

## 박판 성형공정 유한요소 해석용 마찰모델

금영탁\* · 이봉현\*\*

(2004년 5월 13일 접수)

## Friction Model for Finite Element Analysis of Sheet Metal Forming Processes

Y.T.Keum and B.H.Lee

### Abstract

In order to find the effect of lubricant viscosity, tool geometry, forming speed, and sheet material properties on the friction in the sheet metal forming, friction tests were performed. Friction test results show that as the lubricant viscosity becomes lower, the friction coefficient is higher. When surface roughness is extremely low or high, the friction coefficient is high. The bigger die corner radii and punch speed are, the smaller is the friction coefficient.

From the experimental observation, the friction model which is the mathematical expression of friction coefficient in terms of lubricant viscosity, roughness and hardness of sheet surface, punch corner radius, and punch speed is constructed. By comparing the punch load found by FEM using the proposed friction model with that obtained from the experiment in 2-D stretch forming, the validity and accuracy of the friction model are demonstrated.

**Key Words :** Friction Model, Friction Coefficient, Sheet Metal Forming Process, Finite Element Analysis, Friction Test, Lubricant Viscosity

### 1. 서 론

컴퓨터 시뮬레이션을 통해 금형을 해석할 때 소재와 공구사이에 발생하는 마찰은 제품의 품질 및 성형의 성과에 영향을 주는 매우 중요한 요소들 중의 하나이다. 따라서 소재와 공구사이의 마찰 현상에 대해 명확히 규명하는 것은 제품의 성형성을 보장하고 해석의 정확성을 향상시키기 위해 필수불가결하기 때문에 박판성형증 마찰에 영향을 미치는 인자들에 관한 철저한 분석이 필요하다.

Hisakado 등은<sup>(1)</sup> 네 종류의 금속판을 이용하여 마찰과 소재의 표면조도, 마열 입자의 거동, 마열

정도와의 관계를 관찰하였다. Zmitrowicz 는<sup>(2)</sup> 열역학적인 접근방법으로 마찰열의 구성방정식을 유도하기 위한 일반적인 방법을 제시하였다. Parker 등은<sup>(3)</sup> 표면 열에 민감하게 반응하는 물질을 코팅한 재료를 접촉 운동시키면서 열전대를 이용하여 표면온도를 측정하는 방법으로 접촉마찰열에 관하여 연구하였다. Teodorrescu 등은<sup>(4)</sup> 박판의 디프로우잉 공정에서 화학조성, 점도, 작업조건등이 마찰 현상에 미치는 영향에 대해 연구하였다. Sniekers 등은<sup>(5)</sup> 기존의 BBT(Bending Under Tension) 마찰 실험 장치를 응용하여 폴리 전후의 힘을 측정하는 대신 마찰에 의한 폴리의 회전토크를 측정하여 마찰계수를 계산하였다. 또한 FEM 해석에

\* 한양대학교 CPRC 기계공학부

\*\* 한양대학교 일반 대학원 (현재 LG 전자 근무)

적용하여 이러한 마찰계수 계산법의 유효성을 입증하였다. Jonasson 등은<sup>(6)</sup> 판재의 종류가 달라짐에 따라 판재 표면 위상과 마찰계수의 변화를 관찰하기 위한 실험을 수행하였다. 편치와 접촉하기 전의 판재 표면 위치와 편치 접촉 후의 판재 표면 위치를 각각 측정하여 고립된 오일 포켓의 평균 면적과 마찰계수 사이의 관계를 결정하고, 이로부터 3 차원 표면의 조도 파라미터들과 마찰계수는 서로 상관성이 없음을 관찰하였다. Bhonsel 등은<sup>(7)</sup> BBT(Bending Under Tension) 마찰 실험장치를 이용하여 시편의 추출각도와 공구 모서리 반경이 마찰에 미치는 영향을 관찰하였다. 이 연구를 통하여 시편의 추출 각도와 편치 모서리반경이 커질수록 마찰계수도 커진다는 것을 관찰하였다. Lanzon 등은<sup>(8)</sup> 동일한 소재에 대한 평 마찰실험과 드로우비드 마찰실험을 통하여 박판의 표면 도금 상태가 드로우비드 마찰실험결과에는 크게 영향을 미치는 것으로 나타난 반면 평 마찰실험은 상대적으로 적게 영향을 미치는 것으로 관찰하였다. Wang 등은<sup>(9)</sup> 성형의 진행되는 동안의 박판 거동과 박판 및 공구의 경도가 마찰계수에 미치는 영향을 파악하기 위한 실험을 하였다. 실험 결과, 성형이 진행됨에 따라 마찰계수는 점점 감소하는 경향을 보였고 박판과 공구 모두 표면경도가 증가할수록 마찰계수가 감소한다는 것을 관찰하였다. 김영석등이<sup>(10~11)</sup> 다양한 판재표면 처리에 따른 마찰현상을 드로우비드 실험기로 관찰하였고, 서대교등은<sup>(12)</sup> 금형의 온도와 금형의 표면처리 상태에 따른 판재의 마찰특성을 연구하였다. 또한 금형도형이 박판과 금형면 사이에 존재하는 마찰에 어떤 영향을 끼치는지를 김인수등과<sup>(13)</sup> 한수식 이<sup>(14)</sup> 연구하였다.

