

## 탄성 변형 영역을 고려한 비정상 평면 변형 이상 공정 이론

이원오\* · 정관수\*\*\* · Sergei Alexandrov\*\*\* · 강태진\*

(2004년 5월 13일 접수)

### Nonsteady Plane-strain Ideal Forming with Elastic Dead Zone

W. Lee, K. Chung, S. Alexandrov and T.J. Kang

#### Abstract

Ever since the ideal forming theory has been developed for process design purposes, application has been limited to sheet forming and, for bulk forming, to two-dimensional steady flow. Here, application for the non-steady case was performed under the plane-strain condition based on the theory previously developed. In the ideal flow, material elements deform following the minimum plastic work path (or mostly proportional true strain path) so that the ideal plane-strain flow can be effectively described using the two-dimensional orthogonal convective coordinate system. Besides kinematics, for a prescribed final part shape, schemes to optimize a preform shape out of a class of initial configurations and also to define the evolution of shapes and boundary tractions were developed. Discussions include the two problematic issues on internal tractions and the non-monotonous straining. For demonstration purposes, numerical calculations were made for a bulk part under forging.

**Key Words** : Rigid-perfect Plasticity, Nonsteady Ideal Bulk Forming, Method of Characteristics, Orthogonal Convective Coordinate System, Elastic Dead Zone, Non-monotonous Straining, Two-step Method

#### 1. 서론

공정 시 에너지 소비 면에서 최적의 변형 조건을 제시하기 위한 이상 공정 이론(ideal forming theory)에서는 매 순간에서의 주 인장 변형선들이 공정 내내 지정된 물체선을 따라서 위치해야 하고,<sup>(1-6)</sup> 모든 물질점에서의 주 변형률의 부호가 고정되어야 한다.<sup>(7,8)</sup> 이러한 변형 조건을 만족시키는 평면 변형 하에서의 등방 강 완전 소성체의 변형은 균일한 면적 분포를 갖는 직교 이상 유동 좌표계(orthogonal convective coordinate system)를 이용하여 표현할 수 있다.<sup>(9)</sup> 이러한

이상 유동 좌표계를 이용한 이상 공정을 구현하기 위해 특성선에 의한 해법(method of characteristics)에 기초를 둔 수치 해석 코드가 개발되었고,<sup>(10)</sup> 아울러 주어진 최종 형상에 대하여 가장 적합한 초기 형상을 얻기 위한 최적화 이론과 중간 형상 및 각 형상에서의 응력 분포와 경계 외력에 대한 이론이 마련되었다.<sup>(11)</sup>

응용 예로서 단조 공정 부품에 대한 이상 유동 좌표계를 구현하고, 최적의 초기 형상과 각각의 중간 형상에서의 응력 분포와 경계 외력을 구해보고 중간 형상 구현 시 발생하는 탄성 변형 영역(elastic dead zone)과 비단조 변형(non mo-

\* 서울대학교 재료공학부

\*\* 서울대학교 신소재공동연구소

\*\*\* Institute for Problems in Mechanics, RAS, Russia

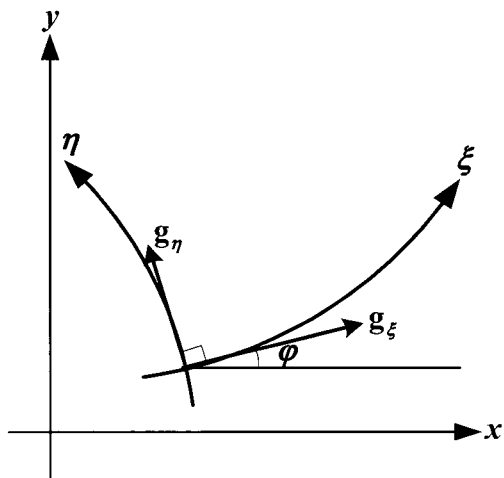


Fig. 1 The orthogonal convective coordinate system

nonotous straining) 문제에 대하여 논하여 보았다.

