{V}_w(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\delta (U-u) dy \quad (12)$$

경계층 모멘텀 두께(boundary layer momentum thickness)는 식 (13)을 이용하여 구할 수 있다.

$$\theta_m = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e U_e} (1 - \frac{u}{U_e}) dy \quad (13)$$

식 (10)은 $\eta = y \sqrt{\frac{U_w}{x\nu}}$, $\xi = \sqrt{\frac{x}{L}}$ 로 정의 하여 좌표 변환한 후에 풀었다. 여기서 U_w 는 $y=0$ 에서의 비점성 속도값이다. 이와 같은 좌표 변환은 x 의 값이 증가 할수록 계산하는 경계층의 두께도 함께 증가하도록 한 것이다.

3. 결과 및 고찰

가. 비압축성 유동 해석

프로그램의 정확성을 확인하기 위하여 가장 간단한 경우인 비압축성 층류 평판의 경계층을 계산하였다. 계산 조건으로 레이놀즈 수 $Re=10^6$ 으로 사용하였고, 비점성 속도분포는 벽면에서 일정한 기울기를 갖는 식 $U/U_w=1+60(y/L)$ 을 적용하였다.

η 방향으로는 100개의 격자점을 사용하였고, Δx 는 0.01(m)로 하였으며 η 의 최대값은 50으로 하였다. 벽면으로부터의 격자점은 등 간격을 사용하였으며 수렴 조건은 $10E-5$ 으로 주었다.

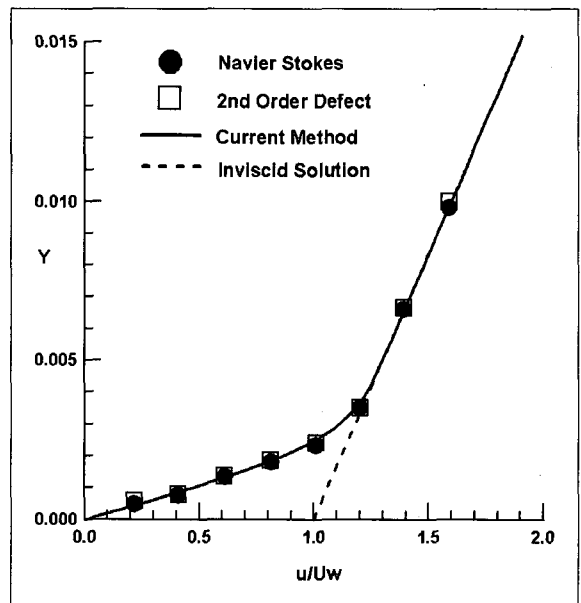
그림 1은 x/L 이 0.9인 곳에서의 속도 분포를 비교한 것으로 비압축성 유체의 층류 평판 유동에서 경계층 방정식에 의해 속도 분포가 기존의 Navier Stokes방정식과 2nd Order Defect Method^[2]와 정확히 일치하는 것을 알 수 있다. 일반 경계층 유동 해석의 경우는 식 (8)을 사용함으로써 $\partial U/\partial y$ 의 영향을 고려할 수 없으나, 본 방법에서는 식 (9)을 사용하여 경계층 그림 2는 평판에서의 표면 마찰 계수의 값을 비교한 것이다. Navier Stokes방정식과 2nd Order Defect Method와 정확히 일치하는 것을 알 수 있다. 기존의 1st Order 경계층 해석에서는 Blasius의 이론적인 결과인 0.332라는 일정한 값을 나타내는데, 이 값은 계산 결과에서 $x/L=0$ 에서의 값과 일치한다.

그림 3과 4는 비압축성이며 레이놀즈 수 $Re=10^6$ 이고 비점성 속도분포는 사인(sinusoidal) 분포의 속도를 가지는 다음의 경우에 대해 속도 분포와 표면 마찰 계수를 비교하였다.