본 연구에서는 윤활유 점도, 박판의 표면조도와 경도, 편치 속도, 그리고 금형 모서리 반경이 박판 성형 중 소재와 공구사이에서 발생하는 마찰에 미치는 영향을 실험으로 평가하고, 이 마찰 인자들을 변수로 하는 마찰계수의 수학적 모델을 제안하였다. 또한 전조 및 윤활 상태에서 도금 강판의 2 차원 스트레칭 성형에 대해 유한요소 해석하여 얻은 편치력을 실험치와 비교함으로써 개발한 모델의 타당성을 검증하였다.

## 2. 실험

박판성형 중 박판재 특성과 성형변수가 마찰에

미치는 영향을 평가하기 위하여 먼저 박판시편들의 표면조도와 경도의 측정실험을 수행한 다음, 마찰 측정실험을 수행하였다.

시편들의 표면 조도치를 측정하기 위하여 탁상용 조도 측정 장비인 Taylor Hobson 사의 Talysurf series II를 사용하였고, 시편들의 표면경도를 측정하기 위하여 Vickers 경도 측정기를 사용하였다. Table 1 은 표면조도 측정실험과 표면경도 측정실험에서 구한 시편들의 표면 조도 평균치와 최대치 그리고 표면 경도치를 보여 주고 있다.

마찰실험을 위하여 마찰실험 장치를 설계 및 제작하고,<sup>(15)</sup> Table 1에서 보여 주는 8 종류의 도금/무도금 박판, 11 종류의 드로우잉용 윤활유, 7 종류의 인출속도, 그리고 7 종류의 서로 다른 곡률을 갖는 롤러에 대하여 가능한 모든 조합경우로 마찰계수 측정실험을 실시하였다. (Table 2 참조)

실험을 위한 시편은 폭 20mm에 길이 600mm의 크기로 전단하고, 전단에 의하여 발생한 시편

**Table 1 Surface roughness and hardness of friction test specimens**

Specimens	roughness(μm)		hardness
	average	maximum	
SPCC	0.3780	3.3679	94.9
AL5052	0.1250	3.2154	115.5
AL1050	0.1312	2.5196	85.5
GADQ	0.7480	9.8518	103.1
GACQ	0.5030	8.3631	118.7
ALCQ	1.1850	10.9489	
Zn-Ni	1.3150	12.0154	130.0
Zn-Fe	1.4120	9.8513	

**Table 2 Friction test conditions**

Roller radius(mm)	3, 5, 10, 15, 20, 25, 30
Pulling speed (mm/min)	100, 200, 300, 400, 500, 600, 700
Pulling time(sec)	10
Flat die material	SKD11
Holding force(N)	600

가장자리의 버는 완전히 제거되었다. 또한 모든 시편은 양면이 동일한 도금 조건을 갖고 있으며 저독성 솔벤트로 완전히 세척된 후 사용되었다.

마찰계수는 동마찰 구간인, 출발점에서 20mm~

30mm 지점에서부터 측정하였고, 식(1)로 마찰계수  $\mu$ 를 구하였다.

$$\mu = \frac{I}{\beta} \ln \frac{P_1 - (P_b + P_e)}{P_2} \quad (1)$$

여기서  $\beta$ 는 롤러와 박판의 마찰각,  $P_1$ 은 전방 인장력,  $P_2$ 는 후방인장력,  $P_b$ 는 굽힘력,  $P_e$ 는 베어링 때문에 발생하는 오차하중을 각각 나타낸다

### 3 마찰실험 결과 및 고찰

다양한 실험조건에서 수행한 마찰실험으로부터 얻은 성형공정 변수 혹은 재료특성과 마찰과의 관계를 요약하면 다음과 같다.