## 2. 이상 유동 좌표계와 평형 방정식

평면 변형 하에서 균일한 면적 분포를 갖는 이상 유동 좌표계를 Fig. 1 에 나타내었다. 이러한 유동 좌표계는 두 개의 기하변수 ( $h, \psi$ ) 로 표현이 가능하고 다음과 같은 관계식을 갖는다.

$$hh_{,\eta} + \psi_{,\xi} = 0 \quad h^3\psi_{,\eta} + h_{,\xi} = 0. \quad (1)$$

여기서 ( $\xi, \eta$ ) 는 물체선에 고정되어 있는 주변 형선으로 이루어진 이상 유동 좌표계의 변수이고, ( $x, y$ ) 는 Cartesian 직교 좌표계의 성분이다. 또한  $h$  와  $\psi$  는 각각  $\xi$ -기저 벡터의 크기와  $x$ -축에 대한 사이각이다. 식(1)은 쌍곡선형 편미분 방정식이기 때문에 특성선에 의한 해법에 의해 푸는 것이 유리하다. 특성선에 의한 해법에 의해

$$\begin{aligned} d \ln h - d\psi &= 0 \text{ for which } \eta_{,\xi} = -h^2 \text{ (}\alpha\text{-line)} \\ d \ln h + d\psi &= 0 \text{ for which } \eta_{,\xi} = h^2 \text{ (}\beta\text{-line)} \end{aligned} \quad (2)$$

이 된다. 또한 평면 변형 하에서 평형 방정식은

$$\sigma_{x,x} + \sigma_{xy,y} = 0 \quad \sigma_{xy,x} + \sigma_{y,y} = 0 \quad (3)$$

이 된다. 여기서  $\sigma_x, \sigma_y$  와  $\sigma_{xy}$  는 각각 Cartesian Cauchy 응력 성분값이다.

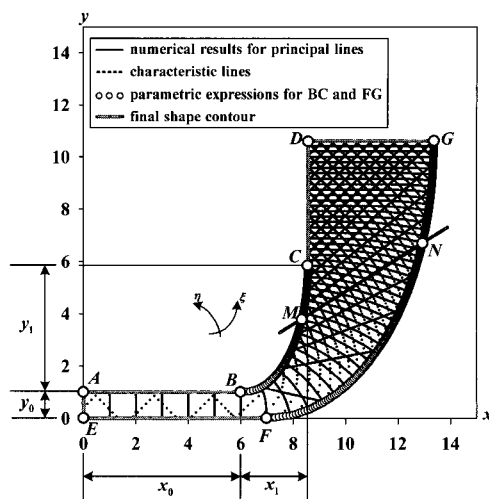


Fig. 2 The final part configuration analytically and numerically obtained

등방 강 완전 소성체의 Mises 항복 조건은

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2 = 4k^2 \quad (4)$$

이 되고 여기에 Fig. 1 에 나타난 좌표축의 기하 관계를 이용하여 평형 방정식을 얻어보면

$$\begin{aligned} p/2k + \ln h &= C^+ \text{ for the region with } \dot{h} \geq 0 \\ p/2k - \ln h &= C^- \text{ for the region with } \dot{h} \leq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

이 된다. 여기서  $p$  는 등방응력,  $k$  는 전단항복 응력,  $C^+$  와  $C^-$  는 경계 응력 조건에 의해 결정되는 임의의 상수이다.

## 3. 응용 및 결과

### 3.1 이상 유동 좌표계-해석해와 수치해

Fig. 2 에  $y$  축에 대칭을 이루는 주어진 최종 형상의 모습을 나타내었다. 각각의 경계선을 매개 변수화하여 나타내면 AE 는  $x=0$ , EF 는  $y=0$ , AB 는  $y=y_0$ , CD 는  $x=x_0+x_1$ , DG 는  $y=y_1+y_0(1+e^{\pi/2})$  으로 표현할 수 있고

$$\left. \begin{aligned} x(\theta) &= x_0 + x_1^2 \frac{\tan \theta}{y_1 d(\theta)} \\ y(\theta) &= y_0 + y_1 (1 - d(\theta)^{-1}) \end{aligned} \right\} \text{ for BC} \quad (6)$$

