데데킨트 절단, 배중률, 관계

홍성기 (아주대학교)

Zusammenfassung

Um die rationalen Zahlen auf die reellen Zahlen zu erweitern und dadurch die Stetigkeit der reellen Zahlen sicherzustellen, hat der deutsche Mathematiker R. Dedekind im Jahr 1872 in seinem Aufsatz "*Stetigkeit und Irrationale Zahlen*" einen neuen mathmatischen Begriff eingeführt, nämlich 'Schnitt'.

Die Menge aller rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ wird durch eine rationale Zahl *a* zu zwei Untermengen $A_1=\{x|x\leq a,\ x\in\mathbb{Q}\}$, $A_2=\{x|x>a,\ x\in\mathbb{Q}\}$ vollständig geteilt. Wenn wir solche Teilung, d.i. solchen Schnitt mit "$(A_1,\ A_2)$" bezeichnen, ist ein Identitätssatz "$a=(A_1,\ A_2)$" absolut harmlos. Analog dazu glaubt Dedekind fest, daß jede irrationale Zahl mit Hilfe von einem entsprechenden Schnitt einzuführen ist. Zum Beispiel, falls die zwei Mengen $B_1=\{x|x^2<2,\ x\in\mathbb{Q}\}$ und $B_2=\{x|x^2>2,\ x\in\mathbb{Q}\}$ gegeben sind, dann wäre die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ mit $(B_1,\ B_2)$ gleichzusetzen.

Im Fall von einem Schnitt der Menge der rationalen Zahlen durch eine rationale Zahl, $(A_1,\ A_2)$, haben die beiden Untermengen A_1 und A_2 jeweils ein *Supremum* und ein *Infimum* und beide müssen identisch sein, aber -wie schon Russell in seinem Buch "*Introduction to Mathmatical Philosophy*" dies kritisiert- hat ein Schnitt für die Einführung der irrationalen Zahl, $(B_1,\ B_2)$ keine solche glücklichen

Eigenschaften. Dennoch glaubt Dedekind an eine streng wissenschaftliche Fundierung der irrationalen Zahl fest, und würde nach dem Grund seines Glaubens befragt, könnte er nur seine Behauptung wiederholen, ein klarer Fall *circulus vitiosus*. Mit anderen Worten, die Lücke zwischen B_1 und B_2 durch die Einführung einer [einzigen] wissenschaftlich fundierten irrationalen Zahl überbrückt und das Ganze zu einem Kontinium gemacht werden sollte, bleibt dieses Vorhaben von Dedekind erst als eine Hoffnung und dessen Resultat kann höchstens nur als ein Postulat, aber keineswegs als ein methodisch einwandfreier Beweis betrachtet werden.

Die Probleme, die mit dem Versuch der Einführung der irrationalen Zahlen mit Hilfe von *Schnitt* verbunden sind, sind nicht spezifisch allein im Gebiet der Mathmatik, sondern betreffen immer wieder die Rechtfertigungsfrage der Einführung der letzten Bestandteile im bezug auf eine Systemerstellung, egal ob dies System ein Wissenschaftliches oder unsere alltägliche Sprachhandlung ist. Für all diese Rechtfertigungsfragen gilt das in der klassischen Logik gängige logische Prinzip *tertium non datur* nicht mehr, aber nicht nur wegen der von praktischen Unmöglichkeit, die unendlichen vielen Gegenstände durchforschen zu müssen, das heißt, wegen der erkenntnistheoretischen Beschränktheit des jetzigen Erkenntnis*niveau*, sondern auch wegen des speziellen ontologischen *modus* der einzuführenden Objekten.

Der Autor des Aufsatzes analysiert einige änliche Fälle (das Urmeterbeispiel und die Chrakterisierungen der geometrischen Axiome von Wittgenstein), und versucht mit Hilfe von beiden Begriffen, '*interne*' und '*externe*' Relation, zu zeigen, daß eine gemeinsame, invariante Struktur in den eben genannten Fällen *besteht*.

Am Ende des Aufsatzes setzt der Autor sich mit der logischen Argumentationsstruktur des Zitates über 'Grenze' aus Noten von Leonardo da Vinci auseinander, und weist auf einen möglichen Zusammenhang der Grundidee seienes Aufsatzes mit der Philosophie der indischen Denker Nāgārjuna hin, obwohl die zitierten Versen aus dem Hauptwerk von Nāgārjuna, *dem Mittleren Weg*(*Madhyamakakārikā*) nur andeutend sein mögen.

keywords: Dedekind cut, real number introduction, *tertium non datur*, internal relation, external relation

> 표면은 서로 접촉하고 있는 두 개의 사물의 공통의 경계여야 한다; 그러므로 물의 표면은 물의 부분도 아니고 공기의 부분도 아니며, 또 이들 사이에 끼워진 그 어떤 물체도 아니다. 그렇다면 공기와 물을 갈라놓은 것은 무엇인가? 공기도 물도 아니며 실체가 없는 공동의 경계가 있어야만 한다는 것은 필연적이다. 왜냐하면 양자 사이에 끼워진 물체는 이들의 접촉을 막을 것이고, 물과 공기의 경우 이런 일은 일어나지 않고 있으며 그 어떤 매개체의 삽입 없이 접촉하고 있기 때문이다.[Leonardo da Vinci, 메모[1]]

I. 유리수 절단에 의한 무리수 도입: 한 순환논증

1. 1872년 발간된 논문 「연속과 무리수(*Stetigkeit und Irrationale Zahlen*)」[2]에서 데데킨트(Richard Dedekind, 1831-1916)는 무리수의 도입과 관련, **교육적 목적을 지닌 직관적 정당화**와 **학문적 엄밀성을 요구하는 정당화**를 구별하면서 다음과 같이 자신의 논문의 취지를 기술하고 있다:

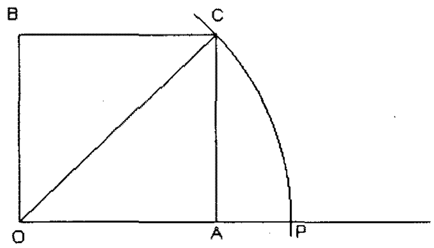
---

1) Leonardo da Vinci: *The Notebooks of Leonardo da Vinci*. Edward Maccurdy 정리, 영역, 해설. Reynal & Hitchcock. New York. 1938. Vol. I. 81쪽.

2) Richard Dedekind: *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, 제4판, Braunschweig. Friedr. Vieweg & Sohn. 1912. 24 쪽 이후.

> 이 小考의 대상을 형성하는 고찰들은 1858년 가을로 거슬러 올라간다. 당시 나는 취리히 공과대학의 교수로서 처음으로 미분을 강의해야만 하였다. 이 때 나는 예전보다 더 절실하게 산수의 실제적인 학문적 정당화가 부족함을 느끼게 되었다. "변화하는 크기가 고정된 극한값에 접근한다"는 개념, 구체적으로는 "지속적으로 그러나 일정한 경계 안에서 증가하는 모든 크기들은 반드시 하나의 극한값에 접근한다"는 정리를 증명하기 위해서는 기하학적 증거들로 도피하지 않을 수 없었다. 지금도 역시 나는 기하학적 직관을 끌어다 쓰는 것이 미분에 대한 첫 수업시간에서는 교육적 관점에서 볼 때 매우 유익하며, 많은 시간을 낭비하지 않으려면 심지어는 필요 불가결하다고 생각한다. 그러나 이러한 종류의 미분입문이 그 어떤 학문적 요구도 내세울 수 없음을 부정하는 사람은 없을 것이다. 당시 이 불만족스러움의 감정이 나에게는 너무나 압도적이어서 순수하게 산수적이고 완전히 엄밀한 무한소 해석학(*Infinitesimal-Analysis*) 원칙들의 근거를 발견할 때까지 성찰을 계속하겠다는 굳은 결심을 하게 되었다.

여기서 데데킨트는 연속과 관련된 개념을 도입하는 과정에서 도형과 직관에 의존하는 방식이 산수적 개념만을 엄밀하게 사용하여 학문적으로 근거를 제시하는 방식보다 실제 사용에 있어서 더 유용할 수도 있으나 정당화로서는 부족하다는, 굳이 말한다면 **발견의 맥락**(*logic of discovery*)과 **정당화의 맥락**(*logic of justification*)과의 차이를 논하고 있다. 그렇다면 데데킨트가 비판하고 있는 '직관적 이해'와 '학문적 엄밀함' 간에는 분명 정당화의 맥락에서 뛰어넘을 수 없는 **질적** 차이가 존재해야 할 것이다. 그렇지 않다면 데데킨트의 결벽증에 가까운 비판은 그 자체가 정당성을 결여할 수밖에 없기 때문이다.



2. 우리가 하나의 수학적 존재를 "직관적으로 도입했다"는 것은 무엇을 의미하는가? 여기서 "도입"이라는 표현이 실은 여러 가지로 이해될 수 있다.

예를 들어 그러한 수학적 대상의 실재성을 "인정함"을 의미할 수도 있으며, 단순히 필요에 의하여, 혹은 도구적 관점에서 수학적 대상을 "가정함"을 의미할 수도 있을 것이다. 아마도 데데킨트가 비판하고 있는 맥락은 그가 교육적 관점에서의 직관적 이해의 필요성을 인정하고 있다는 점에서 후자가 아니라 전자의 맥락이라고 보인다. 즉 데데킨트는 수학적 대상을 직관적으로 받아들인다는 것은 존재의 증명이 아니라 존재의 요청(*postulate*)이며, 이것은 비로소 그 정당성이 판별되어야 함에도 불구하고 마치 그 정당성이 이미 인정된 것처럼 받아들일 경우 학문적인 관점에서는 인정할 수 없다는 것이다.

3. 예를 들어 우리는 $\sqrt{2}$라는 무리수의 존재를 도형과 몇몇 직관적 가정에 의거해 도입하였다. 이때 도대체 어떠한 방식의 존재 요청이 개입되었는지를 살펴보는 것은 데데킨트의 무리수 해석과 관련된 논의에서 반드시 필요한 첫출발이 될 것이다.

3.1. O, A, B, C의 네 점을 꼭지점으로, OA를 밑변, BC를 윗변, OB를 좌변, AC를 우변으로 갖는 정사각형에서 OA를 오른쪽 방향으로 연장하고, 정사각형의 대각선 OC를 반지름으로 하고, O를 중심으로 하는 원이 OA의 연장선과 만나는 점을 P라 하자.

3.2. OC=OP [3]

3.3. OA=1이라 할 때, 이에 상대적으로 OP의 길이에 특정한 수가 대응한다.

3.4. $OC^2=OA^2+OB^2=1^2+1^2=2$ [피타고라스의 정리]

3.5. $OC=\sqrt{2}$

이어서 $\sqrt{2}$가 유리수가 아님을 귀류법을 통해서 보이고, 수의 세계를 유리수에서 무리수를 포함한 실수체계로 확장한다. 여기서 "OP의 길이에 특정한 수가 대응한다"는 것은 증명된 것이 아니라 일종의 요청임이 분명하다. 물론 우리는 OA의 연장선을 "數直線"이라고 부르고 수직선상의 모든

3) 동일성기호 "="는 꼭 수에 대해서만 사용될 필요는 없다.