#### 3.1 윤활유 점도와 마찰계수와의 관계

Fig.1은 윤활유 점도 변화에 따른 마찰계수의 변화를 나타낸 한 예이다. 전체적으로 윤활유의 점도가 증가할수록 마찰계수가 감소하는 경향을 보였다. 이런 현상은 저점도유가 고점도유보다 쉽게 유체 윤활 상태가 파괴되어 마찰계수가 높게 나오고, 고점도유가 저점도유에 비해 오랜 동안 마찰표면에 머물면서 윤활 작용을 하기 때문에 마찰계수가 낮게 나오는 것으로 설명된다.

윤활유 점도  $v$  와 마찰계수  $\mu$  와의 관계는 식(2)와 같은 형태로 표현될 수 있다.

$$\mu = \frac{a_0}{a_1 + v^{a_2}} \quad (2)$$

여기서  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ 는 실험치들을 최소자승법으로 보간하여 구해질 수 있는 상수들이다.

#### 3.2 박판 표면조도와 마찰계수와의 관계

박판 표면조도와 마찰계수와의 상관관계는 Fig. 2와 같이 전반적으로 U자 형상을 갖는다.

표면조도가 지나치게 낮아질 경우 윤활효율을 보관할 수 있는 오일포켓의 체적이 줄어들어 윤활효과가 떨어지는 반면 표면조도가 지나치게 높아지면 보다 많은 소성변형으로 인해 마찰저항이 증가하게 되며 동일한 양의 윤활유 도포시 쉽게 유체 윤활 상태가 파괴되기 때문이다.

소재의 평균 표면조도  $\lambda$  와 마찰계수  $\mu$  와의 상관관계는 식(3)과 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$\mu = b_0(\lambda + b_1) + b_2 \quad (3)$$

여기서  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ 는 실험치들로부터 구해지는 상수들이다

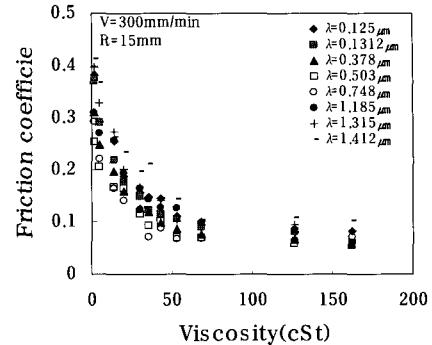


Fig. 1 Friction coefficients associated with lubricant viscosity in various sheet roughness

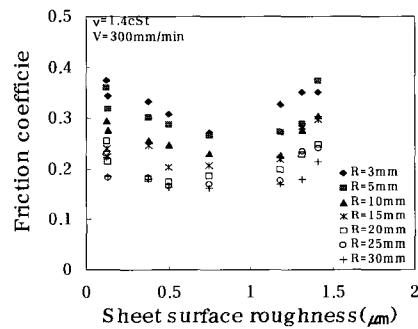


Fig. 2 Friction coefficients associated with sheet surface roughness in various punch corner radii

#### 3.3 금형 모서리반경과 마찰계수와의 관계

금형 모서리반경  $R$  과 마찰계수  $\mu$  와의 상관관계는 Fig. 3와 같이 서로 반비례함을 알 수 있다. 즉,

$$\mu = c_0 R + c_1 \quad (4)$$

이다. 식(4)에서  $c_0$  와  $c_1$ 은 실험치로 결정되는 상수들이다

#### 3.4 편치 속도와 마찰계수와의 관계

편치속도가 빠르면 빠를수록 박판의 성형속도가 빨라진다. 그러므로 박판의 인출속도는 편치속도와 비례적인 관계가 있다. 본 연구에서는 박판의 인출속도를 편치속도로 동일하게 취급하였다.