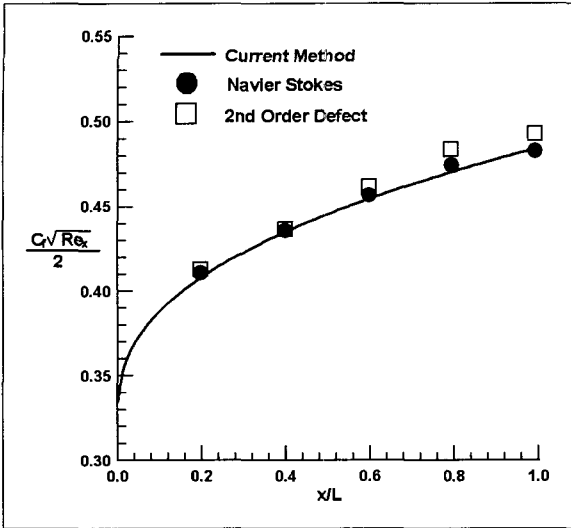
계산 조건 :

$$U/U_w=1+0.5 \sin^2[50\pi(y/L)] \text{ for } y/L \leq 0.01$$

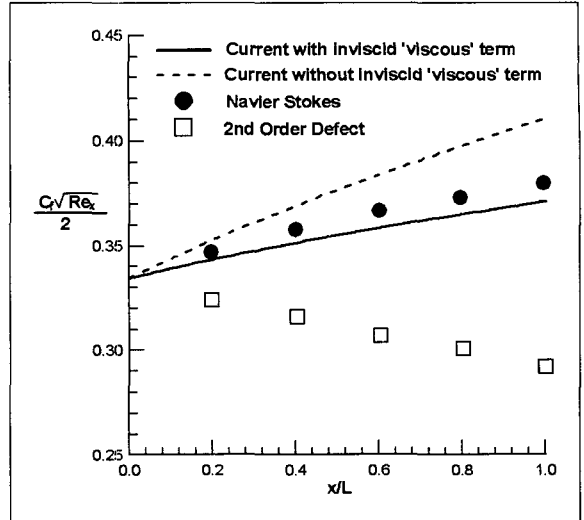
$$U/U_w=1.5 \text{ for } y/L \geq 0.0$$



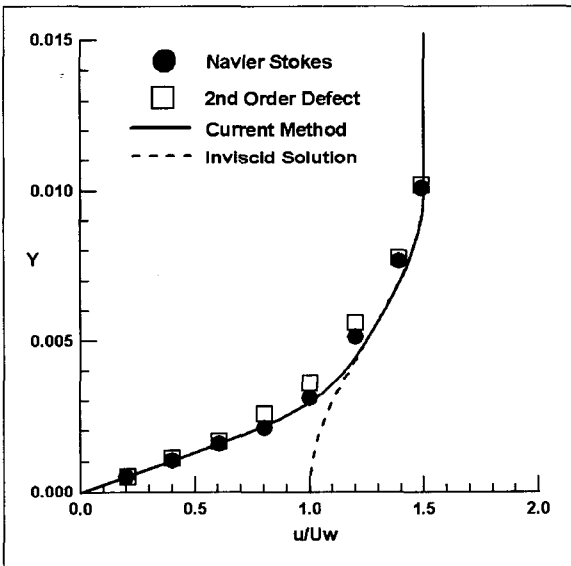
[그림 1] Velocity profiles for constant shear flow at $x/L=0.9$