점에 특정한 수가 대응한다는 생각을 은연중 갖고 있을 수도 있으나 그것은 엄밀하게 증명되어 도입된 것은 아니다. 즉 우리는 도형을 통한 무리수에 대한 직관적 이해의 핵심을 "수학적 상상을 통한 수의 도입"이라고 부를 수 있을 것이며, 데데킨트가 불만족스럽게 생각한 점도 바로 이러한 종류의 직관일 것이다.

4. 데데킨트는 기하학적 직관에 의존하지 않은 채 무리수의 도입을 근거짓는 방법으로 "유리수 절단(*Schnitt/cut*)"이라는 개념을 도입하였다. 어떤 유리수 a에 대하여 두 유리수 집합 $A_1=\{x|x<a,\ x\in\mathbb{Q}\}$, $A_2=\{x|x>a,\ x\in\mathbb{Q}\}$가 존재하고, $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$이면 $a_1<a_2$가 항상 성립한다. 이때 a는 유리수 전체의 집합 $\mathbb{Q}$을 A_1, A_2로 절단하며, 그것을 (A_1, A_2)이라고 표현할 수 있을 것이다. 유리수 a 자신은 A_1에 혹은 A_2에 속할 수 있으며, 전자의 경우 집합 A_1은 최대값(*maximum*)을, 후자의 경우 집합 A_2는 최소값(*minimum*)을 갖는다.[4] 무리수를 유리수 절단을 통하여 도입할 수 있다는 데데킨트의 절묘한 생각은 실은 매우 단순한 사실에 기초하는 바, 어떤 유리수 a가 유리수 집합 $\mathbb{Q}$를 양분할 때 생기는 유리수 절단은 역으로 그 유리수 a를 완전히 규정할 수 있다는 점에서 동일시하여도 무방하다는 점이다.[5] 예를 들어 $A_1=\{x|\ x\leq 2\}$, $A_2=\{x|\ x>2\}$일때 $(A_1, A_2)=2$라고 하여도 무방하다. 이제 여기서 **한 걸음 더 나아가** 유리수에 의해 생기지 않은 유리수 절단 역시 단 하나의 수를 완전히 규정할 것이며, 따라서 기존의 유리수 집합으로부터 전혀 새로운 수 무리수를 **구성할 수 있는**, 따라서 **증명할 수 있는** 방법이 있다고 데데킨트는 생각했다.

5. 데데킨트의 무리수 구성은 대략 다음과 같이 진행된다. D를 어떤 정수의 제곱이 아닌 양의 정수라고 한다면 다음과 같은 부등식을 만족하는 또

---

4) 데데킨트의 위 논문 36쪽. 어떤 집합 A의 관계 '≤'에 대한 **최대값**의 定義: m이 집합 A에 속하고, m을 제외한 집합 A의 어떤 원소도 m보다 크지 않을 경우 m은 집합 A의 최대값이다. 최소값도 상응하여 정의.

5) 유리수 집합을 절단하는 유리수 a자체가 A_1, A_2 중에서 어느 쪽에 속하는 지는 중요하지 않다.

다른 양의 정수 λ가 존재한다:

$$\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2$$

5.1. $A_1=\{x|x^2 \le D,\ x \in \mathbb{Q}\}$, $A_2=\{x|x^2>D,\ x \in \mathbb{Q}\}$이라 할 때 모든 유리수는 A_1 혹은 A_2에 속하고, $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$이면 $a_1<a_2$가 항상 성립한다. (A_1, A_2)는 $\mathbb{Q}$를 양분하는 유리수 절단이지만 유리수에 의하여 만들어진 것은 아니다. 즉 D는 어떤 유리수의 제곱도 아니다.[6]

5.2. A_1, A_2는 최대값이나 최소값을 갖고 있지 않다.

$$y = [x(x^2 + 3D)]/[3x^2 + D]\text{이라 하면,}$$
$$y - x = [2x(D - x^2)]/[3x^2 + D] \ \cdots\cdots \text{①}$$
$$y^2 - D = (x^2 - D)3/(3x^2 + D)^2 \ \cdots\cdots \text{②}$$

증명: 집합 A_1에서 임의의 양수 x를 취하면, D는 어떤 유리수의 제곱도 아니므로 $x_2 < D$, 그리고 ①에 의해서 $y > x$, ②에 의해서 $y_2 < D$, 따라서 y 역시 A_1에 속한다. 다른 한편 집합 A_2에서 임의의 수 x를 취하면, $x_2 > D$, 그리고 ①에 의해서 $y < x$, ②에 의해서 $y_2 > D$, 따라서 y 역시 A_2에 속한다.

5.3. 모든 절단이 유리수에 의하여 만들어지지 않는다는 사실로부터 유리수의 집합 $\mathbb{Q}$는 완전하지 않다(혹은 비연속적이다).

5.4. 유리수에 의하지 않은 절단 (A_1, A_2)가 제시될 때마다, 이 절단에 의해 완전히 정의된 새로운 수, 무리수가 만들어진다.[7]

6. 위의 무리수 도입과정을 살펴보면 데데킨트는 어떤 유리수 a에 의한 절단의 경우 역으로 절단이 그 유리수 a를 완전히 규정하듯이, 유리수에 의하지 않은 절단의 경우에도 그 어떤 수, 즉 무리수를 완전히 규정한다는 것이다. 그러나 **유리수에 의하여 생기지 않은 절단이 그 어떤 수를 완전히 규정한다는 주장은 무엇에 근거하는가?** 즉 절단이긴 하지만 A_1, A_2

---

6) $D=t^2$을 만족시키는 유리수 t가 존재하지 않음은 귀류법을 통하여 잘 알려진 방식으로 증명한다.

7) 5.1-5.4는 데데킨트의 상기 논문으로부터 요약.

에 최대값이나 최소값이 없는 경우, 도대체 무슨 근거로 우리는 이 절단이 그 어떤 수를 완전히 규정한다고 말할 수 있을까? 여기서 우리는 최대값이나 최소값을 갖지 않는 유리수 절단이 어떤 수를 완전히 규정하기 위해서는 다음과 같은 생각을 할 수 있다:

6.1. 집합 A의 上界(*upper bound*)와 下界(*lower bound*)의 정의: 집합 A에 대하여 $x \in A$이면 항상 $x<a$로 하는 집합 E의 원소 a가 존재하는데, 이때의 a를 상계라고 한다. 이에 대해 항상 $a<x$로 하는 E의 원소 a를 하계라고 한다.

6.2. 집합 A의 上限(*supremum*)과 하한(*infimum*)의 정의: 집합 ${}_1A$의 最小上界를 상한이라 하고, 만일 집합 A가 최대값을 갖고 있으면 집합 A의 상한은 그 최대값이다. 하한도 상응하여 정의.

6.3. 유리수 절단(A_1, A_2)에서 A_1의 상한(*supremum*)과 A_2의 하한(*infimum*)이 모두 r일 경우 그리고 오로지 그러할 경우에만 절단 (A_1, A_2)는 r을 완전히 규정한다.

예를 들어 유리수 a에 의한 유리수 절단 (A_1, A_2)의 경우, 만일 $a \in A$이면 A의 최대값이 바로 a이므로 상한 역시 갖고 있고, A는 최대하계로서 바로 a를, 즉 하한을 갖게 되어 A_1, A_2 의 상한과 하한이 일치하게 된다. 그러나 유리수 절단 (B_1, B_2)가 $B_1=\{x|x^2<2,\ x\in\mathbb{Q}\}$, $B_2=\{x|x^2>2,\ x\in\mathbb{Q}\}$로 규정되었을 경우, 데데킨트는 B_1과 B_2가 각각 최대값이나 최소값을 갖고 있지 못하다는 것을 5.2에서 주장하고 있다. 그러나 B_1, B_2의 상한과 하한 그리고 이들의 일치 여부에 대해서는 사실 어떤 증거도 제시하고 있지 않은 것이다. 특히 데데킨트는 앞에서 인용한 자신의 논문의 서론에서 " '지속적으로 그러나 일정한 경계 안에서 증가하는 모든 크기들은 반드시 하나의 극한값에 접근한다'는 정리를 증명하기 위하여는 기하학적 증거들로 도피하지 않을 수 없었다."라면서 바로 극한값의 존재가 증명되어야 함을 특별히 강조하였다. 그리고 바로 5.2의 내용은 "제곱한 것이 D보다 작은(큰) 임의의 유리수 x에 대하여; x보다 크지만(작지만) 그 제곱이 D보다는 작

은(큰) 어떤 유리수 y가 항상 존재한다"는 것으로서 "지속적으로 그러나 일정한 경계 안에서 증가(감소)하는 모든 크기들"에 대한 것이며, 5.4는 바로 이 경우에 극한값으로서 무리수의 존재를 주장하고 있다. 그러나 데데킨트는 위의 무리수의 도입과정 어디에서도 극한값의 존재를 증명하고 있지 않다. 바꿔 말해 데데킨트는 그가 논문의 서문에서 천명한 엄밀한 학문적 근거를 제시하였다기보다는 앞의 기하학적 이해와 마찬가지로 단순히 무리수의 존재를 **요청**하고 있을 뿐이다.

7. 럿셀은 데데킨트가 극한값으로서 무리수의 도입을 증명하지 않고 단지 요청하였다는 점을 그의 『수학철학입문(*Introduction to Mathematical Philosophy*)』에서 다음과 같이 밝히고 있다;

> 공간적인 상상에 영향을 받는 습관으로 인해, 사람들은 어떤 열이 극한값을 갖는 지 불확실할 경우 극한값을 갖는 것으로 생각하는 경향이 있다. 따라서 제곱한 것이 2보다 작은 유리수 집합의 경우 유리수에 의한 극한값이 없다는 것을 지각하면, 사람들은 데데킨트 간격[8]을 채울 수 있는 무리수 극한값이 있다고 "요청"한다. 데데킨트는 위에서 언급한 논문[9]에서 이 간격이 항상 채워져야 한다, 즉 모든 [유리수 집합의] 부분은 경계를 가져야만 한다는 공리를 도입하였다. (...) 사람들이 원하는 "요청"의 방식은 많은 이점들이 있다; 그것은 정직한 노력에 대하여 도둑질이 갖는 이점과 동일하다.[10]

럿셀이 "도둑질"과 "정직한 노력"에 비유한 **요청**과 **증명**과의 차이는 그러나 내용적으로 데데킨트가 그의 논문의 서문에서 강조한 "교육적 목적을 지닌 직관적 정당화"와 "학문적 엄밀성을 요구하는 정당화"와 완전히 동일한 것이다. 바꿔 말해 데데킨트는 그의 논문에서 그가 추구했던 교육적 맥락과는 **질적으로** 차원이 다른 학문적 엄밀성을 지닌 정당화의 제시라는 소기의 목적을 달성하였다고는 전혀 볼 수 없으며, 차라리 출발점으로 돌

8) 유리수집합이 비연속적, 완전하지 않다는 것. 필자 註.

9) 데데킨트의 상기 논문 「연속과 무리수」의 註1 참조.

10) Bertrand Russell: *Introduction to Mathematical Philosophy*. Dover. 1993. 71쪽.