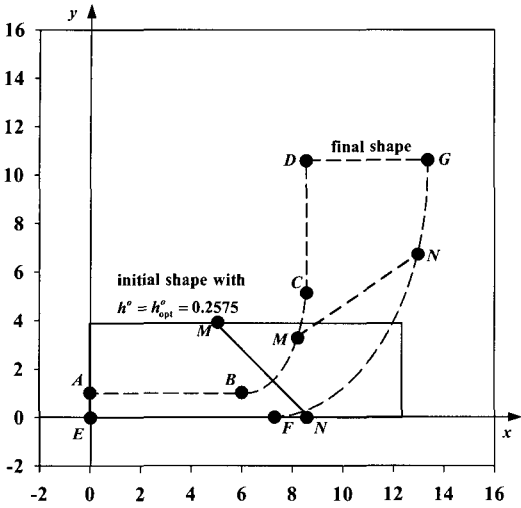


Fig. 3 The optimized initial and final shapes

$$\left. \begin{aligned} x(\theta) &= x_0 + x_1^2 \frac{\tan \theta}{y_1 d(\theta)} \\ &\quad + e^{-\theta} \sqrt{y_0} (\cos \theta + \sin \theta) \\ y(\theta) &= y_0 + y_1 (1 - d(\theta)^{-1}) \\ &\quad - e^{-\theta} \sqrt{y_0} (\cos \theta - \sin \theta) \end{aligned} \right\} \text{for FG} \quad (7)$$

이고, 매개 함수  $d(\theta) = \sqrt{1 + (x_1 \tan \theta / y_1)^2}$  이고,  $\theta$ 의 범위는  $0 \leq \theta < \pi/2$ 이다. 사용한 상수는  $x_0 = 6.0$ ,  $x_1 = 2.4117$ ,  $y_0 = 1.0$ ,  $y_1 = 4.8373$ , 그리고  $r_0 = -(\ln y_0)/2$ 이다. 또한 경계선 ABCD와 EFG에서의  $h$ 의 분포는 다음과 같다.

$$h^{ABCD} = h^{EFG} = e^{-\theta} / y_0. \quad (8)$$

식(8)으로부터 식(2)를 계산하는 수치 코드에 의한 결과 또한 Fig. 2에 나타내었는데 해석해(매개 변수)에 의한 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

### 3.2 최적 초기 형상

초기 형상을 정의하는 방법은 여러 가지가 있지만, 여기서는 하나의 예제로서 균일한  $h(=h^o)$  값을 갖는 직각 사각형을 초기 형상으로 가정한다. 초기 형상의 최적화를 위한 이론으로 다음과 같이 절대 변형률의 평균값  $K$ 를 정의하면

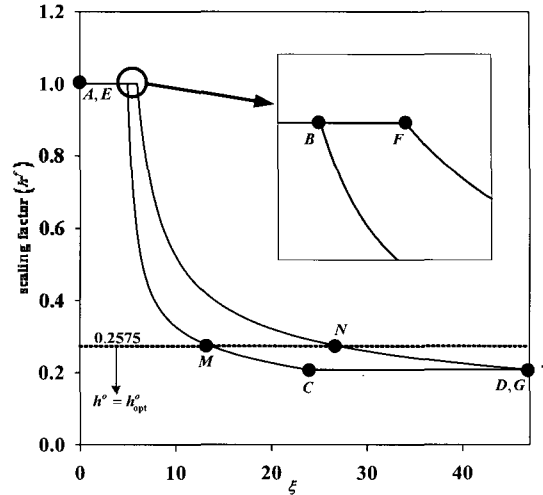


Fig. 4 The distribution of the scaling factor  $h^f$  along the boundary lines ABCD and EFG on the final shape

$$K = \frac{\int |\epsilon| dA}{A} \quad (9)$$

이 되고 여기서  $\epsilon = \ln(h^f/h^o)$ ,  $A$ 는 물체의 면적을 나타내고 위 첨자  $f$ 와  $o$ 는 각각 최종 형상과 초기 형상을 뜻한다.

식(9)에서 최적의  $h^o$ 는  $dK/dh^o = 0$ 를 통해  $K$ 를 최소화하여 얻을 수 있으며 그 값은  $h^o(=h^o_{opt}) = 0.2575$ 가 되고 Fig. 3에 최적의 초기 형상을 나타내었다.

Fig. 3에서 MN은  $h = h^o_{opt}$ 인 직선 특성선으로 탄성 변형선(elastic dead line)이 되며 물체는 MN을 기준으로 증가 변형률 영역(positive straining zone)인 ABMNF와 감소 변형률 영역(negative straining zone)인 DCMNG로 나뉜다.

Fig. 4에서 보듯이 ABMNF 영역은 최종 형상의  $h^f$  분포가  $h^o$ 보다 크고, DCMNG 영역에서는 반대이므로 단조 선형 변형(monotonous proportional deformation)시에 MN을 기준으로 변형률의 증감이 발생하는 것이다.

### 3.3 탄성 변형 영역과 비단조 변형

최적 초기 형상을 얻은 뒤 중간 형상을 얻는 과정에서 탄성 변형 영역(elastic dead zone)에서의 내부 마찰력(internal frictional force)과 비단조 변형(non-monotonous straining)에 의한 잉여 에너지의

발생을 없애야 한다.