[그림 2] Skin-friction coefficient for constant shear flow

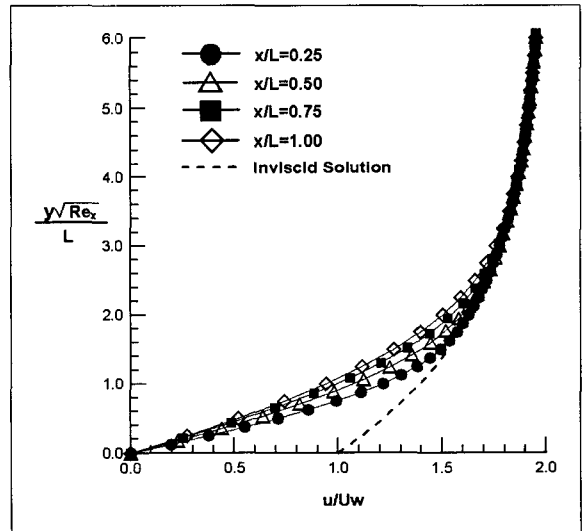


[그림 4] Skin-friction coefficient for sinusoidal shear flow



[그림 3] Velocity profiles for sinusoidal shear flow at $x/L=0.9$

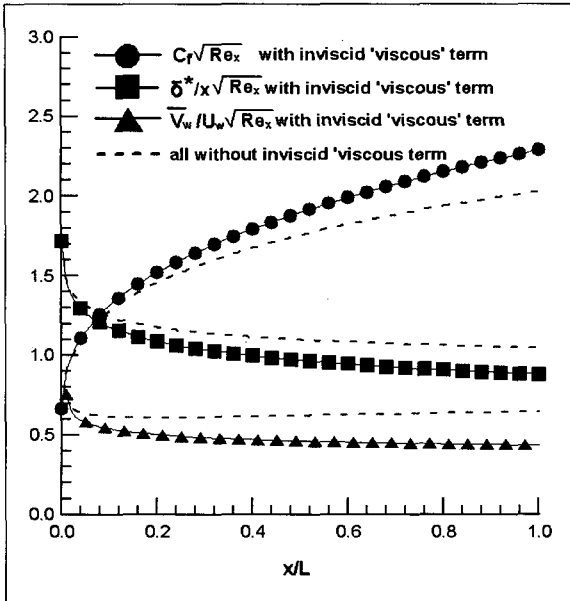
그림 3은 x/L 이 0.9인 곳에서의 속도 분포를 비교한 것으로서 본 계산 결과가 Navier Stokes 방정식과 2nd Order Defect Method와 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 끝단에서 와류(vorticity) 영향으로 발생하는 비점성 속도 분포가 $\partial U/\partial y \neq 0$ 인 경우에도 적용 될



[그림 5] Velocity profiles for exponential shear flow

수 있음을 알 수 있다.

그림 4는 표면 마찰 계수를 비교한 것으로서 본 계산 결과와 Navier Stokes의 결과와는 잘 맞으나 2nd Order Defect Method와는 차이가 생기는 것을 알 수 있다. 2nd Order Defect Method를 사용하여 Navier Stokes의 결과와 표면 마찰 계수를 비교해본 Aupoix et al.^[2]은 이 계산의 경우 2차 정확도의 경



[그림 6] Skin-friction, displacement thickness, and transpiration velocity for exponential shear flow

계층 유동장 해석(2nd Order boundary-layer) 접근 방법의 한계라고 하였다. 하지만 비점성 유동장과 경계층방정식을 결합하는 방법을 사용한 본 계산 결과는 그림 4에서 보는 바와 같이 Navier Stokes의 결과와 비교해서 2%의 오차범위 안에서 표면 마찰 계수를 구해준다. 그리고 그림 4는 비점성항(inviscid viscous term), 즉 $\nu(\partial^2 U/\partial y^2)$ 를 고려했을 때 이 항을 무시한 경우 보다 정확도가 더 높다는 것을 보여준다.

그림 5와 그림 6은 지수(exponential) 분포를 가지는 비점성 유동장일 경우에 대해서 비교하였다.

계산 조건 : $Re=10^6$

$U/U_w = \alpha + 1 - \alpha \exp(\beta y \sqrt{Re}/L)$ for $\alpha=1, \beta=0.5$

그림 5는 평판을 따라 $x/L=0.25, x/L=0.50, x/L=0.75, x/L=1.00$ 인 지점의 속도 분포를 나타낸다. 각각의 경우에 대해 속도 분포가 벽면에서 일정 지점 이후에는 비점성 속도분포와 부드럽게 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

