

## 수정완경사방정식의 타원형 수치모형

윤종태\*

\*경성대학교 토목공학과

# Elliptic Numerical Wave Model Solving Modified Mild Slope Equation

JONG-TAE YOON\*

\*Department of Civil Engineering, Kyungsung University, Busan, Korea

**KEY WORDS:** Modified Mild Slope Equation 수정완경사방정식, Generalized Conjugate Gradient Method 일반 공액경사법, Wave Transformation 파랑변형, Higher Order Bottom Effect 고차 저면효과, Iterative Technique 반복기법

**ABSTRACT:** An efficient numerical model of the modified mild slope equation, based on the robust iterative method is presented. The model developed is verified against other numerical experimental results, related to wave reflection from an arc-shaped bar and wave transformation over a circular shoal. The results show that the modified mild slope equation model is capable of producing accurate results for wave propagation in a region where water depth varies substantially, while the conventional mild slope equation model yeilds large errors, as the mild slope assumption is violated.

### 1. 서 론

해안구조물의 올바른 설계, 시공 그리고 유지관리를 위해서는 불규칙한 지형으로 인한 해안에서의 파랑변형을 정확히 예측할 수 있어야 한다. Berkhoff(1972)의 완경사방정식은 선형분산계에서 이러한 파랑변형을 수심에 대한 제약이 없이 잘 모의할 수 있어 연안역에서의 파랑변형 해석에 광범위하게 적용되어 왔다. Berkhoff는 식의 유도 과정에서 완경사 가정, 즉  $\nabla h / kh \ll 1$  ( $\nabla$ =수평미분연산자,  $k$ =파수,  $h$ =수심)을 도입하였고 따라서  $(\nabla h)^2$ 과  $\nabla^2 h$ 에 비례하는 이차 저면효과는 무시되었다. Booij(1983)는 단일경사 지형에서의 파향 전파에 따른 반사계수를 계산하여 완경사방정식의 한계를 검토하였는데, 약 1:3의 저면경사에서도 충분히 정확한 것으로 판단하였다.

이후 유도과정에서 무시되었던 이차 저면효과를 고려하므로써 급한 경사나 물결 형상의 지형과 같은 급변 지형에서도 정확도를 유지할 수 있는 수정완경사방정식에 대한 연구가 시작되었고 Massel(1993)과 Chamberlain and Porter(1995)는 Galerkin-eigenfunction 기법을 사용하여 타원형의 수정완경사방정식을 발표하였다. 그리고 Suh et al.(1997)은 Green의 둘째 등식과 Lagrange 공식을 사용하여 불규칙파에 대한 두 개의 쌍곡선형의 식을 제안하였다. 이상의 식들은 서로 다른 과정을 거쳐 유도되었지만 결국은 동일한 형태의 식, 즉 수정완경사방정식으로 표현된다.

타원형 편미분방정식으로 표현되는 완경사방정식을 해석하기 위해, 유한요소법 또는 유한차분법을 사용하는 여러 가지

수치모형이 개발되었다. 유한요소법을 사용할 경우 요소의 크기 및 배열이 비교적 자유로워 국부적으로 보다 정교한 해를 얻을 수 있는데 비해 유한차분기법의 경우 그 적용이 단순하여 운용의 편리함이 장점이다(Houston, 1981). 하지만 이들 모형을 사용하여 어느 정도 합리적인 결과를 얻기 위해서는 한 파장당 최소 10개 정도의 격자 분할이 필요하므로, 해석 대상 해역이 광역이면 기억용량과 연산시간이 과도하게 커지는 단점이 있었다.

Radder(1979)는 포물형 근사를 도입함으로써 이러한 문제를 해결하였고, 포물형 모형은 현재도 광역 파랑모형으로 널리 쓰이고 있다. 하지만 파랑 진행 방향으로의 반사와 회절을 고려할 수 없고 파랑의 주 진행 방향이 고정되어야 하는 단점이 있어 항내에서의 파랑등을 제대로 모의할 수 없는 제한이 있다.