아온, 방법론적으로는 증명의 대상을 전제해 버린 일종의 순환론에 빠져있다고 보아도 과언이 아니다.[11]

8. 그렇다면 데데킨트 절단에 의한 무리수 도입은 왜 이런 방법론적인 문제를 야기한 것일까? 그것은 데데킨트가 도입하려는 $\sqrt{2}$는 한편으로는 유리수 집합$\mathbb{Q}$에 속하지 않지만, 다른 한편으로는 바로 유리수의 도움으로 구성되어야 한다는 이중적인 측면 때문이다. 만일 어떤 유리수 a에 의하여 도입된 절단(A_1, A_2)의 경우 a가 A_1 혹은 A_2에 상한 혹은 하한으로 속할 수 있으므로 절단(A_1, A_2)을 유리수 a와 동일시하여도 문제는 발생하지 않는다. 다른 한편 그 어떤 유리수 절단(B_1, B_2)을 통해서 유리수가 아닌 수 b를 도입하려는 경우 b는 물론 B_1과 B_2의 최대값이나 최소값과 동일할 수는 없다. 그렇다고 문제의 수 b가 B_1과 B_2 사이에 있어야 한다는 점에서 절단과 독립적일 수도 없다. 그렇다면 B_1에 속하는 모든 유리수 보다 크며 따라서 B_1에 속하지는 않고, B_2에 속하는 모든 유리수 보다 작으며 따라서 B_2에 속하지 않는 수가 유일하게 존재한다는 것을 어떻게 보여줄 수 있을까?

8.1. 더 이상의 근거 없이 이 주장을 그냥 도입하는 방법
8.2. 모든 유리수가 '<'에 대하여 정열되어 있다는 점으로부터 B_1, B_2의 유리수들이 수렴하는 극한값으로서 b를 도입하는 방법

그러나 정당화의 맥락에서 볼 때 모두 일종의 순환논법이라는 점에서 8.1과 8.2는 동일한 것이다. 그러나 8.2는 8.1과 달리 "수렴한다"는 표현으로 인해서 럿셀이 지적하였듯이 "공간적인 상상력"을 동원하고 그것이 마치

11) 데데킨트의 위 논문을 중심으로 폴라트(H.J. Vollrath)는 "산수의 기초에 있어서 교육적 정당화와 학문적 정당화사이의 대립은 실재적이지 않으며 가상적, 상대적이다"라는 주장을 하고 있다. 폴라트는 수학교육의 맥락에서만 이 문제를 다루고 있으나, 필자는 이 문제가 **행위**에 의한 정당화와 **이론**에 의한 정당화의 차이로, "언어적 표현의 의미는 사용"이라는 비트겐슈타인의 맥락으로 확장될 수 있다고 믿는다. *Die Rolle des Didaktischen in der Grundlegung der Arithmetik*(「산수의 기초에 있어서 교육적인 것의 역할」). Günter Pickert교수 80주년 생일기념. *Mathematische Semesterberichte* 43(1996), 109-122쪽 참조.

극한값의 존재를 정당화하는 것으로 착각될 수 있다는 점 이외에도, 8.2의 언어에는 무한의 영역이 그 해석과 함께 도입된다는 점이 다르다. 즉 "수렴한다"는 것은 동적 개념으로서 굳이 비유적으로 표현한다면 정지영상이 아니라 **동영상** 비슷한 것이다.[12] 그것도 유한한 정지영상의 합으로서의 동영상이 아니라 원칙적으로 무한히 계속되는 움직임이라면 우리는 이러한 동영상을 표현하는 언어가 어떤 종류의 것인지 질문하지 않을 수 없다. 왜냐하면, 구문론적인 관점에서 어떤 식(*formula*)의 증명(*proof*)이란 주어진 규칙에 따라 주어진 글자꼴을 유한한 절차를 통해 변형한 결과가 앞의 식일 경우 이 과정을 의미한다는 점을 감안한다면, 도대체 어떻게 무한히 움직이는 동영상을 종이 위에 쓰여진 유한한 글자들로 표현할 수 있을까?

9. 데데킨트는 "제곱한 것이 D보다 작은(큰) 임의의 유리수 x에 대하여; x보다 크지만(작지만) 그 제곱이 D보다는 작은(큰) 어떤 유리수 y가 항상 존재한다"라는 것을 보여줌으로써 문제의 절단에서 (유리수) 최대값이나 (유리수) 최소값이 존재하지 않음을 증명하려고 했다. 여기서 주목해야 할 점은 "임의"의 의미가 무엇인지라는 점이다. 우리는 임의의 유리수를 특정한 수들을 지칭함으로써 보여 줄 수 있을까? 만일 이 행동을 통해서 "임의"라는 표현의 의미를 배워야만 하는 사람은 오해의 여지는 없을까? 물론 있을 수 있다. 예를 들어 바로 그 특정한 수들만이 임의의 수로. 우리가 "임의"라는 표현을 지시행위를 통해 一義的으로 보여줄 수 없다면, 이미 확보되었다고 가정된 다른 언어로 번역하면 어떨까? 예를 들어 외연적 언어로.

10. 우리는 "임의의 고래를 선택하더라도 그것은 포유동물이다"라고 할 때 "임의"란 "모든"이라는 보편양화사로 번역될 수 있음을 알고 있다. 그러나 "임의"를 외연적으로 해석된 보편양화사로 번역할 경우 중첩된 양화로부터 문제가 발생할 수도 있다:

---

12) 여기서 "그림", "동영상"이란 표현은 대략 비트겐슈타인이 탐구에서 배중률 비판에 사용한 "그림"의 의미에 상응한다.(L. Wittgenstein: 『철학적 탐구』 이영철 번역. 서광사. 1994. § 352, 374, 422-427 등)

10.1. 이 방안에 있는 모든 사람 x에 대하여; x보다 키가 큰 어떤 사람 y가 존재한다. 이 경우 y 역시 이 방안에 속한 사람이라고 제한할 경우 이 방에서 가장 키가 큰 사람보다 키가 더 큰 사람이 같은 방에 있다는 결론이 도출됨으로 위 문장은 옳을 수가 없다.

10.2. 제곱한 것이 D보다 작은 모든 유리수 x에 대하여; x보다 크지만 그 제곱이 D보다는 작은 어떤 유리수 y가 항상 존재한다.

앞의 5.2에서 절단의 **유리수 최대값이나 유리수 최소값이 없다는 증명을 하기 위하여** 우리는 위의 문장을 증명해야 했다. 이때 무한의 영역에서 보편양화사를 외연적으로, 즉 무한한 유리수가 이미 주어진 것으로 해석할 경우 10.1과 같은 상황이 발생하지는 않을까? 여기에 대한 반론으로 생각할 수 있는 것은, 유한의 영역과는 달리 무한의 영역에서는 10.1과 같은 상황이 **유리수 최대값이나 유리수 최소값이 없기 때문에** 발생하지 않는다는 것이다. 그러나 이러한 주장은 10.2를 통해 증명하려는 것을 전제하는 것으로 명백히 순환논증에 속한다.

또 위의 보편양화사의 외연적 해석으로서 "제곱해서 D보다 작은 유리수들이 **모두** 주어졌고, 이것들 중 어떤 임의의 유리수를 선택하였는 데도 그것보다 더 큰 유리수라면 그것은 제곱해서 D와 같거나 큰 유리수여야 한다"는 주장에 대한 반론은 무엇일까? 주의할 점은 이 경우 특별히 **유리수 최대값이나 유리수 최소값과 같은 문제**를 제기하지 않았다는 것이고 오로지 보편양화사의 외연적 해석의 한 대안으로 '던져 본' 것이라는 점이다.[13] 여기에 대한 반론은 아마도 앞의 문장의 본래 의미는 "제곱해서 D보다 작은 그 어떤 유리수를 취하더라도 이 수보다는 크지만 역시 제곱해서 D보다 작은 또 다른 유리수의 존재를 구성할 수 있으며, 이러한 **도식적 행위는 끊임없이 반복할 수 있다"**는 것 이외에는 없을 것이다. 데데킨트가 증명 5.2에서 보여주고자 한 바도 바로 이러한 내용이었음은 물론이며,

13) 이것은 최대값이나 최소값이 문제가 되지 않는 코시 수열(*Cauchy Sequence*)을 통한 실수도입에도 제기될 수 있는 반론이다. 코시수열 $\{a_n\}$은 임의의 양수 ε에 대해 자연수 k가 존재하여 k이후의 모든 l, m에 대해 $|a_l - a_m|$ 이 ε보다 작게 되는 수열을 말한다.

이 부분이 바로 럿셀이 말한 "공간적 상상" 혹은 필자가 "동영상"에 비유한 부분이다.

그러나 이러한 논의는 더 이상 무한의 영역에서 보편양화사를 외연적으로 해석한 것, 즉 實無限에 기반한 것이 아니다. 그것은 차라리 무한이란 도식적 행위, 즉 규칙의 끊임없는 반복, 일종의 **방향성**과 같은 것이다. 나아가 **규칙을 따름**(*rule following*)이란 언어로 표현되는 것이 아니라 언어를 통해 보여져야만 한다는 점에서[14] 데데킨트의 증명은 실은 증명이 아니라 우리의 **보는 방식**(*way of seeing*)의 통일을 의미한다.[15]

11. M. Marion은 그의 저서 『비트겐슈타인, 유한주의와 수학의 기초』에서 힐버트(Hilbert)의 제자였던 헤르만 봐일(Hermann Weyl)의 중첩된 양화사(*dependent quantification*)에 대한 흥미 있는 해석을 소개하고 있다:

11.1. $\forall x \exists y\ F(x, y)$

봐일의 해석은 두 단계로 이루어져 있다. 첫째, 우리는 함수로 된 하나의 법칙(*Gesetz*)을 구성한다.

11.2. $F(x)=y$

이 함수는 임의 수 x로부터 새로운 수 y를 생성한다. 이러한 방식으로 우리는 아래의 보편명제(*general proposition*)를 도입할 수 있다.

11.3. $\forall x \Phi(x, F(x))$

두 번째, 위의 보편명제로부터 도출할 수 있는 모든 단칭문장(*singular sentence*)으로부터 다음과 같은 형태의 존재양화문장을 '추상(*abstract*)' 할 수 있다.

---

14) 규칙의 표현에서 변항을 사용하였다는 것만으로 규칙의 일반성이 확보되었다고 보는 것은 오해다. 변항은 일단 기호일 뿐이며, 중요한 점은 변항에서 모든 규칙의 적용례를 보아야만 하는 것이다. 따라서 우리는 변항이 아니라 상항의 경우에서도 규칙을 볼 수 있다.

15) 순환논증이란 어떤 하나의 상황을 바라보는 방식과 관련이 있다. 순환의 고리가 극단적으로 짧을 경우에는 하나의 상황을 두 가지 측면에서 기술하면서 이 둘을 독립적으로 오해, 그 중 하나를 결론, 다른 하나를 전제로 삼을 때 순환논증의 오류가 일어난다. 따라서 이런 종류의 순환논증이란 문제의 상황을 "이러이러하게 봐달라"는 청원이나 강제 이상도 이하도 아니다. 따라서 그러한 순환논증을 받아들이는 사람들은 주장자의 **보는 방식**을 공유 혹은 수용하는 것이다.