그림 6은 평판 표면을 따라 표면 마찰계수, 배제 두께 및 무차원 배제(transpiration) 속도의 변화를

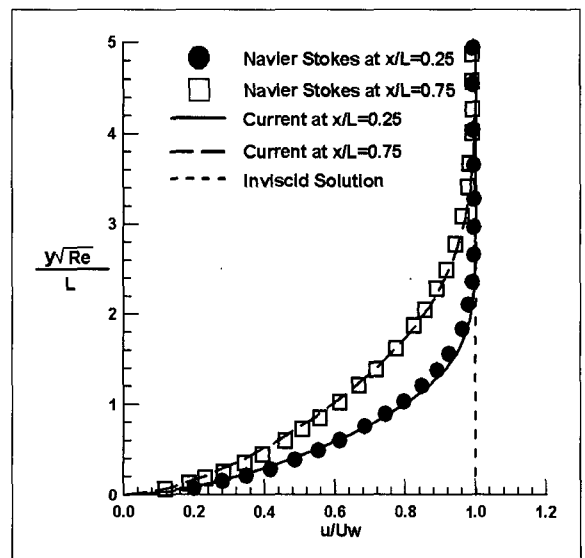
나타낸다. 표면 마찰 계수는 평판을 따라 증가하는데 반해 배제 두께와 배제(transpiration) 속도는 평판을 따라 감소하는 것이 보인다. 그림 6에서의 점선은 비점성항(inviscid viscous term), 즉 $\nu(\partial^2 U/\partial y^2)$ 를 무시했을 때의 결과로서 무시하지 않았을 경우와 비교해 보면, 후류 쪽으로 갈수록 차이가 크게 남을 알 수 있다.

나. 압축성 유동 해석

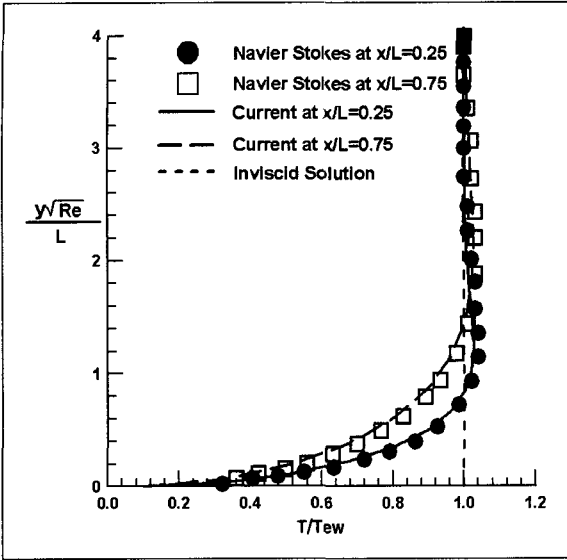
2차원 또는 축대칭 물체의 압축성 경계층 방정식에 에너지 방정식과 함께 풀었으며, Levy-Lees 변환을 사용하여 풀었다. 자세한 변환 과정과 식들은 참고문헌^[7]을 참조 바란다.

유동 조건은 비점성 유속 $U/U_w = \alpha + 1 - \alpha \exp(\beta y \sqrt{Re}/L)$ 의 지수(exponential) 분포를 가지는 경우의 평판유동에 대해서 비교하였다. 여기서 $\alpha=0.1, \beta=0.002$ 및 $Mw=3$ 으로 하였으며, cold wall($T_w/T_{ew}=0.1$)과 hot wall($T_w/T_{ew}=6$)의 두 가지 경우에 대해 비교하였다. n 방향으로는 비압축성에 비해 2배 많은 200개의 격자점을 사용하였고, Δx 는 0.01(m)로 하였으며 η 의 최대 값은 50으로 하였다.