또 다른 시도는 완경사방정식을 시간의존 형태의 쌍곡형 방정식으로 변환하여 해석하는 것으로서(Copeland, 1985) 지배방정식은 한 쌍의 일계 편미분방정식으로 표현된다. Dong and Al-Mashouk(1989)은 타원형 모형과 쌍곡형 모형의 비교연구를 행하였는데 두 모형의 효율성은 거의 비슷한 것으로 나타났다. 두 모형의 파장당 최소 격자 분할은 비슷하게 요구되었고, 쌍곡형 모형의 경우 정상상태에 도달하기 위한 시간이 과도하게 커지는 경우가 가끔 발생하였다.

Panchang et al.(1991)과 Zhao and Anastasiou(1996)는 원래의 타원형방정식을 사용하므로써 식에 내재된 물리적 성질을 그대로 보존하면서 광역에도 적용 가능한 수치모형들을 발표하였다. 이들 모형의 특성은 완경사방정식을 차분화하여 생성되는 연립방정식을 푸는 과정에서 수학자들에 의해 최근 개발된 강력한 반복기법들을 적용하므로써 기억용량의 제약을 피하고 아울러 연산의 효율성을 제고한 것이다. 윤종태(1998)는

제1저자 윤종태 연락처: 부산광역시 남구 대연3동 110-1

051-620-4752 gtyun@star.ks.ac.kr

이러한 기법의 하나인 공액경사법(Conjugate Gradient Method)을 이용하여 에너지 감쇠역을 포함하는 과량장을 해석하고, 반복기법의 효율성을 확인하였다.

본 연구에서는 수정완경사방정식을 Helmholtz 형태로 변환한 후, 이에 대해 강력한 반복기법의 하나인 GCGM (Generalized Conjugate Gradient Method)을 적용하여 해석해보고자 한다. 완경사방정식과의 비교를 통해 수정완경사방정식의 특성을 확인하고, 다른 수치해 및 실험치와 비교하여 본 수치기법의 적용성을 검토해보고자 한다.

## 2. 지배방정식

Massel(1993)의 수정완경사방정식은 다음 식으로 표시된다.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \Phi) + \sigma^2 \left\{ \frac{C_g}{C} - R_1 (\nabla h)^2 - R_2 \nabla^2 h \right\} \Phi = 0 \quad (1)$$

여기서  $\Phi$ 는 정상상태의 평균해수면상의 속도포텐셜,  $\sigma$ 는 각 주파수,  $C$ 는 파속 그리고  $C_g$ 는 군속도이다. 2차 저면효과를 결정하는 계수  $R_1$ 과  $R_2$ 는 다음과 같다.

$$R_1 = \frac{1}{\cosh^2 kh} (W_1 I_1 + W_2 I_2 + W_3 I_3 + W_4 I_4 + W_5 I_5 + W_6) \quad (2)$$

$$R_2 = \frac{1}{\cosh^2 kh} (U_1 I_1 + U_2 I_2 + U_3 I_3) \quad (3)$$

$W_i$ ,  $U_i$  그리고  $I_i$ 에 대한 정확한 표현은 Massel의 논문에서 나타난  $W_1$ 과  $W_2$ 에 대한 결함을 수정한 Suh et al. (1997)의 논문에서 정리되어 있다. 파수  $k$ 는 분산관계식에서 결정된다.

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (4)$$

식 (1)은 Chamberlain and Porter(1995)의 식과 동일하고 저면경사의 자승 $(\nabla h)^2$ 과 저면곡률  $\nabla^2 h$ 에 비례하는 수심변화의 이차효과들을 무시하면 Berkhoff(1972)의 완경사방정식이 된다.