실험에 의하면 Fig. 4 처럼 편치속도가 증가하면 마찰계수가 감소하는 반비례적인 관계가 있다. 식

(5)는 편치 속도  $V$  와 마찰계수  $\mu$  와의 관계를 나타낸다.

$$\mu = d_0 V + d_1 \quad (5)$$

여기서  $d_0$  와  $d_1$  은 실험치로부터 결정되는 상수들이다.

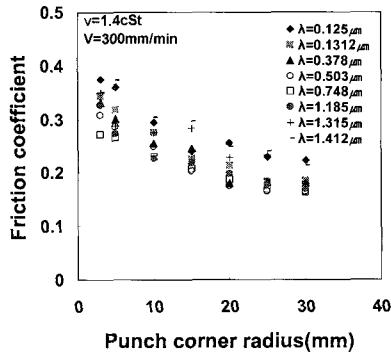


Fig. 3 Friction coefficients associated with punch corner radii in various sheet surface roughness

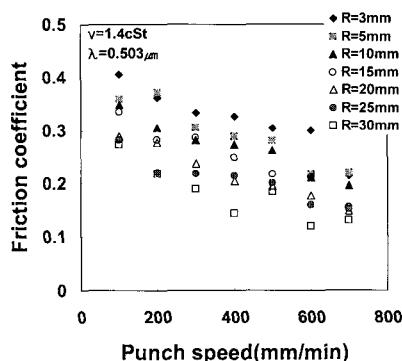


Fig. 4 Friction coefficients associated with punch speeds in various punch corner radii

### 3.5 박판 표면경도와 마찰계수와의 관계

Fig. 6은 표면 경도와 마찰 계수와의 관계를 보여 주고 있다. 표면 경도가 증가함에 따라 마찰계수가 미소하게 감소하는 경향을 알 수 있다. 경도가 낮은 경우, 마찰계수가 크게 나타나는 것은 마찰이 발생할 때 표면 탈락이나 긁힘 등의 현상에 의해 저항력이 증가하기 때문이다. 반면에, 경도가 커질수록 긁힘 등에 의한 표면 저항의 영향이 감소하므로 마찰계수는 감소한다. 그러나 표면경도가 커짐에 따라 마찰계수의 변화는 미소하게 감소하므로 표면 경도는 마찰계수에 적은 영향을

미치는 것으로 추정된다.

표면 경도  $H$ 와 마찰계수  $\mu$  와의 관계는 식(6)과 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$\mu = e_0 H + e_1 \quad (6)$$

여기서  $e_0$ 와  $e_1$ 은 실험치로 결정되는 상수들이다.

## 4. 마찰 모델

마찰실험을 통해 구축된 실험 데이터베이스를 바탕으로 윤활유 점도, 박판 표면의 조도 및 경도, 금형 모서리 반경, 그리고 편치속도를 변수로 하는 마찰계수의 수학적 모델을 제시하고 이 마찰모델의 타당성을 검증한다.

### 4.1 수학적 모델

마찰실험으로부터 구한 마찰계수  $\mu$  를 최적으로 근사시키는 적합곡선을 3절에서 언급한 성형

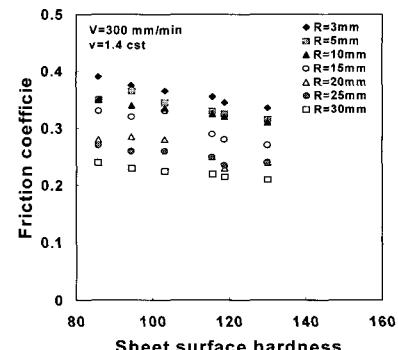


Fig. 6 Friction coefficients associated with sheet surface hardness in various punch corner radii

변수와 박판재 물성을 변수로 구하면 하면 식(7)과 같다.

$$\mu = \frac{0.2915}{V^{0.3347}} + 0.1968(\lambda - 0.738)^2 - 0.0037R - 0.00015V - 0.00032H + 0.143 \quad (7)$$

여기서  $v$ ,  $\lambda$ ,  $R$ ,  $V$ ,  $H$  는 각각 윤활유 점도, 박판 표면 조도, 금형 모서리 반경, 편치 속도, 박판 표면 경도이다.