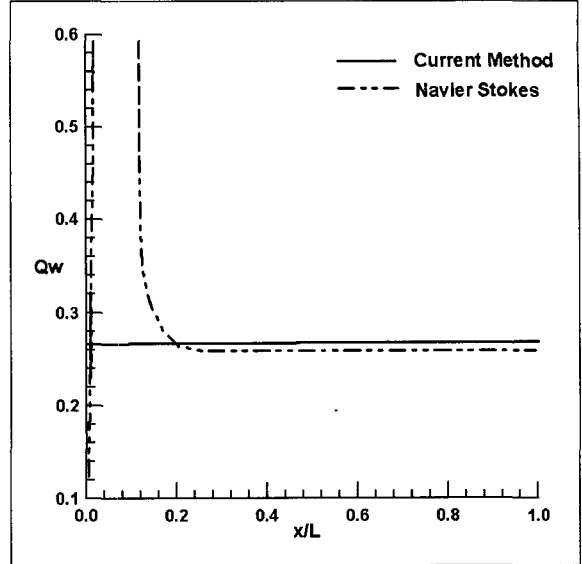
그림 7은 cold wall인 경우의 평판의 속도 분포를 $x/L=0.25$ 와 $x/L=0.75$ 인 두 경우에 대해 Navier



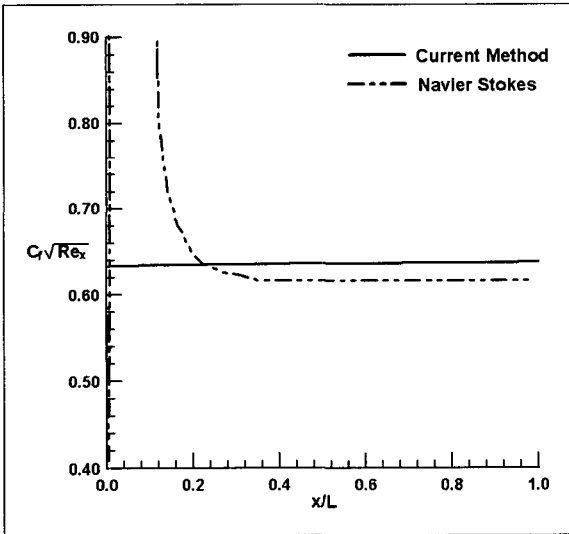
[그림 7] Velocity profiles for cold wall



[그림 8] Temperature profiles for cold wall



[그림 10] Heat transfer rate for cold wall



[그림 9] Skin-friction for cold wall

Stokes 결과와 비교한 것으로서 두 경우 모두 Navier Stokes 결과^[6]와 잘 일치됨을 알 수 있다. 그림 8은 cold wall인 경우의 평판의 온도 분포를 $x/L=0.25$ 와 $x/L=0.75$ 인 두 경우에 대해 Navier Stokes 결과와 비교한 것으로서 두 경우 모두 Navier Stokes 결과와 잘 일치되며 점성 소산 때문에 아랫부분에서 범프(bump)가 생기는 것이 보여

진다.

그림 9는 cold wall인 경우의 평판을 따라 표면 마찰 계수의 변화를 나타낸 것으로 본 계산의 결과는 Navier Stokes의 결과와 달리 초기 입구 구간에서부터 평판을 따라 거의 일정한 값을 예측하고 있다. 그림 10 역시 cold wall인 경우에 대해 평판을 따라 열전달율의 변화를 나타낸 것으로 표면 마찰 계수의 변화와 마찬가지로 평판을 따라 거의 일정한 값을 나타냄을 알 수 있다.

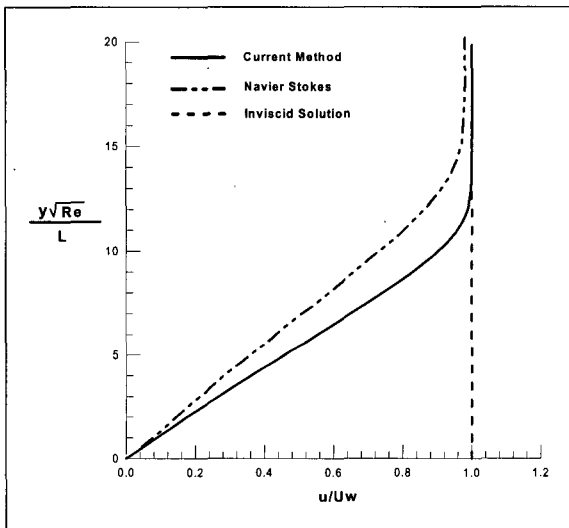
열전달율과 표면 마찰 계수의 변화 모두 $x/L > 0.2$ 인 경우에 대해 Navier Stokes의 결과와 4%의 오차 범위 안에서 만족하는 것을 알 수 있으며, $x/L < 0.2$ 에서의 본 계산 결과와의 차이는 Navier Stokes의 계산의 입구 초기조건과는 달리 본 계산에서는 평판 앞전에서 생기는 충격파 간섭에 의한 영향을 고려하지 않고 균일한 입구 유동 조건으로 주어 계산하였기 때문이다.