식 (1)을 Helmholtz 형태로 변환하면 다음과 같다.

$$\nabla^2 \phi + K^2 \phi = 0 \quad (5)$$

여기서

$$\phi = (CC_g)^{1/2} \Phi \quad (6)$$

$$K^2 = k^2 \left\{ 1 - \frac{C}{C_g} (R_1 (\nabla h)^2 + R_2 \nabla^2 h) \right\} - \frac{\nabla^2 (CC_g)^{1/2}}{(CC_g)^{1/2}} \quad (7)$$

## 3. 경계조건

경계치 문제는 경계조건에 따라 그 해가 특히 민감하게 변화하므로 적절한 경계조건을 사용하여야 한다. 외해 경계에서는 방사경계조건을 활용하는데, 경계에서 해석 영역내로의 부적합한 반사파가 발생하지 않도록 주의해야 한다. 반사경계에서는 방사경계조건에 반사계수를 도입한다.

입사경계에서의 입사파를  $\phi_m = A \exp(iKx)$ 으로 반사파를  $\phi_n = B \exp(-iKx)$ 로 두면 입사경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = iK (2\phi_m - \phi) \quad (8)$$

반사경계조건은 반사율을 고려한 다음 조건을 사용할 수 있다(Tsay and Liu, 1983).

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \alpha iK \phi \quad (9)$$

하단경계(downwave boundary)에서 파의 반사를 억제시키는 스폰지 경계층을 사용할 경우, 스폰지층 내에서 식(10)과  $K$ 는 다음과 같다.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \Phi) + \sigma^2 \left\{ \frac{C_g}{C} - R_1 (\nabla h)^2 - R_2 \nabla^2 h \right\} \Phi + i\sigma W \Phi = 0 \quad (10)$$

$$K^2 = \kappa^2 \left\{ 1 - \frac{C}{C_g} (R_1 (\nabla h)^2 + R_2 \nabla^2 h) \right\} - \frac{\nabla^2 (CC_g)^{1/2}}{(CC_g)^{1/2}} + \frac{i\sigma W}{CC_g} \quad (11)$$

여기서  $W$ 는 감쇠계수로써 다음과 같다.

$$W = \begin{cases} 0 & ; \text{스폰지층 외부} \\ \frac{e^{\delta/s} - 1}{e - 1} & ; \text{스폰지층 내부} \end{cases} \quad (12)$$

여기서  $s$ 는 스폰지 경계층의 폭,  $\delta$ 은 경계층 시작점으로부터의 거리이다.

본 연구에서의 수치실험은 스폰지 경계층을 사용하여 수행되었다.

## 4. 수치기법

격자점(i,j)에서의 포텐셜을  $\phi_{i,j}$ 로 두고 식 (5)를 2차의 기법으로 차분화하면( $\Delta x = \Delta y$ ) 다음과 같다.

$$\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + [(K\Delta x)^2 - 4]\phi_{i,j} = 0 \quad (13)$$

대상해역의 격자망에 대해 위와 같은 차분식을 적용하면 다음과 같은 연립방정식이 얻어진다.

$$[A]\{\phi\} = \{f\} \quad (14)$$

여기서  $[A]$ 는 계수행렬,  $\{\phi\}$ 는 미지벡터 그리고  $\{f\}$ 는 경계 조건의 차분화로부터 생기는 계수벡터이다.

Panchang et al.(1991)은 식 (14)를 풀기위해 PCG (Preconditioned Conjugate Gradient) 기법을 사용하였다. 반복기법이 수렴하기 위해서는 계수행렬  $[A]$ 의 대각요소가 지배적 (diagonally dominant)이거나 혹은 대칭에 양의 정수(positive definite)이어야 한다. CG기법이 수렴하기 위해서는  $[A]$ 가 대칭에 양의 정수이어야 하므로 식(13)에  $[A]$ 의 공액전치행렬을 곱하는 Gauss 변환을 사용하였다. 하지만 이 경우 스펙트럼 반경이 커져 수렴속도가 느려지므로 전처리(pre-conditioning) 과정을 사용하여 수렴속도를 향상시켰다.