탄성 변형 영역은 증가 변형을 영역과 감소 변형을 영역의 경계 영역을 의미하고, 이 영역을 기준으로 항복 응력의 상태가 증가 변형을 영역에서는  $\sigma_\xi = \sigma_\eta + 2k$  가 되고, 감소 변형을 영역에서는  $\sigma_\xi = \sigma_\eta - 2k$  가 된다. 따라서 MN 선이 주 변형을 선과 평행하지 않은 경우에는 이 선을 따라 내부 외력의 합이 0 이 되지 않기 때문에 내부 마찰력이 발생하게 되는 것이다.

비단조 변형은 공정 중간에 특정한 물체의 위치에서의 변형 양상이 인장과 압축이 모두 발생하는 경우를 뜻한다. 따라서 두 가지의 변형 양상이 모두 존재하기 때문에 잉여 에너지가 발생하게 되는 것이고, 변형을 거치면서 식(9)에서 정의된 최적의  $K$  값보다 더 큰 값을 얻게 된다.

이러한 탄성 변형 영역과 비단조 변형을 없앨 수 있는 한가지 방법으로는  $h^\circ$  를 최종형상의 최대값 혹은 최소값으로 선택하고  $h$  와  $\psi$  를 단조 선형 변형시키는 것이다. 초기 형상에서부터 증가 변형을 영역과 감소 변형을 영역이 함께 존재하지 않기 때문에 전 영역에 걸쳐서 탄성 변형 영역이 없는 중간 형상을 얻을 수 있다.<sup>(12)</sup>

### 3.4 중간 형상의 구현

탄성 변형 영역과 비단조 변형을 없앨 수 있는 다른 방법은 Fig. 5와 같이 2단계 변형(two-step method)을 고려하는 것이다. 1단계(stage 1,2,3) 변형에서는 경계선 MD는 고정시킨 채 AM에서만  $h$  와  $\psi$  를 변형시킨 후, 2단계(stage 3,4,5)에서 MD를 변형시키는 것이다. 따라서 1단계에서는 전체 물체에 걸쳐서 증가 변형을 영역만 존재하게 되고, 2단계에서는 감소 변형을 영역만 존재하게 되는 것이다. 즉, 변형 과정 동안 두 영역이 동시에 존재하지 않기 때문에 탄성 변형 영역이 제거될 수 있는 것이다.

또한 경계선에서  $h = c \exp(\pm\psi)$  을 만족하는  $h$  와  $\psi$  의 분포를 주게 되면 한 종류의 특성선들이 모두 직선이 되기 때문에  $h$  가 단조 변형을 하게 된다. 따라서

$$\left. \begin{aligned} h(\alpha) &= \alpha h^f + (1-\alpha)h^\circ && \text{for AM} \\ h(\alpha) &= h^\circ && \text{for MD} \end{aligned} \right\} \text{at step I} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} h(\alpha) &= h^f && \text{for AM} \\ h(\alpha) &= \alpha h^f + (1-\alpha)h^\circ && \text{for MD} \end{aligned} \right\} \text{at step II}$$

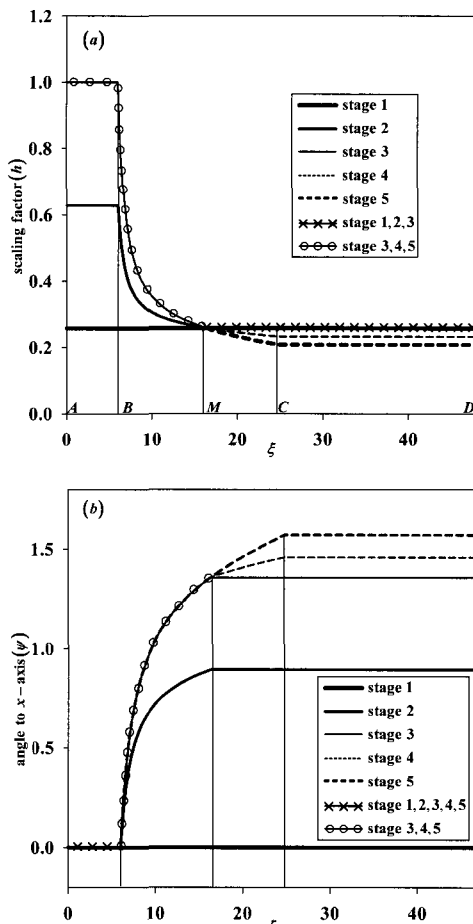


Fig. 5 Distribution of the (a)  $h$  and (b)  $\psi$  values along the boundary line