그림 11은 $T_w/T_{ew}=6$ 인 hot wall인 경우에 대해 $x/L=1.0$ 인 경우의 평판의 속도 분포를 Navier Stokes 결과와 비교한 것으로 cold wall처럼 결과가 정확하게 일치하지는 않고 있다.

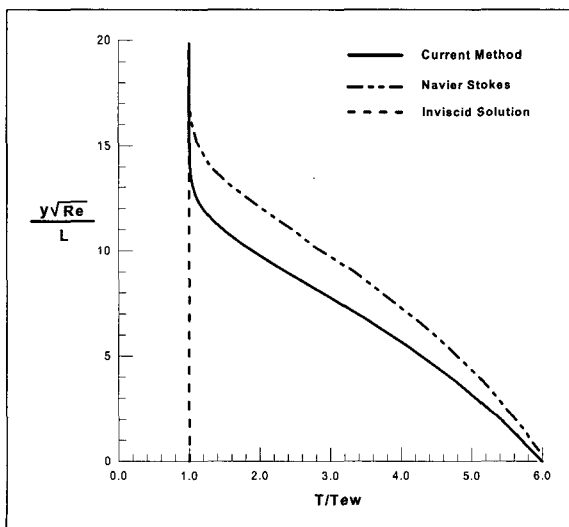
그림 12는 $T_w/T_{ew}=6$ 인 hot wall인 경우에 대해 $x/L=1.0$ 인 경우의 평판의 온도 분포를 Navier Stokes

결과와 비교한 것으로 속도 분포와 마찬가지로 cold wall의 계산 결과에 비해 정확도가 떨어짐을 알 수 있다.

그림 13은 $x/L=0.25$ 인 경우의 속도 프로파일을 나타낸 것으로 $x/L=0.25$ 인 지점인 경우에 Navier Stokes 결과에서 벽면 경계층에 의한 유량의 배제 때문에 충격파(shock wave)가 나타나는 것이 보여진다.