이에 비해 Li(1994)는 GCG(Generalized Conjugate Gradient) 기법을 사용하였는데 일반적인 CG기법이  $f(x) = xAx/2 - fx$ 를 최소화 하는데 비해 GCG기법은  $f(x) = Ax - f^2/2$ 를 최소화하므로 계수행렬이 대칭이기만하면 적용가능하다. PCG기법에 비해 반복횟수는 늘어나지만 횟수당 연산량이 적어지므로 PCG기법과 비슷한 정도의 연산효율을 보여 주었다. 또한 필요한 기억용량이 적고 전처리과정 등이 불필요하므로 본 연구에 선 GCG기법을 적용하였다. 계산과정은 다음과 같다.

1. 초기치  $\phi_0$ 를 선택한다.
2.  $\{P_0\} = \{r_0\} = \{f\} - [A]\{\phi_0\}$
3.  $\{u_i\} = [A]\{P_i\}$
4.  $\alpha_i = \frac{\{r\}^T [A]\{r_i\}}{\{u_i\}^T \{u_i\}}$
5.  $\{\phi_{i+1}\} = \{\phi_i\} + \alpha_i \{P_i\}$
6. Check convergence
7.  $\{r_{i+1}\} = \{r_i\} - \alpha_i \{u_i\}$
8.  $\{\beta_i\} = \frac{\{r_{i+1}\}^T [A]\{r_{i+1}\}}{\{r_i\}^T [A]\{r_i\}}$
9.  $\{P_{i+1}\} = \{r_{i+1}\} + \beta_i \{P_i\}$
10.  $i = i + 1$ 로 두고 단계 3으로 간다.

여기서  $\{P\}$ 는 추적방향벡터(search direction vector),  $\{r\}$ 은 오차벡터(residual vector) 그리고  $\alpha, \beta$ 는 복소수이다. 이처럼 GCG기법은 Gauss 변환이 필요없고 전처리 과정이 불필요하여 연산구조가 대단히 간단하고 전산화가 용이하다.

## 5. 적용 및 검토

### 5.1 호상사주 지형에서의 반사 실험

실험대상 지형은 Lee et al.(1998)의 호상사주 지형을 사용하였고 실험대상 지형 및 연산영역은 Fig. 1과 같다. 수심은 다음 식으로 주어진다.

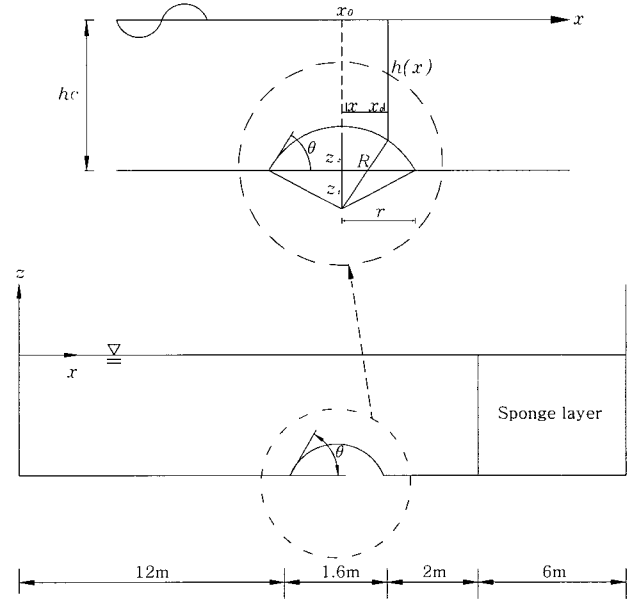


Fig. 1 Computational domain for numerical test of waves propagating over an arc-shaped bar.

$$h(x) = \begin{cases} h_c + \frac{r}{\tan\theta} - \sqrt{\left(\frac{r}{\sin\theta}\right)^2 - (x-x_0)^2} & , x-x_0 \leq r \\ h_c & , x-x_0 \geq r \end{cases} \quad (15)$$