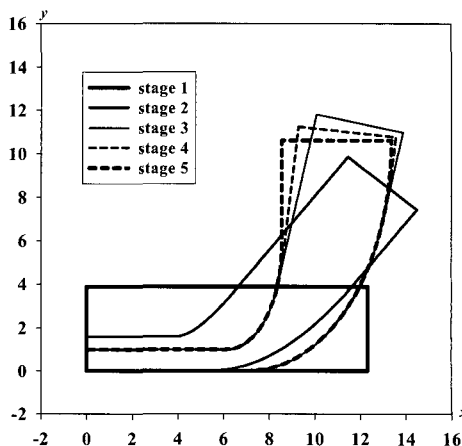


Fig. 6 Evolution of the part shapes

과  $h = c \exp(\pm \psi)$  을 만족하는  $\psi$  의 분포를 주게 되면 탄성 변형 영역과 비단조 변형이 제거된 중간 형상을 얻을 수 있으며 이러한 과정에 의한 중간 형상들을 Fig. 6 에 나타내었다.

### 3.4 경계 외력(boundary traction)

모든 중간 형상마다 응력과 경계 외력의 분포는 여러 경계 조건을 통해 식(5)의  $C^+$  와  $C^-$  을 결정하여 구할 수 있다. 우선 자유 경계 외력 조건(boundary traction-free condition)을 고려해 보면, 물체의 끝단 DG에서 경계 외력이 0이어야 하므로

$$\sigma_{\xi}^{DG} = 0 \quad (11)$$

가 된다. 식(11)을 통해 경계 외력을 각 단계에 대해서 구해보면

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi} &= 2k \ln \frac{h}{h^{DG}}, & \sigma_{\eta} &= 2k \left( \ln \frac{h}{h^{DG}} - 1 \right) & \text{during step I} \\ \sigma_{\xi} &= -2k \ln \frac{h}{h^{DG}}, & \sigma_{\eta} &= -2k \left( \ln \frac{h}{h^{DG}} - 1 \right) & \text{during step II} \end{aligned} \quad (12)$$

가 된다. 따라서 식(12)과 같이 자유 경계 외력 조건을 주게 되면  $\sigma_{\eta}$  가 양수와 음수를 모두 갖기 때문에 인장과 압축 경계 외력이 동시에 존재하게 된다.

인장 경계 외력이 없는 응력 분포는 비압축성(incompressibility condition)이라는 소성 이론에 근거하여 임의의 등방 응력(hydrostatic pressure)를 각 응력 성분에 주어서 얻을 수 있다. 다음과 같이 압축 경계 외력 조건(only compressive boundary tractions condition)을 고려하면

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}^{AE} &= 0 & \text{during step I} \\ \sigma_{\eta}^{DG} &= 0 & \text{during step II} \end{aligned} \quad (13)$$

이 되어야 한다. 식(3)과 (13)에 의해

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi} &= 2k \ln \frac{h}{h^{AE}}, & \sigma_{\eta} &= 2k \left( \ln \frac{h}{h^{AE}} - 1 \right) & \text{during step I} \\ \sigma_{\xi} &= -2k \left( \ln \frac{h}{h^{DG}} + 1 \right), & \sigma_{\eta} &= -2k \ln \frac{h}{h^{DG}} & \text{during step II} \end{aligned} \quad (14)$$

와 같은 경계 외력식을 얻을 수 있다. 압축 경계 외력 조건에 의한 결과로서 경계선 ABCD 와 EFG 에서의  $\bar{\sigma}_{\eta} (= \sigma_{\eta}/k)$  의 분포를 Fig. 7 에 나타내었다.