[그림 11] velocity profiles for hot wall

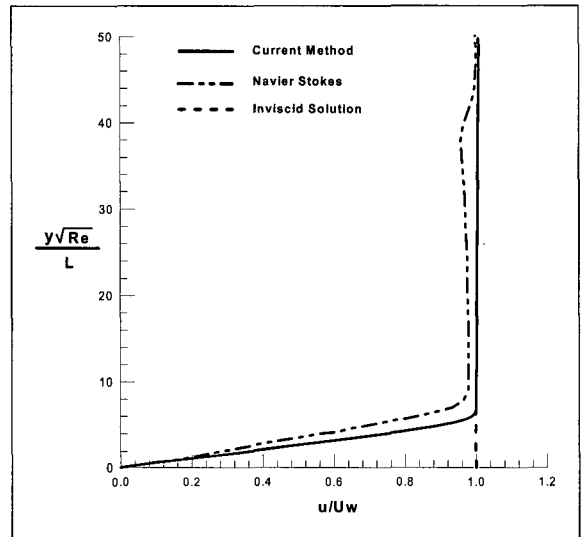


[그림 12] Temperature profiles for hot wall

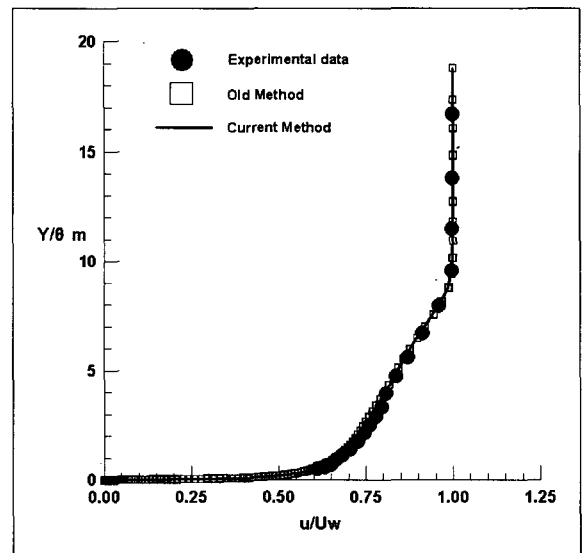
다. 난류 유동 해석

난류 유동 해석을 위해 사용한 난류모델은 충격파가 존재하는 유동에서 비교적 정확한 예측 값을 보여주는 Baldwin-Lomax 난류 모델^[8]을 사용하였다.

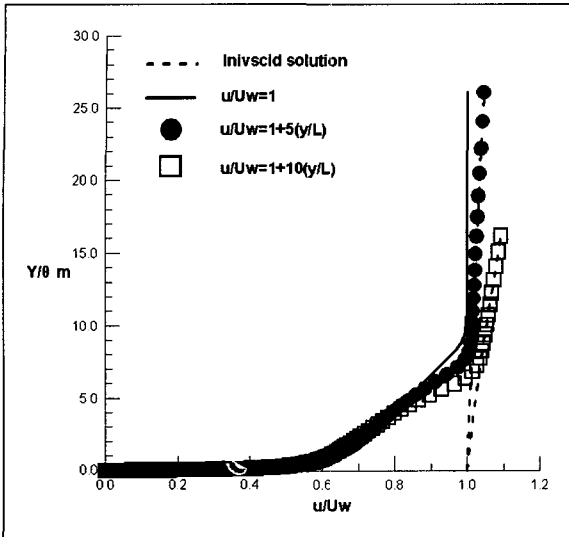
난류 평판 경계층 문제의 계산 결과를 검증하기 위



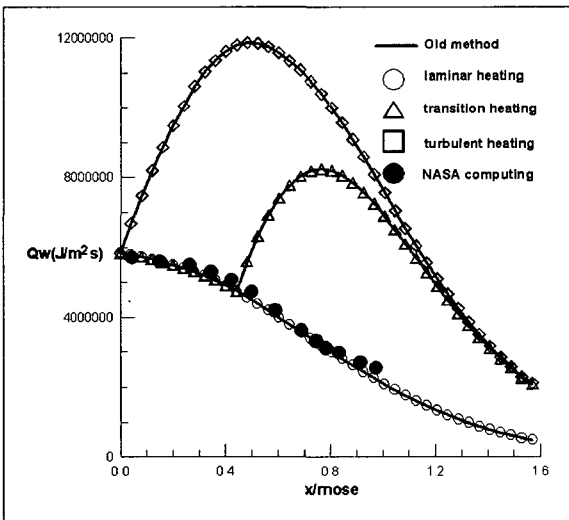
[그림 13] Effect of shock wave on velocity profiles



[그림 14] Comparisons of turbulent velocity profile for $M_\infty=1.982$, $p_\infty=12471\text{pa}$, $T_\infty=169.55\text{K}$, $T_w=251.11\text{K}$



[그림 15] Turbulent velocity profile for a linear gradient inviscid velocity case(same flow condition of Fig. 14)



[그림 16] Comparisons of wall heat flux for $M_{\infty}=15$, $p_{\infty}=2800.91\text{pa}$, $T_{\infty}=221.11\text{K}$, $T_w=1000\text{K}$

해 비점성 유동장의 속도 구배가 없는 경우에 대해 즉 $U/U_w=1$ 인 경우의 Coles, Donald의 실험치^[9]을 x 좌표가 0.55(m)인 곳에서 비교하였다. η 방향으로는 500개의 격자점을 사용하였고, 벽면으로 격자점을 밀집된 비등간격 격자를 사용하였고, Δx 는 0.025(m)로

하였으며, $\eta_{max}=100$ 을 주었다.