평탄수역에서의 수심  $h_c$ 는 85cm, 호상구간폭의 반  $r$ 은 80cm 그리고  $x_0$ 는 호 중심에서의  $x$ 좌표이다. 지형의 기하학적 관계에서 다음의 수심에 대한 식을 얻을 수 있다.

$$h = h_c - z_2 \quad (16)$$

$$z_1 + z_2 = \sqrt{R^2 - (x-x_0)^2} \quad (17)$$

여기서  $z_1 = r/\tan\theta$ ,  $R = r/\sin\theta$ 이다. 호상사주 전방 경계에서의 각도  $\theta$ 를  $0^\circ$ 에서  $90^\circ$ 까지 변화시킬 때  $x_0$ 에서의 수심은 85cm에서 5cm의 분포를 가진다. 파의 주기는 1.716초로서  $kh_c = 0.42\pi$ 의 천이역에 해당한다. 반사계수는  $x = L_c$ 와  $x = 2L_c$ 사이의 진폭으로부터 계산하였고 여기서  $L_c$ 는 평탄수역에서의 파장이다.

지형이 비교적 단순하여 적용이 까다롭지만 않으면 일반적

으로 유한요소법이나 특성함수전개(eigenfunction expansion)법 등이 유한차분모형 보다는 정확한 결과를 보여준다. Fig. 2에 본 모형의 계산결과를 Lee et al.(1998)의 특성함수전개법을 사용한 경우의 해와 비교하였다.

본 모형과 특성함수 전개법의 결과를 보면, 전면 경사각  $\theta$ 가 증가함에 따라 반사계수도 증가하여  $\theta=75\sim77^\circ$ 에서 최대값을 보이고 이후엔 급격히 감소하여  $\theta=87\sim88^\circ$ 에서는 거의 영에 가까운 값을 보인다. 그리고 그 이후 다시 증가하는 양태를 보인다. 이러한 독특한 현상은 수심변화 지형에서 생긴 개별적 반사파들의 진폭과 위상이 결합되어 생기는 변화로 생각된다.

특성함수전개법의 결과에 비해 본 모형의 경우, 반사계수의 최대값이 약간 작고 최대값의 발생 각도도 약  $2^\circ$  정도 큰 값을 보여주지만 전체적으로 잘 일치하고 있다고 판단된다. 이에 비해 완경사방정식을 사용한 경우의 결과는  $\theta$ 가  $30^\circ$  이상에서부터 반사계수가 증가하는 형태를 보였고 전체적으로 낮은 값을 보여주었다. 또한  $87\sim88^\circ$  후에서의 반사계수의 증가도 나타나지 않았다. 이러한 차이는 수정완경사방정식에 포함된 이차 저면효과에 기인한 것으로서, 급변 지형에서의 수정완경사방정식의 효율성을 확인할 수 있다. 완경사방정식에 저면 곡률을 추가한 경우는 반사계수의 최대값이 크기는 하지만  $60^\circ$ 이하인 경우엔 수정완경사방정식보다 더 잘 일치하고 있다. 이에 비해 완경사방정식에 경사의 지승항을 추가한 경우는 오히려 결과가 더 나빠진 것을 볼 수 있다. 하지만 이차 저면효과는 상대 수심  $kh$ 의 함수이어서 실험조건이 달라지면 두 이차효과의 상대적 역할 또한 달라지므로, 이러한 현상은 본 실험에 국한된 특별한 경우로 이해해야 할 것이다.