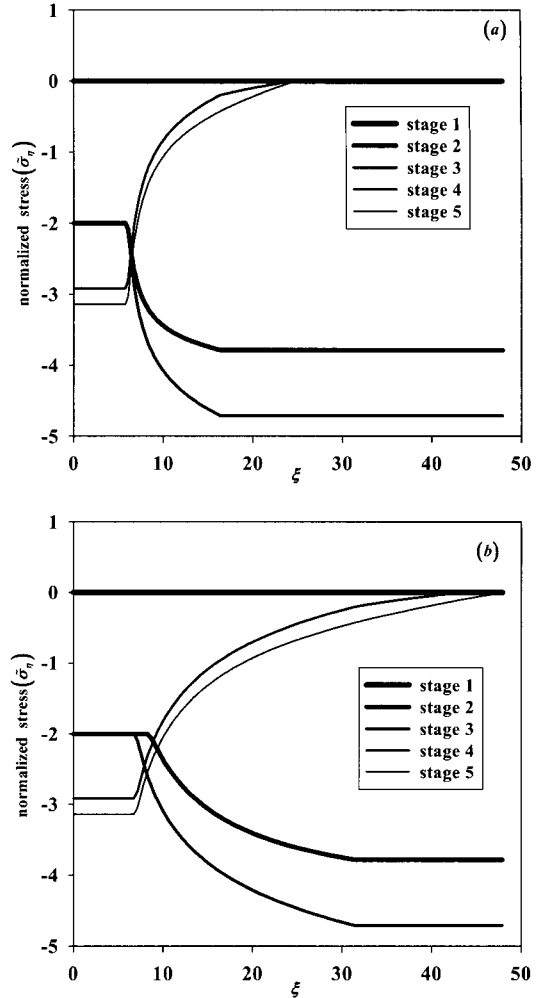


Fig. 7 Evolution of the normalized stress distribution along the boundary lines (a) ABCD and (b) EFG

## 4. 요약 및 결론

비정상 평면 변형 이상 공정 이론에 의해 물체의 변형 거동을 모사할 수 있는 이상 유동 좌표계를 구현하였고, 이를 단조 공정 제품에 응용하여 최적화된 초기 형상과 더불어, 탄성 변형 영역과 비단조 변형이 없는 중간 형상들을 구하였다. 또한 압축 경계 외력 조건을 통해 앞서 얻어진 중간 형상들에 대한 경계 외력의 분포를 알 수 있었다. 이와 같이 공정 상의 시행 착오를 줄이는 직접 설계법인 이상 공정 이론은 실제 단조 공정의 최적 설계에 유용하게 이용될 수 있을 것이다.

## 후기

본 연구는 철강 연구 센터(Center for Iron and Steel Research)의 지원을 받아 수행된 것으로 이에 감사 드립니다.

## 참고문헌

- (1) K. Chung and O. Richmond, 1992, "Ideal forming-I. Homogeneous deformation with minimum plastic work", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 34, pp. 575~591.
- (2) O. Richmond and M.L. Devenpeck, 1962, "A die profile for maximum efficiency in strip drawing", *Proc. 4th. U.S. Natl. Congr. Appl. Mech.*, R.M. Rosenberg (Ed.), ASME, New York, pp. 1053~1057.
- (3) O. Richmond and H.L. Morrison, 1967, "Streamlined wire drawing dies of minimum length", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 15, pp. 195~203.
- (4) R. Hill, 1967, "Ideal forming operations for perfectly plastic solids", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 15, pp. 223~227.
- (5) O. Richmond, 1968, "Theory of streamlined dies for drawing and extrusion", *Mechanics of the solid state*, F.P.J. Rimrott and J. Schwaighofer (Eds.), Univ. of Toronto, Toronto, pp. 154~167.
- (6) H.F. Weinberger, 1997, "On the nonexistence of certain ideal forming operations for extrusion and drawing dies", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 45, pp. 1275~1280.
- (7) K. Chung and O. Richmond, 1993, "A deformation theory of plasticity based on minimum work paths", *Int. J. Plasticity*, Vol. 9, pp. 907~920.
- (8) K. Chung and O. Richmond, 1994, "The mechanics of ideal forming", *J. Appl. Mech.*, Vol. 61, pp. 176~181.
- (9) O. Richmond and S. Alexandrov, 2000, "Nonsteady planar ideal plastic flow: general and special analytic solution", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 48, pp. 1735~1759.
- (10) 정관수, 이원오, 유용렬, 2002, "비정상 평면 변형에서의 이상유동", *한국섬유공학회지*, 제 39 권, 제 4 호, pp. 407~413.
- (11) 정관수, 이원오, O. Richmond, 2002, "평면변형 하에서의 비정상 이상공정이론", *춘계학술대회 논문집*, 한국소성가공학회, pp. 66~69.
- (12) K. Chung, W. Lee, T.J. Kang and J.R. Youn, 2002, "Nonsteady plane-strain ideal forming without elastic dead zone", *Fiber Polym.*, Vol. 3, pp. 120~127.