그림 14는 마하수가 1.982인 경우의 계산 결과를 실험결과와 비교한 것으로, 속도 구배가 없는 $U/U_w=1$ 인 경우 난류유동에 대해서 기존의 방정식과 정확하게 일치하는 것을 알 수 있다.

그림 15는 x 좌표가 0.55(m)인 곳에서 비점성 유동장의 속도가 $U/U_w=1+5(y/L)$ 와 $U/U_w=1+10(y/L)$ 의 경우로 비점성 속도 구배가 선형적으로 변화하는 구배를 가질 때의 평판에서의 난류 속도 분포에 대해 비교하였다. 그림 15에서와 같이 비점성 유속이 선형의 구배를 가질 때에도 본 계산 결과의 경계층 유속이 비점성 유속과 잘 일치함을 알 수 있다.

그림 16은 축대칭(Axisymmetric), 평형(equilibrium)인 경우에 대해 Euler 해석 결과를 경계층 끝단 조건으로 사용하여 기존의 방정식과 $U/U_w=1$ 인 경우에 대해 층류(lamina), 천이(transition), 난류(turbulent) 세가지 경우에 대해 벽면 열유속(wall heat flux)를 비교해 보았다. 세 경우 모두 기존의 방정식과 잘 일치하며 층류(laminar)인 경우는 NASA에서 수행한 해석결과 와도 잘 일치함을 알 수 있다.

4. 맺음말

본 연구에서는 비점성 유동장과 경계층방정식을 결합하는 방법을 사용하여 비압축성 유동 조건과 압축성 유동 및 난류 유동에 대한 해석을 수행하였다. 기존의 경계층 방정식이 경계층 끝단의 와류(vorticity) 영향을 전혀 고려하지 못하는 반면, 본 계산 방법을 적용하여 경계층 끝단에서의 와류(vorticity) 효과를 고려할 수 있었다. 그리고 표면 마찰 계수와 열 발생량 예측의 정확도가 hot wall인 경우 외에는 Navier Stokes 방정식에 준함을 확인 할 수 있었다.

참 고 문 헌

[1] Anderson, J. D., Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics, McGraw-Hill, New York, 1989.

- [2] Aupoix, B., Brazier, J. P., and Cousteix, J., "Asymptotic Defect Boundary-Layer Theory Applied to Hypersonic Flows", *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 5, 1992, pp.1252~1259.
- [3] Séror, S., Zeitoun. D., Brazier. J. Ph and Schall. E., "Asymptotic defect boundary layer theory applied to thermochemical nonequilibrium hypersonic flows", *Journal of Fluid Mechanics*, 1997, 339, 213-238.
- [4] Séror, S., Schall. E., and Zeitoun. D., "Comparison between coupled Euler/Defect boundary-layer and Navier-Stokes computations for nonequilibrium hypersonic flows", *Computer and Fluids*, Vol. 27, No. 3, 1998, pp.381~406.
- [5] DeJarnette, F. R. and Radcliffe, R. A., "Matching Inviscid/Boundary-Layer Flowfields", *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 1, January 1996, pp.35~42.
- [6] Edwards, J. R., "Development of a Upwind Relaxation Multigrid Method for Computing Three-Dimensional Viscous Internal Flows", *AIAA Paper*, Jan. 1995, 95-0208.
- [7] 손창현, 문수연, 이정윤, 최승, 사공영도, "비점성 유동장 해석기법 연구 (II)", MADC-S416-03048, 2003.
- [8] Baldwin, B. S. and Lomax, H., "Thin-Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flow", *AIAA Paper*, 1978, 78-257.
- [9] Coles, Donald, "Measurements in the Boundary Layer on a Smooth Flat Plate in Supersonic Flow-III. Measurements in a Flat-Plate Boundary Layer at the Jet Propulsion Laboratory", *California Inst. of Technology* No. DA-04-495-Ord 18, June 1, 1953, Rep. No. 20-71.