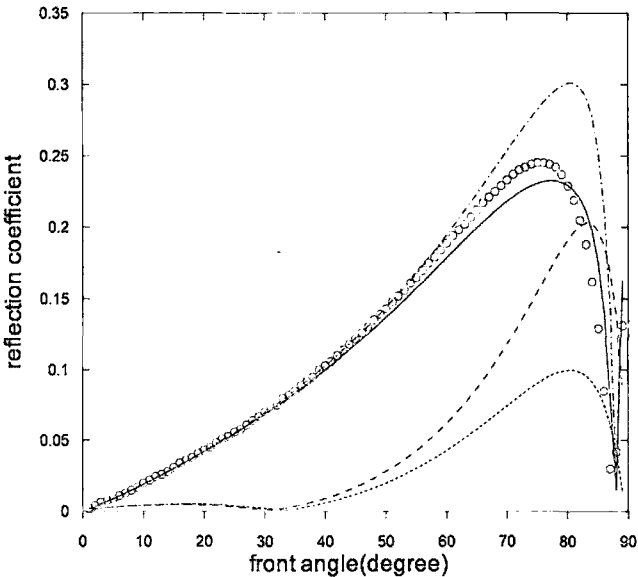


Fig. 2 Reflection coefficient vs. front angle of an arc-shaped bar ; - - - = MSE model, ... = MSE model plus bottom slope square term, - · - · - = MSE model plus bottom curvature term, — = MMSE model, ○ = eigenfunction expansion method.

5.2 원형 천퇴지형에서의 파라변형 실험

Suh et al.(2001)은 수정완경사방정식의 특성을 확인하기 위해 이차 저면효과가 중요한 원형의 천퇴지형에 대한 실험을 행하고, 이를 수정완경사방정식으로부터 유도된 쌍곡형 모형의 검증에 사용하였다. 원형 천퇴에서의 수심은 천퇴의 중심으로부터의 거리가  $r$ 일때 다음 식으로 주어진다.

$$h = h_0 - b \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \tag{18}$$

여기서  $h_0=0.3m$ 는 평탄 수역에서의 수심,  $b=0.8m$ 는 천퇴의 중심에서의 천퇴높이 그리고  $R=0.45m$ 는 천퇴의 반경이다. 수심의 곡률은  $4b/R^2$ 으로 일정한데 비해 수심경사의 지승은 천퇴중심에서의 영에서부터 천퇴경계에서의  $4b^2/R^2$ 으로 변화하는 경우이다. 파고는 5개의 횡단면과 1개의 종단면에 대해 측정되었다(Fig. 3). 입사파의 파고는 3cm, 주기는 1.259초로서 평탄수역에서의  $kh=1.0$ 이다.

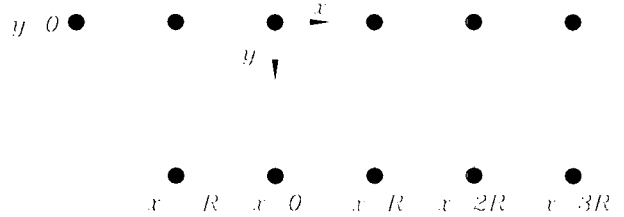


Fig. 3 Wave measurement transects.

Fig. 4와 같은 연산영역에 대해  $\Delta x = \Delta y = 0.0314$ 를 사용하였고 완경사방정식과 수정완경사방정식을 적용한 결과를 실험치와 함께 나타내었다(Fig. 5).

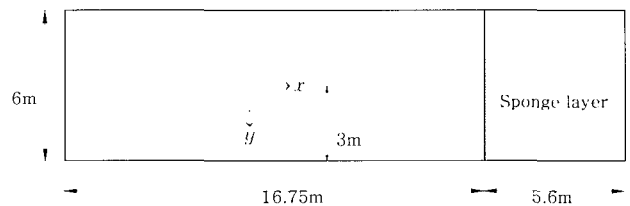


Fig. 4 Computational domain.

종단방향의 파고변화를(Fig. 5(a)) 보면 수정완경사방정식의 경우 실험치에 비해 천퇴 전에서는 약간 낮은 값을, 그리고 천퇴 후에는 약간 높은 값을 나타내지만 전체적으로 양호한 일치를 보여주고 있다. 이에 비해 완경사방정식은 전반적으로 실험치와 큰 편차를 나타내고 있으며 지형변화 효과가 충분히 고려되지 못하여 파랑에너지의 집중점(focal point)이 제대로 구현되지 못하고 있음을 볼 수 있다. 횡단방향의 파고변화를 보면 천퇴의 시작부에서부터(Fig. 5(b)) 천퇴에서의 반사파로 인해 중앙지역에서는 파고의 증가가, 그리고 측면에서는 파고의 감소가 발생하는 것을 확인할 수 있다.