11.4. ∃x Φ(a, x)

11.1에서 "es gibt(∃)"의 진정한 의미는 따라서 개체 y의 존재를 도출할 수 있는 함수 F(x)=y의 도입에 기인한다. 바로 이런 이유로 봐일은 'es gibt'가 'alle(∀)'를 포함하여야 하며 그 역은 아니라고 한 것이다.16)

"제곱한 것이 D보다 작은 모든 유리수 x에 대하여; x보다 크지만 그 제곱이 D보다는 작은 어떤 유리수 y가 항상 존재한다."는 문장은 바로 무한의 영역에서 중첩된 양화를 하고 있으며, 만일 "모든(∀)"이 "어떤(∃)"을 포함한다면, 앞의 10.2에서 살펴보았듯이 유한의 영역에서와 마찬가지로 모순이 발생할 수도 있다는 비판에 직면하게 된다. 그러나 봐일의 해석처럼 "어떤"이 "모든"을 포함한다면 무한이란 외연적으로, 즉 실무한으로 해석될 수 없으며 규칙의 반복을 통해 비로소 생성되는 것으로 볼 수밖에 없다. 여기서 우리는 데데킨트의 증명과정에서 무한이 한번은 외연적으로, 한번은 규칙의 반복으로 그 시점이 오락가락함을 짐작할 수 있다.

12. 즉 데데킨트는 "도입하려는 무리수 √2는 유리수 절단 (B_1, B_2)의 B_1, B_2 어디에도 속할 수 없으나(B_1, B_2)에 의해 완전히 규정된다"고 주장하지만 순환논증 이외에는 그의 주장을 근거 지울 수 있는 방법이 없었다. 비유적으로 표현한다면 다리(橋)를 만들 때 양쪽 강변에서 상판을 조금씩 끝없이 증가시켜 중앙에 마치 문제의 수 √2만 채우면 상판이 완성, 즉 결합(연속)이 될 수 있는 것처럼 주장하지만 그것은 주장 이외에 또 다른 근거가 있는 것은 아니었다. 바꿔 말해 유리수 절단 (B_1, B_2)가 √2를 완전히 규정한다고 **더 이상의 근거 없이** 주장할 경우에는 $B_1=\{x|x^2<2,\ x\in\mathbb{Q}\}$,

---

16) Mathieu Marion: *Wittgenstein, Finitism and the Foundations of Mathematics.* Oxford University, 1998. 93쪽. 이 책의 4장 「*Quantification and Finitism*」에서 저자는 무한의 영역에서 제한되지 않은 양화문장의 성격에 대한 Weyl, Hilbert, Ramsey, Dummit 등의 유한주의에 기초한 견해를 자세히 소개하고 있다. 요약하면 무한의 영역에서 양화문장은 일반적으로 眞僞를 판단할 수 있는 진술(*statement*)이 아니며 따라서 배중률도 적용될 수 없다는 것이다. 예를 들어 보편양화문장 "∀xFx"는 유한한 영역의 경우 단순문장의 연언(*conjunction*)으로 표시될 수 있고 따라서 진위판단이 가능한 문장이지만, 무한의 영역에서는 그렇지 못하다. 즉 무한의 영역에서 보편양화문장은 Weyl에 의하면 판단(*Urteil*)이 아니라 판단의 지침(*Urteilsanweisung*)이라는 것이다. 이점은 무한의 해석에 있어서 외연성을 주장하는 實無限이 아니라 규칙의 끊임없는 반복 가능성을 의미하는 可無限의 해석과 일치한다고 할 수 있다.

$B_2=\{x|x^2>2, x\in\mathbb{Q}\}$[17]를 규정하는 문장형식 "$x^2<2$"와 "$x^2>2$"를 **사실상 내용적으로** 각각 "$x<\sqrt{2}$"와 "$x>\sqrt{2}$"로 바꾼 것이나 다름없다. 즉 독립적으로 도입된 유리수 절단 (B_1, B_2)이 무리수 $\sqrt{2}$를 규정한 것처럼 보이나, 실은 B_1과 B_2 사이의 순서쌍으로 규정된 $\sqrt{2}$는 역으로 B_1, B_2를 규정하는 데에 개입한 셈이다.

Ⅱ. 순환논증과 배중률

데데킨트 절단에 의한 무리수 도입에서 유일성 확보의 불가능성은 마치 인과관계(*causal relation*)의 해석에서 한편으로는 **원인 및 조건**(*cause and condition*), 다른 한편으로는 **결과를 독립적으로 파악하는 한** 이들 사이에 필연성을 확보할 수 없다는 흄의 귀납추리의 문제를 연상시킨다. 이점이 바로 고대 인도철학에서 **因中無果論**의 문제라고 알려진 것이다.[18] 이럴 경우 흄에 의하면 인과관계의 필연성은 인간의 정신이 만든 일종의 투사(*projection*), 즉 **그렇게 봐준 것**일 뿐이다. 반면에 퍼어스(C. S. Peirce)는 바람의 방향과 풍향닭(*weather hens*)의 방향을 서로 독립적인 개념으로 이해할 경우 인과관계로 볼 수도 있지만, 일종의 서로간의 징후관계(*symptom*)로 볼 수도 있다고 하였다. 이 경우 '풍향닭'과 '바람의 방향'은 서로간에 기능적(*functional*)으로 정의되어 **상호의존적**(*interdependent*) 개념이 된다. 즉 **바람의 방향을 가리킬 때 한하여 풍향닭이고, 풍향닭이 가리키는 방향이 바로 바람의 방향이 된다.**[19] 이 경우 양자간에는 당연히 필연성이 확보된다.

---

17) 물론 음의 유리수는 모두 B_1에 속하고, B_2에 속하는 모든 유리수는 B_1에 속하는 모든 유리수보다 크다.

18) 吉熙星: 『印度哲學史』 대우학술총서 · 인문사회과학9. 민음사. 1984. 268-269쪽 참조.

19) 퍼어스의 풍향닭에 대해서는 쉐러(B.M. Scherer)의 *Prologmena zu einer einheitlichen Zeichentheorie: Ch. S. Peirces Einbettung der Semiotik in die Pragmatik.* Tübingen. Stauffenburg. 1984. 83쪽 이후 참조. 또 순환적 정의에 의한 기능적 정의는 불교문헌에서 종종 볼 수 있다. 예를 들어 눈(眼)의 경우 그 자체가 해부학적으로 규정될 경우 **눈은 눈의 기능인 볼 수 있음과 서로 독립적이다.** 따라서 눈을 신체로부터 분리하더라도 그것은 계속 눈으로 남는다. 이런 신체적, 해부학적 정의에 의한 감각기관을 "부진근(扶塵根)"이라고 불렀다. 반면에 **"눈이란 視界를 감지할 수 있을 때 한하여 눈이고, 視界란 바로 눈이 감지하는 감각영역"**으로 즉 기능적으로 규정될 경우, 신체로부터 분리된 눈은 눈이 아니고, 만일 컴퓨터 칩의 도움을 받은 기계적인 장치도 시계를 감지할 수 있을 경우 눈이다. 이처럼 기능적으로 정의된 감각기관을 "승의근(勝義根)"이라고 불렀다.

여기서 우리가 간파해야 할 점은 이와 유사한 상황이 결코 데데킨트의 무리수 도입에만 해당되는 것이 아니라 매우 일반적인 상황일 수 있다는 사실이다. 이론적 토대 없이, 그러나 이미 일상적으로 행해지던 행위를 학문적으로 체계화하면서 이 시스템의 출발점으로 도입되는 구성요소들에 대한 존재근거를 질문할 때 일어나는 일들이 바로 데데킨트의 무리수 도입에서 일어났을 뿐이다. 우리는 이런 경우 시스템의 구성요소들의 존재근거를 교육적 관점에서 직관적으로 제시하면서 학문적인 근거는 전문가들에게 맡기는 경향이 있으나, 전문가들 역시 더 이상의 근거를 제시할 수 있는 것이 아니다. 차라리 **정당화의 대상**과 **정당화의 수단**을 교묘하게, 아마도 자신도 모르는 사이에 순환시킴으로써 마치 정당화가 이루어진 것처럼 이야기하는 경우가 대부분이다. 이처럼 시스템의 출발점이면서 동시에 그 정당화를 요구할 경우 대상과 수단간의 일치가 일어나는 경우를 비트겐슈타인의 유명한 "파리의 미터원기(*Urmeter*)"의 경우에서 볼 수 있다:[20]

> 그러나 우리는 이렇게 말하고 싶어한다. 즉 우리가 요소에 존재를 부여할 수 없는 것은, 만일 그것이 **존재**하지 않는다면 우리는 그것을 명명조차 할 수 없을 터이고, 따라서 그것에 관해 전혀 아무 것도 진술할 수 없을 것이기 때문이라고. —그렇지만 유사한 경우를 고찰해 보자! 우리는 **한** 사물에 대해서는 그것이 1m라고, 또 1m가 아니라고도 진술할 수 없는 데, 그것은 바로 파리에 있는 표준 미터이다.—그러나 우리는 물론 그로써 이것에다 그 어떤 이상한 속성을 부여한 것이 아니라, 단지 미터자를 가지고 하는 측정 놀이에서 그것이 행하는 특이한 역할을 특징적으로 나타내었을 뿐이다. —표준 미터와 비슷한 방식으로 색 견본들도 또한 파리에 보존되고 있다고 생각해 보자. (...)
> 우리는 이것을 이렇게 표현할 수 있다. 즉 이 견본은 그것을 가지고 우리가 색깔 진술들을 하는 언어의 한 도구이다. 이 언어 내에서 그것은 묘사되는 것이 아니라, 묘사의 수단이다. (...) 그리고 "만일 그것이 **존재**하지 않는다면 그것은 아무런 이름도 가질 수 없을 것이다"란 말은, 만일 이 사물이 존재

20) 비트겐슈타인은 파리의 미터원기에 대한 위의 성찰을 이 세계의 최후의 구성단위(Urelement)에 대한 소크라테스의 논의에 대한 비판적 성찰의 線上에서 하고 있다. 『철학적 탐구』 §46-§49 참조.