이들 5 마찰 변수들 중 윤활유 점도, 박판 표면 조도, 그리고 금형 모서리 반경이 마찰계수에 주로 영향을 끼치는 주요 변수들이다. 이 3 주요 마찰 변수를 도입하여 마찰계수를 수학적으로 표현하면 식(8)과 같다.

$$\mu = \frac{0.3011}{v^{0.3347}} + 0.199(\lambda - 0.742)^2 - 0.0043R + 0.051 \quad (8)$$

Table 3 은 생산현장에서 흔히 있는 4 경우에 대하여 식(7)과 식(8)로 마찰계수를 계산하고 실험치와 비교한 것이다. 식(7)로 계산한 마찰계수 값과 식(8)로 계산한 마찰계수 값이 비슷하며 이들은 실험치와 매우 유사하나 식(7)로 계산한 마찰계수 값이 더 유사하다.

#### 4.2 모델 검증

개발된 마찰 모델의 타당성과 정확성을 입증하기 위해서 2 차원 스트레칭 성형에 대하여 개발된 마찰모델을 사용한 FEM 해석 결과를 실험 측정치와 비교하였다. FEM 해석에서는 본 연구에서 개발한 마찰모델과 드로우비드 마찰 시험기에서<sup>(11)</sup> 구한 마찰계수가 사용되었다. 드로우비드 마찰모델은 드로우비드 마찰실험장치를 이용하여 구한 마찰모델로 식(9)로 마찰계수가 계산된다.

**Table 3 Comparison of friction coefficient among friction test, 5 variable description, and 3 variable description**

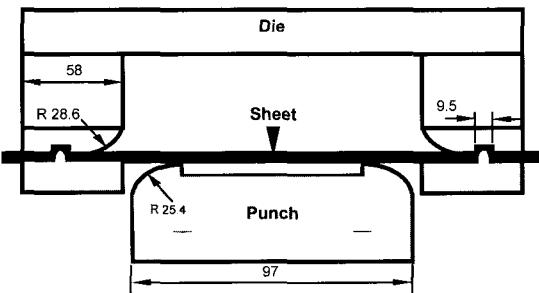
Cases	Friction Coefficient ( $\mu$ )		
	Test	5 variables	3 variables
GADQ, Drawing oil 7	0.0637	0.0598	0.0532
SPCC, Drawing oil 2	0.1487	0.1445	0.1233
AL5052, Rust preventive oil	0.2530	0.2376	0.2079
Zn-Ni, Dry	0.3370	0.3268	0.3207

$$\mu = \frac{D_{f+d} - D_d}{\pi C_{f+d}} \quad (9)$$

여기서  $D_{f+d}$ ,  $D_d$ , 그리고  $C_{f+d}$ 는 각각 고정비드의 인출력, 률러비드의 인출력, 그리고 고정비드의 가압력을 의미한다.

해석에서 사용된 2-D 스트레칭 성형의 공정도는 Fig. 7과 같고, 편치를 위로 진행시켜 길이 300mm, 폭 20mm, 두께 0.8mm의 시편이 10mm/m in의 속도로 파단될 때까지 스트레칭되게 한다. 해석에 앞서 실시한 마찰실험결과(Table 4 참조), 전체적으로 변형이 많은 드로우비드 마찰모델의 마찰계수가 본연구의 마찰모델에 비하여 비교적 높게 나오는 것을 알 수 있었다.

평면변형률 상태의 성형공정을 해석하기 위해 개발된 단면 성형해석 FEM 프로그램을 사용하여 FEM 해석이 수행되었으며<sup>(16)</sup> 마찰모델에 따른 편치력을 실험 측정치와 비교하였다. Fig. 8 과 Fig. 9 는 ALDQ 강판에 대하여 윤활 및 무윤활 상태에서 각각 FEM 해석으로 얻은 편치력을 실험치와 비교한 것이다. 건조상태에서 드로우비드 마찰 모델을 적용한 경우는 수렴에 문제가 있어 비교에 어려움이 있었지만, 본 연구에서 개발된 모델을 적용한 해석결과가 실험 측정치에 보다 근접함을 알 수 있었다. 윤활상태에서도 본 연구에서 개발된 모델을 적용한 해석결과가 드로우비드 마찰모델을 적용한 해석결과보다 3%가량 오차가 작았다. Fig. 10 과 Fig. 11 은 GICQ 강판에 대하여 역시 무윤활 및 윤활 상태에서 각각 유한요소해석으로 얻은 편치력을 실험치와 비교한 것이다. 건조상태에서는 개발된 마찰모델을 적용한 해석결과가 드로우비드 마찰모델을 적용한 해석결과보다 평균 4%가량 오차가 크게 나타났다. 윤활상태에서는 개발된 마찰모델을 적용한 해석결과가 드로우비드 마찰모델을 적용한 해석결과보다 약 3%가량 오차가 작았다.