파고가 천퇴상으로 진입하면 천수와 굴절효과로 인해 이러한 현상이 더욱 현저하게 나타나게 된다. 이후 파랑이 천퇴의 중심부를 빠져나가면서부터 지형 변화의 영향은 줄어들기 시작하고 회절의 평탄화 효과가 작용하면서 파고의 횡단방향 변화가 줄어드는 것을 확인할 수 있다(Figs. 5(c)~5(f)).

이 경우도 수정완경사방정식의 경우 실험치와 양호한 일치를 보여주는데 비해 완경사방정식의 경우 파랑집중점이 제대로 구현되지 못하여 실험치와 차이를 보이고 있다.

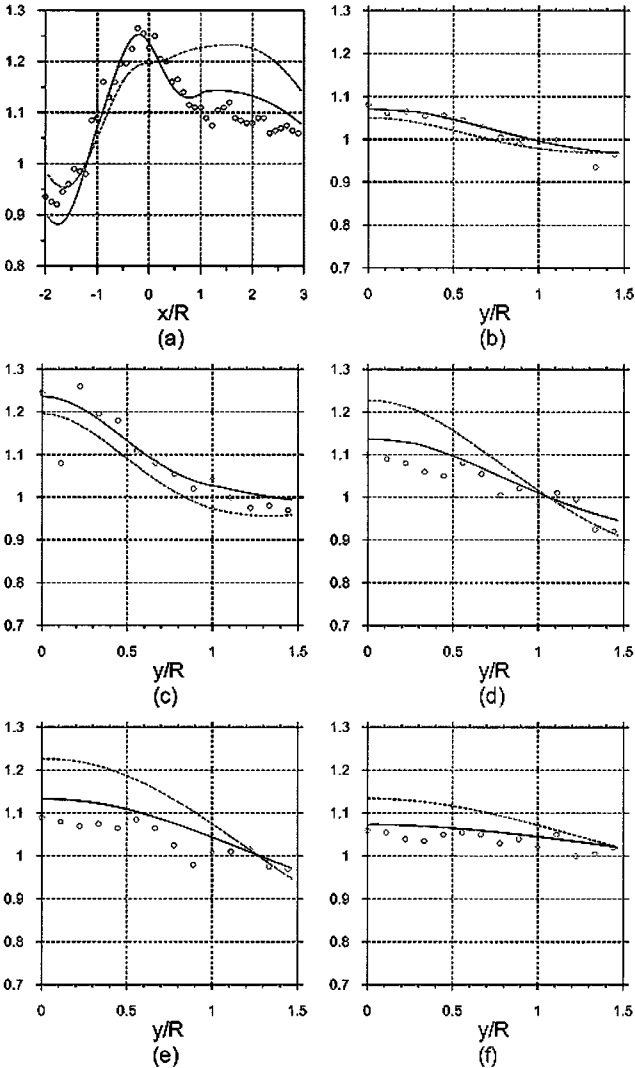


Fig. 5 Comparison of numerical model results with experimental data : Solid line = MMSE model ; dashed line = MSE model ; ○ = experimental data. (a)  $y=0$ , (b)  $x=-R$ , (c)  $x=0$ , (d)  $x=R$ , (e)  $x=2R$ , (f)  $x=3R$ .

### 6. 결 론

타원형 편미분방정식으로 표현되는 수정완경사방정식을 식의 변화 없이 그대로 해석할 수 있는 유한차분 모형을 구성

하였고 연산의 효율을 위해 GCGM 반복기법을 적용하였다.