> 하지 않는다면 우리는 그것을 우리의 놀이에서 사용할 수 없을 것이라는 말 이상도 이하도 아니다. --존재**해야만** 하는 것으로 보이는 것은 언어에 속하는 것이다. 그것은 우리의 놀이 내에서 하나의 범형(範型), 즉 비교되는 어떤 것이다.21)

파리에 있는 미터원기는 길이 측정이란 놀이의 **측정수단**의 기준으로서 도입되었다. 우리는 일반적으로 측정대상과 측정수단과의 독립성22)을 상정하지만 미터원기가 측정시스템에서 갖는 독특한 역할로 인해 그 독립성이 사라졌다. 그것은 마치 '길이'라는 개념과 '측정하다'라는 개념이 일반적으로는 독립적으로 사용되지만 -길이를 잘못 측정할 수 있다는 점에서- 원래는 독립적이지 않았던 것과 흡사하다:

---

21) 『철학적 탐구』 §50

22) 파리의 미터원기에 대하여 "측정수단과 측정대상간의 독립성이 사라졌다"는 표현에서의 "독립성"이란 용어의 어법은 비트겐슈타인이 기억의 옳고 그름과 관련하여 "독립적"이라는 표현을 사용한 것과 구조적으로 완전히 동일하다: "오직 우리의 상상 속에서만 존재하는 어떤 일람표를 생각해 보자. 가령, 사전을. 우리는 사전에 의해서 어떤 낱말 X의 어떤 낱말 Y에로의 번역을 정당화할 수 있다. 그러나 만일 이 일람표가 오직 상상 속에서만 참조된다면, 우리는 그것도 역시 하나의 정당화라고 불러야 할까? -'그야, 그 경우 그것은 주관적 정당화이다.' 그렇지만 정당화란 어떤 **독립적인**[필자 강조] 곳에 호소함에 존립한다.- '그러나 나는 한 기억으로부터 다른 기억에로도 호소할 수 있다. (예컨대) 나는 내가 기차의 출발 시간을 올바로 알고 있는 지 여부를 모르고 있고, 그걸 검사하기 위해 기차 시간표가 적혀 있는 면(面)의 모습을 기억 속에 불러 낸다. 여기서 우리는 같은 경우를 가지지 않는가?' -아니다; 왜냐하면 이제 이 과정은 실제로 **올바른** 기억을 불러일으켜야 하기 때문이다. 기차 시간표의 상상적 모습 자체가 그 올바름을 **검사**받을 수 없다면, 어떻게 그것이 그 첫 번째 기억의 올바름을 보증할 수 있을까?(...)" (『철학적 탐구』 §265) 다른 한편 "독립적"이라는 표현은 일상언어에서 여러 경우에 여러 용법이 있다. 어떤 감사기관 스스로가 감사의 대상에 포함될 경우 우리는 "독립적인 외부 감사기관"의 필요성을 이야기 할 수도 있고, 인과관계에 대한 성찰의 경우처럼 "독립적으로 도입된 원인과 결과라는 사건 유형"에 대하여 말할 수도 있다. 또 우리는 公理체계에서 公理들이 서로 독립성을 가질 것을 요구하기도 하며, 한 문장의 주어와 술어의 개념이 서로 독립적일 경우 "종합명제"에 대하여 이야기하기도 한다. 이처럼 한 용어가 다양한 용법을 갖고 있다고 해서 그 사용이 모호한 것도 아니고 또 비유적인 것도 아니다. 모호하다고 느껴지는 것은 이들 용법 모두가 동일한 구조를 갖고 있지 않음에도 불구하고 모두 "독립적"이라는 표현을 사용한다는 점에서 동일한 구조를 갖고 있는 것처럼 주장할 때이다. 그러나 필자는 "독립적"이라는 표현의 모든 사용들이 동일한 구조를 갖고 있다는 강한 주장을 하지는 않는다. 본인이 제안하는 것은 "정당화의 맥락", "정의의 맥락"에서 순환논증이나 순환적 정의에 빠지지 않고 이미 확보된 명제나 용어의 도움을 받을 수 있는 경우 정당화의 대상과 수단, 정의의 수단과 대상간에 독립성이 존재한다는 정도이다.

> 우리는 "길이를 결정하다"는 것이 무엇을 뜻하느냐를, 길이가 무엇이며 결정한다가 무엇이냐를 배움에 의해서 배우지 않는다. 오히려, 특히, 길이 결정이 무엇이냐를 배움에 의해서 "길이"란 낱말의 의미를 배운다.[23]

미터원기의 독특한 역할을 이해하지 못하고 미터원기가 1m인지를 질문하고 이 질문을 마치 여타의 대상의 길이에 대한 질문처럼 이해할 경우 우리는 미터원기를 **측정의 대상**으로 간주하게 된다. 이때 어떤 자를 측정수단으로 삼든 간에 그 자의 길이에 대한 질문이 제기될 것이고 궁극적으로는 바로 미터원기가 **측정수단**으로 등장할 것이다. 여기에 바로 미터원기가 측정대상이자 동시에 측정수단처럼 보인다. 그러나 스스로에 대한 측정은 자기를 가리키는 손가락이나 자기를 비추는 거울이 없듯이 허구인 것이다. 즉 측정시스템의 출발점이라는 점에서 미터원기는 "1m 혹은 1m가 아니다"라는 배중률의 범위에 속하는 대상이 아니다. 나아가 이런 종류의 존재들은 측정대상 혹은 묘사대상이 아니라 그 수단이라는 점에서 언어 밖에 존재하는 것이 아니라, 언어 내에 존재하는 것이다.

크립키(S. Kripke)는 미터원기에 대하여 배중률 적용이 불가능하다는 비트겐슈타인의 이 견해를 실재론적인 관점에서 비판하고 있다. 크립키에 의하면 미터원기로 길이 "1m"라고 명명하는 순간의 그 길이는 미터원기는 물론 인간이 모두 사라져도 분명히 존재한다는 점에서 "1m"는 "固定詞(*rigid designator*)"라는 것이다.[24] 이것은 바로 "길이"와 "길이측정"이 별개의 독립적인 두 개의 개념, 즉 인식론과 존재론의 독립성을 주장하는 전형적인 플라톤주의라고 볼 수 있다. 이 경우 미터원기와 1m의 길이간에 필연적 연결이 사라진다. 그러나 "1m"의 고정사 현상은 앞에서 보았듯이 전혀 다르게 해석될 수 있다. 즉 "길이측정"과 "길이"라는 개념들이 기능적(*functional*)으로 서로 不可分의 관계에 놓여 있다고 파악하는 것이다.

---

23) 『철학적 탐구』 II. xi

24) S. Kripke: *Naming and Necessity*. Oxford. Basil Blackwell Publisher. 1980. 45쪽 이후.

13. 시스템의 출발과 관련한 또 다른 예는 유크리드 기하학의 제5공리 즉 '평행선 공리'에 대한 비트겐슈타인의 해석을 들 수 있다:

> 우리에게 공리 하나가, 예를 들어 평행선공리가 주어지면 뭐라고 할까? 경험이 우리에게 사태가 그러함을 보여주었는가? 글쎄 어쩌면; 그러나 어떤 경험? 내가 말하고자 하는 바는 경험이 어떤 역할을 하긴 하지만, 그것은 우리가 바로 기대하는 그런 역할은 아니라는 것이다. 왜냐하면 사람들은 한 직선 밖의 점을 지나는 단 하나의 직선만이 앞의 직선과 교차하지 않음을 실험을 해서 발견한 것이 아니기 때문이다. 그럼에도 불구하고 그 문장은 명백하게 보인다. -내가 이제 왜 이 문장이 명백한지 아무 상관이 없다라고 말한다면: 우리는 그 문장을 받아들이는 것으로 족하다. 중요한 것은 우리가 그것을 어떻게 사용하는가에 달려있다.
>
> [공리라는] 문장은 그림을 기술하고 있다. (...)
>
> 나는 이렇게 말하고 싶다: 평행선공리가 말해졌을 때(그리고 우리가 이 말을 이해한다면) 이 문장의 사용방식과 따라서 그 의미는 아직 전혀 확정되어 있지 않다. 그리고 우리가 이 문장이 우리에게 명백하다고 말할 때, 우리는 우리도 모르게 이 문장의 특정한 사용방식을 선택한 것이다.(...)
>
> 그 문장이 우리에게 참이라고 명백하게 보이기 때문이 아니라, 우리가 명백함을 인정하는 것이 그 문장을 수학적 문장으로 만든다.[25]

비트겐슈타인은 공리라는 문장은 경험적으로 그 진위가 검증되어야 하는 것이 아니라, 바로 경험을 기술하는 데에 필요한 개념을 비로소 제공하고 있음을 말하고 있다. 이런 의미에서 공리란 사실 문장의 형식을 취하고 있는 **그림**이며, 공리를 구성하고 있는 개념들이란 **그림 속의 요소**들을 의미한다. 즉 평행선 공리는 곡면이 아닌 평면공간이라는 배경 또는 보는 방식 하에서 그리고 오로지 그러할 경우에만 자명하게 보인다. 그리고 그것

25) L. Wittgenstein: *Bemerkungen über die Grundlage der Mathematik*(『수학의 기초에 대하여』) G.E.M. Anscombe, R. Rhees, G.H. von Wright 편집. 비트겐슈타인 전집 6권, Frankfurt a/M. Suhrkamp Verlag, 1974. 223-224쪽

이 동시에 비트겐슈타인이 말하는 평행선 공리의 사용이다. 여기서 '보는 방식-자명함-수학의 공리로서의 인정' 등이 실은 **하나의 행위**로 일어난다. 다른 한편 우리는 비유크리드 기하학, 즉 양의 곡면이나 음의 곡면 상에서는 평행선 공리가 부정됨을 잘 알고 있다. 공리를 보는 배경, 즉 보는 방식이 바뀌었기 때문이다.

> 수학의 공리들은 경험이 우리로 하여금 한 공리를 포기하도록 만들더라도 이 공리의 부정이 공리가 되지는 않는 방식으로 기능한다.
>
> "2 ×2 ≠5"는 "2 ×2 = 5"가 통하지 않았다는 것을 의미하는 것이 아니다.[26]

공리가 경험문장이 아니라는 점은 공리 안에 포함된 개념들의 의미가 미리 독립적으로 규정된 것이 아니라는 사실이다. 차라리 우리는 어떤 문장을 특정한 보는 방식을 통해 수학의 공리로 인정함으로써 이 공리에 포함된 개념들의 수학적 사용, 즉 의미를 동시에 확정한다. 그렇기 때문에 경험이 그 어떤 이유로 -공리를 지탱하던 보는 관점의 변화- 한 공리를 포기하도록 만들었다면, 이제 공리에 포함된 개념들이 다른 방식으로 규정되었다는 것을 의미한다. 바로 그렇기 때문에 이제 공리는 일종의 경험문장으로 전락하였고, 이 공리의 부정문도 마찬가지다.

> "이러 이러한 것이 가능하다"라는 수학의 공리를 들을 때 우리는 "...가 가능하다"라는 말이 무엇을 의미하는 지 알고 있다고 곧 바로 가정한다; 왜냐하면 이런 문장형식은 우리에게 당연히 익숙한 것이기 때문이다.
> 사람들은 "...가 가능하다"라는 말이 얼마나 다양하게 사용될 수 있는지 모른다! 그리고 그런 이유로 이 경우 이 문장의 특별한 사용에 대하여 질문할 생각을 하지 못한다.
>
> 두 개의 점들 사이에 -기하학적으로- 항상 한 직선이 가능하다고 말하는 것은: "점들은... 하나의 직선에 놓여있다"라는 문장이 점들의 위치에 대한 진술이 되려면, 오로지 이 문장이 2개 이상의 점을 다룰 때에만 그러하다.[27]

---

26) 『수학의 기초에 대하여』 225쪽

27) 『수학의 기초에 대하여』 226-227쪽

예를 들어 "장미는 빨갛다"라는 문장의 경우 우리는 그 부정문도 가능하다고 생각한다. 즉 "장미는 빨갛지 않다"는 참일 수도 있다. 물론 우리는 후자의 문장을 들었을 때에도 앞의 문장이 가능하다고 생각한다. 이때 한 문장과 그 문장의 부정문이 모두 가능하다고 말하는 것은 이 문장 안에 도입된 개념들이 독립성에 기반하고 있다.[28] 그러나 위에서 비트겐슈타인은 다른 종류의 가능성에 대하여 말하고 있는 데, 그것은 일종의 그림-문장으로서 공리 내에 개념들이 서로간에 갖는 불가분성에 기반을 두고 있을 때이다.[29] 즉 '직선'이라는 개념과 '2개 이상의 점들'이라는 개념은 결코 독립적인 것이 아니며 바로 그런 이유로 "두 개의 점들 사이에 항상 한 직선이 가능하다"는 문장이 공리가 되는 것이다.