**Fig. 7 Tooling geometry of 2-D stretch forming**

**Table 4 Friction coefficient associated with both friction models and drawbead friction test**

Model type Specimen / Lubrication condition	Current Friction Model	Drawbead Friction Test
ALDQ / dry	0.2608	0.3294
ALDQ / lubricated	0.0860	0.1162
GICQ / dry	0.2216	0.2810
GICQ / lubricated	0.0730	0.0840

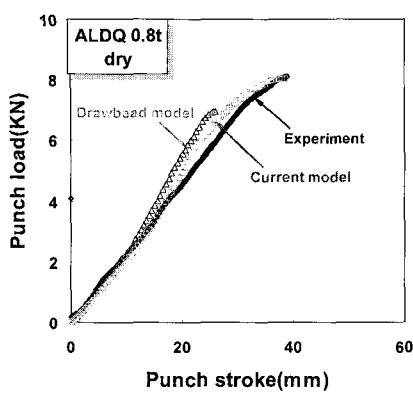


Fig. 8 Comparison of punch forming loads of ALDQ sheet in dry condition found by FEM using current friction model and drawbead friction model with that of the experiment

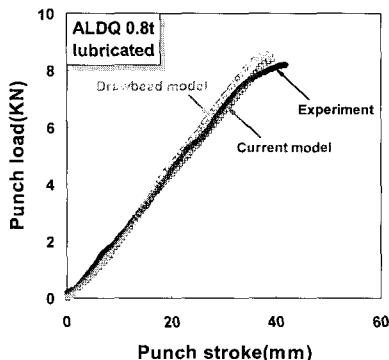


Fig. 9 Comparison of punch loads of ALDQ sheet in lubrication condition found by FEM using current friction model and drawbead friction model with that of the experiment

이상의 검증 결과를 통하여 개발된 마찰모델이 냉연강판보다 상대적으로 까다로운 성형조건을 갖는 도금 강판에 대해서 효율적으로 그리고 정확히 마찰특성을 묘사하고 있음을 알 수 있으며, 특히 전조상태보다는 윤활상태에서 보다 효과적임을 알 수 있었다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 윤활유 점도, 소재의 표면 조도, 공구 모서리 반경, 편치 속도, 그리고 소재의 표면 경도가 마찰계수에 미치는 영향을 평가하기 위한 마찰실험을 수행하고 이를 마찰변수별로 데이터 베이스를 구축하여 마찰모델을 제안하였다. 이러한

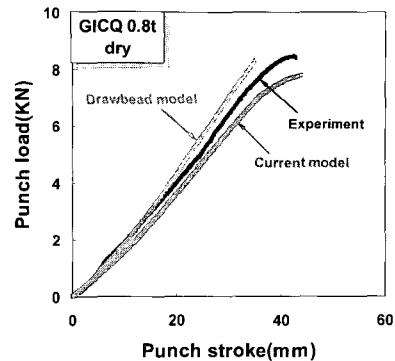


Fig. 10 Comparison of punch loads of GICQ sheet in dry condition found by FEM using current friction model and drawbead friction model with that of the experiment

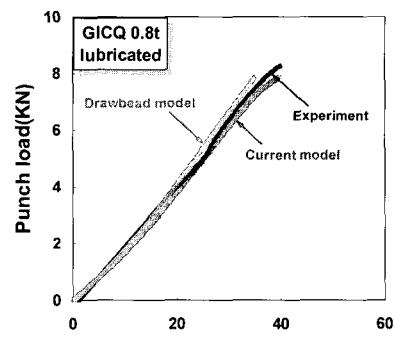


Fig. 11 Comparison of punch loads of GICQ sheet in lubrication condition found by FEM using current friction model and drawbead friction model with that of the experiment