수치모형의 적용성을 확인하기 위해 호상사주 지형에서의 반사실험과 원형 천퇴지형에서의 파랑변형 실험을 행하였다. 반사실험의 경우 특성함수 전개법의 결과와 잘 일치하였고, 반사계수가 최대값을 보여준 후 감소하였다가 다시 증가하는 독특한 현상도 잘 모의하였다. 파랑변형실험에서도 실험치와 일반적으로 잘 일치하였고 천퇴전면에서의 반사, 천퇴상에서의 천수 및 굴절 그리고 후면에서의 회절현상이 잘 구현되었다.

두 가지 실험 모두에서 완경사방정식은 이차의 수심변화 효과를 제대로 나타내지 못하였고 실험치와도 큰 차이를 보였다.

이상의 수치실험을 통해 급변지형에서 수정완경사방정식의 효율성을 확인할 수 있었고, 적용의 편의성과 연산의 효율성이 뛰어난 유한차분 기법으로 수정완경사방정식을 경제적으로 해석할 수 있음을 확인 하였다.

### 사 사

이 논문은 2002학년도 경성대학교 학술지원 연구비에 의하여 연구되었음.

### 참 고 문 헌

윤종태 (1998). "에너지 감쇠역을 포함하는 파랑장에 대한 반복 기법의 적용", 한국해양공학회지, 제12권 제1호, pp 120~127.

Berkhoff, J.C.W. (1972). "Computation of Combined Refraction-Diffraction", Proc. 13th Coastal Eng. Conf., Vancouver, Vol 1, pp 471-490.

Booij, N. (1983). "A Note on the Accuracy of the Mild-Slope Equation", Coastal Eng., Vol 7, pp 191-203.

Chamberlain, P.G., Porter, D. (1995), "The Modified Mild-Slope Equation", J. Fluid Mech., Vol 291, pp 393-407.

Copeland, G.J.M. (1985). "A Practical Alternative to the Mild-Slope Wave Equation", Coastal Eng., Vol 9, pp 125-149.

Dong, P., Al-Mashouk, M. (1989). "Comparison of Transient and Steady State Wave Models for Harbour Resonance", Proc. Conf. on Hydraulic and Environmental Modeling of Coastal, Estuarine and River Waters, Bradford, pp 233-244.

Ho uston, J.R. (1981). "Combined Refraction and Diffraction of Short Waves Using the Finite Element Method", Applied Ocean Res., Vol 3, pp 163-170.

Lee, C., Park, W.S., Cho, Y.S., Suh, K.D. (1998). "Hyperbolic Mild-Slope Equations Extended to Account for Rapidly Varying Topography", Coastal Eng., Vol 34, pp 243-257.

Li, B. (1994). "A Generalized Conjugate Gradient Models for the Mild Slope Equation", Coastal Eng., Vol 23, pp 215-225.

- Massel, S.R. (1993). "Extended Refraction-Diffraction Equation for Surface Waves", *Coastal Eng.*, Vol 19, pp 97-126.
- Panchang, V.G., Pearce, B.R., Wei, G., Cushman-Roisin, B. (1991). "Solution of the mild-slope wave problem by iteration", *Applied Ocean Res.*, Vol. 13, pp 187-199.
- Radder, A.C. (1979). "On the Parabolic Equation Method for Water Wave Propagation", *J. Fluid Mech.*, Vol 95, pp 159-176.
- Suh, K.D., Lee, C., Park, W.S. (1997). "Time-Dependent Equation for Wave Propagation on Rapidly Varying Topography", *Coastal Eng.*, Vol 32, pp 91-117.
- Suh, K.D., Lee, C., Park, Y.H., Lee, T.H. (2001). "Experimental Verification of Horizontal Two-Dimensional Modified Mild-Slope Equation Model", *Coastal Eng.*, Vol 44, pp 1-12.
- Zhao, Y., Anastasion, K. (1996), "Modelling of Wave Propagation in the Rearshore Region Using the Mild-Slope Equation with GMRES-Based Iterative Solvers", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol 23, pp 397-411.

---

2004년 4월 23일 원고 접수

2004년 7월 27일 최종 수정본 채택