14. 데데킨트의 유리수 절단을 통한 무리수 도입에서 극한값의 존재, 측량시스템에서 미터원기의 길이, 기하학의 공리에 대한 논의에서 공통점으로 우선 확인할 수 있는 점은 어느 것이나 순환논증 즉 플라톤주의의 독단적 수용 없이는 배중률의 적용이 불가능하다는 점이다. 예를 들어 유리수 절단의 경우 "제곱한 것이 D보다 작은 모든 유리수 x에 대하여; x보다 크지만 그 제곱이 D보다는 작은 어떤 유리수 y가 항상 존재한다."는 절단 좌측에 유리수 상한이 없다는 증명은 무한을 외연적으로 해석하였을 경우 순환논증에 빠지거나, 무한을 규칙의 반복으로 볼 경우 -바일의 표현처럼- 그것은 배중률의 적용대상인 진술이 아니라 일종의 판단지침(*Urteilsanweisung*), 즉 규칙의 하나일 뿐이다. 그리고 규칙을 따름이란 비트겐슈타인의 표현처럼 보는 방식의 통일을 통한 맹목적 따름으로 사실(*fact*)이 아니다. 즉 이

---

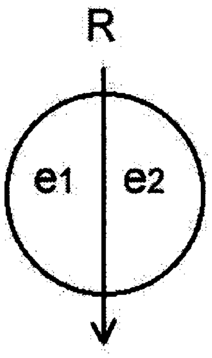
28) 즉 배중률이 도입될 수 있는 조건중의 하나는 문장 내 요소들의 독립성이다. 바로 이 점이 고전논리체계에서는 간과되었다.

29) 본인의 논문 『괴델의 정리, 증명된 신화』(『논리연구』 제5집 제2호. 한국논리학회. 2002년. 39-65쪽)에서 밝히고자 하였던 것도 실은 바로 이점이다. 이른바 "증명도 반증도 되지 않으나 참인 산수 문장"인 괴델문장은 문장의 형태를 띄었지만 실은 하나의 **그림**이다. 위 논문에서 자세히 밝혔듯이 괴델의 정리는 여타 산수식의 증명가능성 여부의 **판단수단**이 곧바로 자신을 **판단대상**으로 삼을 수 있다는, 즉 스스로를 비추는 수학적 거울이 있다는 전제를 해야만 하고 이 과정에서 순환논증은 피할 수 없다. 즉 우리는 괴델이 제시한 증명과정을 따라가지만, 실은 괴델문장이 참임을 마치 공리처럼 받아들인 것이다. 마치 마술에 넘어가듯.

모든 경우에 있어서 어떤 代案을 反論으로 제시하였을 경우 동어반복 이외에 그 어떤 정당화도 불가능하다는 점에서, 동어반복의 근거라는 것은 그들이 상황을 **그렇게 본다**는 점 이외에는 아무것도 없다는 점에서 배중률의 적용은 불가능하다.30)

Ⅲ. 내재적 관계 대 외재적 관계

15. 배중률의 적용이 무의미한 앞의 예들은 문제의 대상들이 기존의 확보된 수단으로 완전히 규정될 수 없고 오로지 보는 방식에 의해서만 고정될 수 있다는 특징이 있다. 여기서 필자는 이제 단순히 논리학이나 수학의 제한된 영역을 넘어서서 사용될 수 있는 용어를 도입하고자 한다. 바로 "**내재적**(*internal*) 관계"와 "**외재적**(*external*) 관계"가 그것이다. 서양철학적 맥락에서 "내재적" 혹은 "외재적"이라는 용어는 매우 다양하게 사용되고 있다. 그러나 본고에서 이들 두 용어는 전적으로 기술적으로 사용되며, 그 의미확정은 비트겐슈타인의 초기 저작인 『論理哲學論考』에서 출발한다.31)



내재적 관계: 전체를 분할

30) 직관주의자들의 배중률 비판이 구조적으로 이와 같다. 로렌젠(P. Lorenzen)이 고전주의 논리학을 고집하는 논리학자들에게 "인류를 대표하여 神을 독대하여 배중률을 받아 왔는가?"라고 조롱조로 비판한 것과 같은 맥락이다. 참조: P. Lorenzen: *Logik und Agon*. 1958년 9월 이태리 베니스에서 열린 제12회 철학자대회에서 발표, K. Lorenz가 편집한 *Dialogische Logik*(「대화논리학」)에 다시 게재. Darmstadt. Wissenschaftliche Buchgesellschaft. 1978. 1-8쪽

31) 비트겐슈타인은 「논리철학논고」에서 내재적 속성(관계)에 대하여 다음과 같이 기술하고 있다:

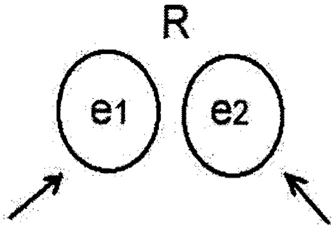
4.1212 보여질 수 있는 것은, 말해질 수 없다.

4.122 우리는 어떤 의미에서 대상과 사태의 형식적 속성들에 대하여 혹은 사실의 구조의 속성들에 대하여 이야기할 수 있고, 같은 의미에서 형식적 관계들과 구조의 관계들에 대하여 이야기할 수 있다. (구조의 속성 대신 나는 또한 "내재적 속성", 구조의 관계 대신 "내재적 관계"라는 용어를 사용한다.) 나는 이 용어들을 철학자들에게

필자는 더 이상의 논거 없이 “내재적” 및 “외재적 관계”를 다음과 같이 이해하고자 한다.[32)]

15.1. 내재적 관계는 2가지 종류가 있을 수 있다:

단수적: 하나의 전체를 **분할**(*partition*)하였을 때 분할된 부분들 사이에 생기는 관계로서 부분들 및 관계가 분할이라는 하나의 행위에서 동시에 생기므로 분할된 부분들인 관계항(*relata*)이나 관계를 정의하려면 항상 순환적 정의에 빠질 수밖에 없다.[33)] 이때 내재적 관계의 특징은 다음과 같다:



외재적 관계: 부분을 조합

가. 관계항과 관계가 전체의 분할을 통해 동시에 생기므로 서로 **상호의존적**이다.

나. 관계항의 상호의존성으로 인해 이들간의 관계는 **필연성을 확보**할 수 있다.

다. 관계항 자체의 **내적 분할**(*Binnengliederung*)이 일어나지 않아 한 관계항의 동일성은 다른 관계항간의 관계, 즉 **외적 분할**

광범위하게 퍼진 내재적 관계와 본래적(외재적) 관계를 착각하고 있는 이유를 드러내기 위하여 도입한다.
이러한 내재적 속성들과 관계들의 성립은 그러나 문장들로 주장될 수 있는 것이 아니며, 이러한 사태들을 제시하고 그 대상들을 다루고 있는 문장들 속에서 나타난다.

4.1221 한 사실의 내재적 관계를 우리는 이 사실의 특징(Zug)이라고 명명할 수 있을 것이다.(우리가 얼굴의 특징에 대하여 이야기한다는 의미에서.)

4.123 한 속성은 만일 그 대상이 이 속성을 갖고 있지 않다는 것이 상상할 수 없을 경우 내재적이다.

이 용어들에 대한 필자의 이해는 후기 비트겐슈타인의 철학에서 발견되는 의미변화, 즉 언어의 역할과 관련하여 초기의 인식론적 관점에서 후기의 존재[구성]론적 관점으로의 비중이동을 반영하고, 무엇보다도 서기 1-2세기의 인도의 철학자 나가르주나(Nāgārjuna/龍樹)의 主著 『中論(*Madhyamakakārikā*)』의 연구에서 많은 영향을 받았다.

32) 筆者는 비트겐슈타인의 『철학적 탐구』를 체계적으로 해석하기 위해서는 내재적 및 외재적 관계에 대한 이해가 매우 긴요하며, 그 역도 마찬가지라고 믿고 있다.

33) 비트겐슈타인은 내재적 관계나 속성을 말로 표현하려 할 경우에는 **순환적 정의**(*circulus vitiosus*)에 빠진다고 경고하였다. 『논리철학논고』, 4.1273

(*Außengliederung*)로만 가능하며, 순환적 정의로 인해 명시적인 정의는 불가능하고 특정한 **보는 방식으로만 고정**된다. 바꿔 말해 한 사회 내에서 공유되는 관점(*perspective*)이 내재적 관계를 고정시킨다.

복수적: 두 개의 대상들이 서로간에 **상호작용**(*interaction*)을 일으킴과 동시에 각각의 대상들의 내적 분할/구조가 결정되는 경우다. 이때 상호작용이 일어나는 지 혹은 어떤 상호작용이 일어나는 지 여부는 오로지 관점에 달려 있다.[34] (이런 종류의 내재적 관계도 전체의 분할로서의 단수적인 내재적 관계가 대상들의 상호작용에 의해 동시다발적으로 일어나는 것으로 파악할 수 있다.)[35]

15.2. 외재적 관계도 2가지로 이해할 수 있다:

단수적: 이미 독립적으로 그 동일성이 확보되어 도입된 대상들을 조합(*configuration*)할 때 이 대상들(관계항) 사이에 존재하는 관계로 파악되며 외재적 관계의 일반적인 특성은 다음과 같다:

가. 관계항들이 독립적으로 도입되었으므로 이들간에 필연성이 상실된다.
나. 관계항은 내적으로 분할되어 다른 언어로 記述, 정의될 수 있으므로 그 동일성이 명시적으로 고정될 수 있다.

복수적인 경우: 이미 내적으로 분할된 두 대상들 사이에 이미 확보된 공통점으로 일종의 대응관계를 구성할 경우.[36]

---

34) 비트겐슈타인이 『논고』에서 이해한 내재적 관계는 아마도 두 번째 종류의 내재적 관계라고 보인다. 다만 논고의 이상적 언어는 -논란의 여지가 없지 않지만- 세계를 寫像한다(*abbilden*)는 점에서 인식론적이고 수동적인 반면에, 여기서는 인간의 언어가 우리의 주변세계를 구성하는 데에 적극적으로 개입한다는 점에서 차이가 있다.

35) "내재적 관계"의 복수적 용법에 대하여 비트겐슈타인은 철학적 탐구의 II에서 집중적으로 다루고 있다: "대상의 색깔에는 시각인상의 색깔이 대응한다. (이 押紙는 나에게는 장미빛으로 보인다. 그리고 그것은 장미빛이다.)- 그리고 대상의 형태에는 시각인상의 형태가 대응한다. (그것은 나에게는 직사각형으로 보인다. 그리고 그것은 직사각형이다)- 그러나 상(相)의 번쩍 떠오름에서 내가 지각하는 것은 대상의 어떤 속성이 아니다. 그것은 그 대상과 다른 대상들과의 어떤 내[재]적 관계이다." 예를 들어 유명한 '오리-토끼' 그림의 경우 오리의 상으로 보이던 그림에서 별안간 토끼의 모습이 떠오름은 이 그림과 토끼와의 내재적 관계, 즉 이 둘의 상호작용에 의해 그림이 내적으로 새롭게 조직된 것이다.