일련의 연구로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) 윤활유 점도, 박판표면 조도, 그리고 편치 모서리 반경이 성형 중 마찰에 영향을 크게 미친다.
- (2) 공구 모서리 반경이 증가하고 편치 속도가 증가할수록 마찰계수는 감소한다.
- (3) 동일한 실험 조건에서 드로우비드 마찰 시험기, 개발된 마찰 시험기, 평 마찰 시험기의 순서대로 마찰계수 값이 크다.
- (4) 윤활유 점도, 박판 표면조도, 박판 표면 경도, 금형 반경, 그리고 편치 속도에 따른 마찰특성을 모델링하고 이 마찰 모델을 FEM 성형해석에 적용하여 얻은 편치력은 실험 결과와 잘 일치하는 것을 알 수 있다.
- (5) 윤활유 점도, 소재 표면조도, 표면 경도, 공

구 모서리 반경 그리고 편치 속도를 알면 박판성형 중에 마찰계수 값을 알 수 있고 이 값을 유한요소해석에 적용함으로써 보다 현실적인 성형해석이 가능하다.

## 후 기

본 연구를 위해 데이터를 제공한 오하이오 주립대학의 Richard Boge 씨와 한양대 일반 대학원 송민재씨에게 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

- (1) Terumasa Hisakado, Kentarou Miyazaki, Akiyoshi Kameta and Satoru Negishi, 2000, "Effects of surface roughness of roll metal pins on their friction and wear characteristics", Wear239, pp. 69~76.
- (2) Alfred Zmitrowicz, 1995, "Constitutive models for anisotropic frictional heat", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.38, pp. 563~574.
- (3) R.C. Parker and P.R. Marshall, 1948, "The measurement of the temperature of sliding surfaces, with particular reference to railway brake blocks", Proc. Inst. Mech. Engrs 158, pp. 209~229.
- (4) M. Teodorrescu, G. Frumusanu, and L. Teodorescu, 1996, "Study about the nature of the friction-lubrication process during the deep drawing of thin sheets", 19th IDDRG Biennial Congress, pp.541~546.
- (5) R.J.J.M. Sniekers and H.A.A. Smits, 1997, "Experimental set-up and data processing of the radial strip-drawing friction test", Journal of Materials Processing Technology 66, pp. 216~223.
- (6) M. Jonasson, A. Whilborg and L. Gunnarsson, 1998, "Analysis of surface topography changes in steel sheet strips during bending under tension frictiontest", Int.J.Mach. Tools Manufact., Vol.38, NO.5~6, pp.459~467.
- (7) S.R. Bhonsel and K.J. Weinmann, 1990, "The Significance of the workpiece sample in the strip-tension friction test", Transactions of NAMRI/SME, pp. 46~51.
- (8) J.M. Lanzon, M.J. Cardew-Hall and P.D. Hodgson, 1998, "Characterising frictional behaviour in sheet metal forming", Journal of Materials Processing Technology 80~81, pp. 251~256.
- (9) X.J. Wang, J.L. Duncan and M.L. Devenpeck, 1983, "Punch friction tests for sheet metal forming", American Society for Metals, Vol.3, NO.1, pp.3~11.
- (10) 김영석, 박기철, 1991, "Zn-Ni 계 합금도금강판의 마찰특성에 관한 연구", 대한기계학회 논문집, 15 권 6 호, pp. 1807~1818.
- (11) 김영석, 남재복, 최원집, 1990, "자동차용 표면처리 강판의 마찰특성에 관한 연구", 대한기계학회 논문집, 14 권 6 호, pp. 1474~1486.
- (12) 서대교, 이재동, 송광현, 최이천, 1999, "금형의 온도와 처리상태에 따른 판재의 마찰 특성", 한국소성가공학회지, 8 권 3 호, pp. 245~251.
- (13) 권재욱, 김인수, 1992, "각종 도금강판의 신장성형시 마찰계수 측정", 한국소성가공학회지, 1 권 1 호, pp. 75~86.
- (14) S.S. Han, 1997, "Influence of tool geometry of friction behavior in sheet metal forming", Journal of Material Processing Technology, Vol.63, pp. 129~133.
- (15) 이봉현, 금영탁, 2002, "박판성형 해석용 마찰모델 (1 부: 실험)", 한국소성가공학회지 제 11 권 제 4 호, pp. 349~354.
- (16) 김준보, 금영탁, 1996, "굽힘효과를 고려한 자동차 판넬 성형 공정의 2 차원 유한 요소 해석", 한국자동차공학회논문집 제 4 권 제 6 호, pp. 27~38.