36) 예를 들어 복사(copy)의 경우 원본과 복사물과의 관계.

16. 위의 전체와 부분과의 관계에 대한 내재적 관계와 외재적 관계의 예들은 일상생활과 학문적 맥락 도처에서 볼 수 있으며, 분할과 조합이라는 행위는 인간의 정신적 행위라고 할 수 있다. 이제 이 두 종류의 관계에 대하여 이해를 돕기 위해 인과관계에 대한 짧은 분석을 하면 다음과 같다:

16.1. 범주적(*category*) 차원: "원인"과 "결과"라는 개념 쌍은 내재적일 수밖에 없다. 왜냐하면 이 개념 쌍으로서 하나의 전체사건을 원인과 결과로 분할하기 때문이다.[37]

16.2. 유형적(*type*) 차원: 특정한 인과관계, 예를 들어 "아스피린을 복용함"과 "두통이 사라짐"이라는 두 개의 사건유형은 서로 독립적으로, 즉 외재적으로 도입되었다. 자연과학은 이 두 사건 유형간에 인과관계가 있음을 실험(관찰)을 통하여 귀납적(경험적)으로 추정하나 필연성에는 이르지 못한다.

16.3. 개별적(*token*) 차원: 인과법칙은 항상 반복 가능하여야 한다는 점에서 유형적 차원에서만 확인되나, 구체적인 세계 즉 "특정한 시공에서 특정한 사람이 아스피린을 복용함"과 "특정한 시공에서 특정한 사람의 두통이 사라짐"이라는 두 개의 개별적 사건의 경우에는 반복이 불가능하다는 점에서 서로 독립적이지 않으며 항상 내재적 관계를 이루고 있다.[38]

---

37) '명령-수행'을 범주적 차원에서 볼 때 이들 사이의 관계는 역시 내재적이다: "(...) 명령들은 때때로 복종되지 않는다. 그러나 만일 명령들이 결코 복종되지 않는다면, 그 꼴은 어찌될까? '명령'이란 개념은 그 목적을 잃어버릴 것이다." (『철학적 탐구』 §345)

38) 그렇다면 비록 유형적 차원임에도 불구하고 내재적인 관계를 설정할 수는 없을까? 필자는 퍼어스가 풍향닭과 바람의 방향과의 관계를 순환적 정의에 의한 기능적인 관계로 보았을 때 유형적 차원에서 내재적 관계를 설정하였다고 생각한다.

IV. 내재적 관계와 외재적 관계에 의한 분석

17. 이제 우리는 매우 쉽게 앞의 든 예들을 내재적 및 외재적 관계를 통해 조감할 수 있다: 유리수 a에 의한 데데킨트 절단 (A_1, A_2)의 경우 $A_1=\{x|x<a,\ x\in\mathbb{Q}\}$, $A_2=\{x|x\geq a,\ x\in\mathbb{Q}\}$로 정의되며 이때 유리수 a가 정의항에 도입된다. 다른 한편, **만일** 우리가 유리수 a를 절단 (A_1, A_2)로 정의한다면,[39] 우리는 유리수 집합의 절단 좌・우와 그 사이의 유리수간의 순환적, 즉 **상호의존적** 정의를 보게 된다. 그리고 이 점이 구조적으로 내재적 관계에 상응함은 명백하다. 바로 그런 이유에서 절단(A_1, A_2)이 유일하게, 즉 **필연적**으로 유리수 a와 동일시될 수 있음을 알고 있다. 그러나 유리수 집합의 절단을 통한 무리수 $\sqrt{2}$의 도입은 유리수 절단(B_1, B_2)이 $B_1=\{x|x^2<2,\ x\in\mathbb{Q}\}$, $B_2=\{x|x^2>2,\ x\in\mathbb{Q}\}$처럼 $\sqrt{2}$와 독립적으로 정의되어, 즉 양자간의 외재적 관계로 인해 결코 $\sqrt{2}$를 유일하게, 즉 필연적으로 규정할 수 없음에도 불구하고 이 절단을 묵시적으로는 마치 $B_1=\{x|x<\sqrt{2},\ x\in\mathbb{Q}\}$, $B_2=\{x|x>\sqrt{2},\ x\in\mathbb{Q}\}$로, 내재적 관계로 간주하고 있음을 볼 수 있다. 여기서 데데킨트가 무리수 도입에서 요구하는 학문적 엄밀성이란 절단과 도입될 무리수와의 외재적 관계에 있음은 명백하나, 실은 내재적 관계의 포장인 것이다. 이런 상황에서 유리수 절단에 의하여 도입된 무리수가 존재하는 지 아니면 존재하지 않은지에 대한 배중률의 적용은 아무런 의미가 없다. 왜냐하면 그것은 요청이기 때문이다.

파리의 미터원기에 대한 크립키의 견해는 앞의 경우와는 반대로 원래 '길이'와 '길이측정'이 원래 하나의 행위에서 상호의존적, 즉 내재적 관계에 있음에도 불구하고 이들간의 독립성을 상상하여 -이른바 인간이 모두 사라져도 길이 1m는 존재한다고 보는- 파리의 미터원기가 1m인지 아닌지에 대하여 배중률을 적용할 수 있다고 믿고 있다. 그러나 미터원기는 그 역할이 길이의 기준자로서 일반적으로는 측정수단의 역할만을 하지 측정대상의

39) 물론 우리는 이 유리수 a를 절단 (A_1, A_2)과 독립적으로 정수체계의 확장을 통하여 이미 도입하였다.

역할은 하지 않는다. 즉 측정대상과 측정수단은 서로 독립적, 외재적 관계에 놓여 있으며 그것은 측정수단의 길이에 대해서는 더 질문할 필요가 없는 상황을 의미한다. 그러나 만일 미터원기를 측정대상으로 삼을 경우 결국 자기 스스로의 길이를 측정한다는 것이 무의미하며, 미터원기의 길이에 대한 배중률의 적용은 그 측정기준이 사라진다는 점에서 전혀 무의미함에도 불구하고 실재론적인 관점에서 미터원기의 길이에 대하여 질문할 수도 있다는 플라톤주의적 상상을 하게되는 것이다.

公理의 경우 원래 하나의 **'그림-문장'**이며 이 공리에 도입된 표현들의 의미가 독립적으로 규정된 것이 아니라 공리를 명증하게 받아들이는 순간에 비로소 동시에 확정된다는 점에서 공리안의 표현들은 서로 내재적 관계에 있다고 할 수 있다.[40] 비트겐슈타인이 공리를 '그림'이라고 말한 이유에는 구문론적 성찰이 배경을 이루고 있다고 생각된다. 즉 그는 논리철학연구에서 이상언어와 현실간의 사상(寫像)관계를 이른바 그의 "그림이론(*picture theory*)"으로 이해하면서 언어와 현실간의 일종의 투사관계의 필요성을 절감하였다. 문제는 현실과 일반적 문장 간의 구조적 차이였다. 즉 '☆○'라는 현실을 문장으로 기술한다면 "별표가 동그라미 왼쪽에 있다"는 문장일 것이다. 즉 문장은 "aRb"의 형태를 취하며 이때 현실에는 두 개의 대상(*object/Gegenstand*)과 이들 사이의 관계 '...의 왼쪽에 있다'가 존재하나 문장에는 세 개의 대상(이름)과 이들 사이의 관계가 존재한다. 즉 문장에는 현실의 관계를 표현하는 관계사/술어의 도입으로 인해 문장과 현실과의 1:1 투사관계가 불가능하게 된 것이다. 이 문제를 비트겐슈타인은 문장의 구문론적 구조를 재해석함으로서 해결하려 하였다:

> "복합 기호 'aRb'가 a가 b와 관계 R에 놓여 있다는 사실을 말하는 것"이 아니라, "a"가 "b"와 특정한 관계에 놓여 있다는 **사실**이 aRb라는 **사실**을 말한다.[41]

---

40) 아마도 "**맥락의 원칙**(*context principle*)"은 문장 안의 표현들의 내재적 관계를 의미하는 것으로 받아들일 수 있을 것이다.

41) Nicht: "Das komplexe Zeichen 'aRb' sagt, daß a in einer Beziehung R zu b steht", sondern: ***Daß*** "a" in einer gewissen Beziehung zu "b" steht, sagt, ***daß*** aRb. (『논리철학논고』 3.1432)

즉 언어와 현실과의 사상관계는 한 문장도 이름이라는 대상들의 조합이라는 점에서 사실과사실의 대응관계로 해석되었으며, 그것은 문장에서 술어를 제거함으로써 이루어졌다. 즉 문장의 구문론은 바로 그림의 구문론으로 바뀌었으나, 문장에서 술어를 제거함으로써 동시에 부정(*negation*)의 가능성도 사라졌다. 바로 그런 이유에서 그림을 통해서는 부정문이 불가능한 것이다. 즉 그림 전체를 분할함으로써 얻어지는 그림의 부분들간의 관계는 이들 부분과 그 관계가 분할을 통하여 비로소 생성되었다는 점에서, 즉 그 내재적 관계의 필연성으로 인해 부정이 불가능하다.

비트겐슈타인이 공리를 **외적으로는 문장**의 형태를 지녔으나 실은 하나의 '그림'이라고 말하는 이유는 공리를 우리가 자명한 것으로 받아들이는 순간 공리에 도입된 개념들을 상호의존적, 내재적 관계에 놓인 것으로 받아들였다는 것을 의미한다. 이럴 경우 공리는 주어진 현실의 記述이 아니라 공리에 도입된 개념들을 현실에서 비로소 사용할 수 있도록 만든다. 여기서도 시스템의 출발점으로 공리에 배중률이 적용 불가능함을 볼 수 있다. 왜냐하면 공리에 배중률을 적용하기 위해서는 공리에 도입된 개념들을 이미 그 어떤 방식을 통해서이든 서로 간에 독립적으로 규정·도입하여야 하나 공리가 바로 그런 개념의 사용을 비로소 가능하게 만들기 때문이다. 역으로 만일 공리문장 역시 배중률이 적용 가능한 일반문장처럼 외재적 관계에 있는 개념들의 조합으로 파악할 경우, 혹은 공리를 자명하게 보는 방식이 약화 혹은 다른 보는 방식으로 대치될 경우 우리는 비유클리드 기하학에서처럼 원래의 공리가 부정되는 현상을 볼 수 있다.

18. 여기서 우리는 지금까지 배중률과 관련된 논리학자들의 논쟁에 있어서 기존의 직관주의자들의 입장인 인식론적 관점, 즉 현 상태의 지식수준에서는 무한의 영역을 모두 다 살필 수는 없다는 점만이 아니라 존재론적인 관점에서 대상이 비로소 구성되는 것인지 아니면 이미 구성된 것인지 여부도 배중률의 적용여부와 밀접히 관계됨을 알 수 있다.

> 나는 한 동물을 바라보고 있다. 어떤 사람이 나에게 묻는다:"당신은 무엇을 바라보고 있는가?" 내가 대답한다: "토끼." —나는 어떤 풍경을 바라보고 있다. 갑자기 토끼 하나가 달려 지나간다. 나는 "토끼!"하고 외친다.42)

---

42) 「철학적 탐구」 II. xi

비트겐슈타인은 위의 예에서 전자를 "**보고**(*Mitteilung/report*)", 후자를 "**외침**(*Ausruf/exclaim*)"이라고 부르면서 양자의 양상을 구분한다. 후자는 "비명이 고통에 대해서 가지고 있는 관계" 즉 내재적 관계를 언어행위와 시각체험이 갖고 있다는 것이다. 위의 ["토끼!"가 아니라] "토끼."의 예에서 보고의 경우에는 보는 사람이 토기의 신체적 특징을 살피면서, 즉 내적 분할을 통해서 토끼를 인지했다. 이 경우 지각(*perception*), 비교(*matching*), 발화(*speaking*)는 세 개의 서로 다른 행위라고 할 수 있다. 이 경우 "토끼"라는 언어적 표현, 발화행위, 문제의 동물은 서로 외재적 관계에 놓여 있다.[43] 그러나 외침의 경우에는 지각에서 발화에 이르기까지의 행위는 원래 하나의 행위이며, 이런 점에서 "토끼!"라는 언어적 표현과 발화행위 그리고 문제의 동물도 내재적 관계에 놓여있다.[44] 바로 이런 이유로 외침의 경우에는 옳고 그름의 문제, 즉 배중률이 적용될 수 없다.[45]

---

43) 외재적 관계에 놓인 사물들은 모두 유형(type)이다.

44) 내재적 관계에 놓인 것들은 이 경우 모두 개별자들(*token*)이다.

45) 언어의 대상구성적 측면과 대상기술적 측면을 로렌쯔(K. Lorenz)는 다음과 같이 역사적으로 요약하고 있다: "구성주의적 철학과 구성주의적 과학철학은 분석철학과 과학철학에서 지금까지 등한시 되어왔던 럿셀의 '접촉에 의한 지식(*knowledge by acquaintance*)'의 역할을 다시 한번 조명해 보는 작업이라고 요약할 수 있다. (...) '접촉에 의한 지식'도 '묘사에 의한 지식(*knowledge by description*)' 처럼 당당한 지식이라는 점이 간파되지 못했다. 더욱이 비트겐슈타인이 『논리철학논고』에서 이용한 '말하여 질 수 있는 사실'과 '단지 보여질 수만 있는 사실'간의 구별이 위의 두 종류의 지식에 관한 적절한 이해를 가져왔다손 치더라도 -카르납은 논리경험주의에서 비트겐슈타인의 잘 알려진 반대에도 불구하고 '보여질 수 있는 사실'은 메타언어를 통해 역시 말하여질 수 있다는 주장을 관철하였다- 문장을 통해 '말하여질 수 있는 외재적 관계'와는 달리 문장을 통해 '보여질 수 있는 세계와 언어간의 내재적인 관계'는 단지 언어와 세계의 형식의 일치에만 국한되었을 것이다. 말함 자체도 대상들을 이루는, 또 그것에 대해 이야기될 수 있는 한 부분으로, 즉 그 물질적 참여를 이해하는 것은 아직 『논리철학논고』의 통찰에 속하지는 못했다. 또 비록 모리쯔 슈릭(Moritz Schlick)의 체험(*Erleben*)과 인식(*Erkennen*)간의 구별이 몇 단계 중간단계를 통해 연결된 두 종류의 지식, 하나는 대화상황과 관련하여 어떤 대상을 둘러싼(*um*) 지식, **對象設定力**(*objectcompetence*/필자 강조), 다른 하나는 대화상황과 독립한 어떤 대상에 대한(*über*) 지식, **對象記述力**(*metacompetence*/필자 강조)에 대한 이해를 가져올 수도 있다손 치더라도 언어의 물질적 참여는 아직 그의 저작에 속하는 통찰은 아니었다. 퍼어스(Ch. S. Peirce)의 철학적 실용주의에 관한 새로운 이해를 가져왔던 비트겐슈타인의 『철학적 탐구』에서 완성된 실용적(*pragmatisch*)인 전환은 인간의 행위 속에서 언어와 세계 양자에 공통된 기반을 보는 것을 비로소 가능케 하였다. 언어적 차원이 대상들에 대한 메타차원에 속한다는 것은 더 이상 당연시되지 않았으며 언어 자체에서도 징후적 즉 '대상적' 특성과, 상징적 즉 '(대상)대표적' 특성을 확인할 수 있는 바,

나아가 내재적 관계에 대한 체계적 이해는 단순히 배중률이라는 논리적 원칙의 적용여부를 떠나서 지금까지 외재적 일변도의 서양철학적 관계론을 확장시킴은 물론이고, 동양철학의 문헌에서 수 없이 볼 수 있는 내재적 관계 혹은 내재적 관계와 외재적 관계의 충돌/접합과 관련된 내용을 체계적으로 살필 수 있는 기회를 부여할 것이다.

V. 다빈치와 용수의 '경계' 해석

19. 이 글의 앞머리에 인용한 물과 공기의 경계에 대한 다 빈치의 추론은 다음의 4가지 전제들에서 출발한다고 생각된다:46)

19.1. 물과 공기는 직접(중간과정 없이) 만난다.
19.2. 물과 공기는 실체가 다른(하나일 수 없는) 물체들이다.
19.3. 물과 공기가 만나는 곳, 그곳이 양자의 경계다.
19.4. 실체가 다른 물체들을 구분하기 위해서 경계는 반드시 존재한다.

이제 경계에 대한 고찰에 이르기까지 다 빈치의 추론과정을 재구성한다면 다음과 같다:

19.5. 만일 경계가 물에 속하거나 공기에 속한다면, 경계는 물이면서 동시에 공기여야 한다. 이것은 전제 19.2와 모순이다.
19.6. 따라서 경계는 물에도 공기에도 속하지 않는다.
19.7. 경계가 실체가 있다면, 물과 공기는 이 실체를 갖는 것과 또 다른 경계에서 만나야 하며 이것은 무한히 계속된다. 이것은 전제 19.1에 모순이다.

그것은 언어가 대상을 비로소 구성하는 일에 즉 **對象設定力**에 속하는지, 아니면 대상을 묘사하는 일에 즉 **對象記述力**에 속하는 지에 달려있다 하겠다." K. Lorenz: *Dialogischer Konstruktivismus*. K. Salamun 편집: *Was ist Philosophie*? 제2 증보판. Tübingen 1986. 335-352쪽中 341-342쪽.

46) 이하는 『불교평론』 15호 (2003년 여름. 불교시대사)에 게재된 본인의 논문 「시간,경계:세잔느, 다빈치, 그리고 용수」에서 발췌 · 요약한 것임.

19.8. 따라서 경계는 물에도 공기에도 속하지 않으나 실체는 없다.
19.9. 19.4와 19.8에서: 공기도 물도 아닌, 그러나 실체가 없는 공통된 경계가 반드시 존재하여야 한다.[47]

일견 직관을 통한 형이상학적 주장처럼, 혹은 관찰을 통해 확인할 수 있는 주장처럼 보였던 다 빈치의 물과 공기의 경계에 대한 단상(斷想)은 실은 경계의 개념 정의에 대한 논리적 추론의 결과이다. 실제로 위의 네 전제들이 받아들여진다면 다 빈치의 결론은 논리적으로 도출될 수 있고 나아가 모든 종류의 경계에 적용될 수 있다는 점에서 단순히 지적 유희를 넘어설 수도 있다(예: 生|死).

20. 그러나 물과 공기의 경계에 대한 다 빈치의 결론은 실제로 우리가 할 수 있는 추론의 전부가 아니다. 왜냐하면 "물도 공기도 아닌, 그러나 양자가 만나는 경계(이때 실체여부는 중요하지 않다)"란 주장 역시 다 빈치가 받아들인 전제들과 모순에 빠지기 때문이다:

20.1. 물이 아닌 것, 그곳에 물은 없다.
20.2. 공기가 아닌 것, 그곳에 공기는 없다.
20.3. 물(공기)이 없는 곳에서 물(공기)의 만남이 이루어진다면, 모든 것이 모든 것과 어디에 있든 만날 수 있을 것이다.
20.4. 따라서 물도 공기도 아닌 곳에서 물과 공기가 만날 수는 없다.
20.5. 전제 19.3에서: 물과 공기가 만나지 않는 곳, 그것이 경계일 수는 없다.
20.6. 따라서 "물도 공기도 아닌, 양자가 만나는 경계"란 불가능하다.

우리의 추론도 다 빈치의 것과 마찬가지로 그의 전제로부터 논리적으로 합당하게 도출될 수 있다. 도대체 왜 이런 해괴한 결론이 나올까? 직설하면 문제의 핵심은 경계라는 개념의 이중성이고 그 양면이 서로 모순되기

---

47) 다 빈치는 공기도 물도 아닌, 그러나 실체가 없는 공통된 경계를 "無(*nothingness*)"라고 칭했다.

때문이다. 즉 경계란 **서로 다른 두 물체**가 만나는 곳이지 하나의 물체가 스스로와 (경계에서) 만날 수는 없다. 다른 한편 경계란 두 물체가 **한 곳에서 합쳐지는 것, 즉 접합**(接合)을 의미한다. 바꿔 말해 경계란 개념에는 **서로 다른 두 물체가 하나가 됨**을, 즉 두 개의 모순되는 요청이 함께 들어 있으며 앞의 다 빈치와 우리의 모순되는 추론 결과는 바로 경계의 양면성에 근거하며, 데데킨트 절단에 의한 무리수의 도입, 그리고 이를 통한 실수의 연속성 확보도 '경계'의 경우와 동일한 맥락에 놓여 있는 것이다.

다 빈치의 경계에 대한 고찰과 관련, 동·서사상사의 공정한 평가를 위하여 인용해야만 할 철학자가 한 사람 더 있다. 그는 바로 서기 1-2세기 인도에 살았던 대승불교의 철학자 나가르주나(Nāgārjuna, 龍樹)이다. 이 글의 핵심도 실은 그에게서 빌어온 것이다. 나가르주나는 경계에 관한 한 고독한 선두주자라 불려도 손색없을 만큼 논리적으로 엄밀하고 예리했다. 그의 저서 『中論(*Madhyamakakārikā*)』 중 "결합"[48]의 가능성을 논파하는 부분을 함께 인용하면서 본고를 마무리하고자 한다:

> 만일 하나라면 결합은 있을 수 없다. 자기 스스로와는 결합할 수는 없기 때문이다. 그런데 서로 다른 것이라면 도대체 어떻게 결합할 수 있겠는가?
>
> 만일 하나인데 결합하는 것이라면 그것은 짝이 없어도 그렇게 되고,
> 만일 서로 다른 것들인데 결합한다면 역시 짝이 없어도 그렇게 된다.
>
> 서로 다르다고 하는 것이 성립하지 않기 때문에 그대는 그처럼 결합을 추구한다. 그러면서 동시에 결합된 존재임을 논증하기 위하여 서로 다르다는 것을 추구한다.
>
> 서로 다르다는 것이 성립하지 않기 때문에 결합됐다는 것도 성립하지 않는다.
> 어떤 별개의 존재가 있기에 당신은 결합을 희구하는가?[49]

---

48) 여기서 "결합"이란 "필연적 결합"으로 이해해야 한다.

49) 『中論』 6장 제4, 5, 8, 9 偈頌