

강인제어기 알고리즘을 이용한 제어기 설계 Design of a Controller using Algorithm in the Robust Controller

황 유 섭*
Yu-Sub Hwang

<Abstract>

In this paper, some algorithms for robust stabilization of linear time - invariant single - input - multi output(SIMO) systems subject to parameter perturbations are presented.

At first, the determination algorithm of the largest stable hypersphere in the parameter space of a given characteristic polynomial with its coefficient perturbations near some stable nominal values is presented. These algorithms iteratively enlarge the stability hypersphere in plant parameter space and can be used to design a controller to stabilize a plant subject to given range of parameter excursions.

Key Words : *robust stabilization, perturbations, largest stable hypersphere*

1. 서 론

제어시스템 설계에 있어서 본 논문은 플랜트 매개변수의 섭동, 식별오차 등의 불확실성을 해결하기 위해 강인제어기 Flow-Chart를 이용하여 제어기의 안정영역하에서 tolerance를 최대화할 제어기를 설계하는 이론을 제공하였으며 이를 뒷받침하는 강인제어이론은 특성다항식의 계수들의 Hurwitz 안정조건을 이용하여 1984년 Barmish⁴⁾가 제공했으며 1985년 S. Bialas와 J. Garloff⁵⁾가 강인제어의 최대구간 영역확대이론가능성을 보여주는 이론을 응용하였다.

또한 본 논문의 알고리즘 개발에는 1978년 Kharitonov가 발표한 Kharitonov¹⁾정리를 이용하여 특성다항식계수들의 Hurwitz 안정조건을 만족하는 계수섭동의 최대구간을 구하는 방법²⁻³⁾을 비례섭동영역에만 적용하여 실매개 변수

공간에서의 안정영역을 제시하였으며⁶⁻⁸⁾, 비례섭동영역의 불안정한 시스템으로 한정하고 이것을 궤환회로로서 안정화시킬 수 있는 강인제어기를 설계하여 이때의 최대안정 Hypersphere반경을 gradient방법으로 구하는 알고리즘을 제시하였다¹⁰⁻¹²⁾.

제어기의 강인성을 얻기 위해서는 페루우프시스템의 안정성⁹⁾을 유지할수 있는 플랜트매개변수의 섭동범위를 계산하는 것이 중요한 문제이다. 또한 어느정도의 불확실성이 성능면에서 허용되는가는 이론적으로 밝혀져 그 적용응용범위를 확대할 수 있을 것으로 기대된다. 또한 본 논문에서는 섭동 하는 매개변수를 제한하지 않는 일반적인 경우를 제어대상으로 불안정한 4차플랜트를 잡고 섭동하는 매개변수에 강인제어기 알고리즘 Flow-Chart를 적용한 결과 매개변수를 제한했을 경우와 같은 안정영역을 얻음으로써 강인제어기 설계응용

* 정회원, 忠州大學校 情報制御工學科. 工博
亞洲大學校 大學院 卒業,
yusub@chungju.ac.kr

Dept. of Information & control Eng,
Chungju National University. Dr. Eng.
graduate from Ajou University.

다음 형태의 식을 얻는다.

$$X a = b$$

단,

$$X = \begin{pmatrix} & & & & n_{cp} & d_{cp} \\ & & & & n_{cp} & d_{cp} & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & n_{cp} & d_{cp} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & n_{cd} & d_{cd} \\ n_{cp} & d_{cp} & \cdot & \cdot & & & & & n_{cd} & d_{cd} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\ \cdot & \cdot & n_{cd} & d_{cd} & & & & & & \\ n_{cd} & d_{cd} & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

$$a^T = (n_o, d_o, \dots, n_q, d_q) \quad (2.8)$$

여기서 $X \in R^{(q+p+1) \times (2p+2)}$, $a \in R^{(2p+2) \times 1}$ 이다.

이제, 플랜트 매개변수의 섭동을 고려하면, 플랜트 매개변수 섭동하에서의 식(2.7)과 식(2.8)는 각각 다음 식들과 같이 된다.

$$(A + \Delta A)x = b + \Delta b \quad (2.9)$$

$$X(a + \Delta a) = b + \Delta b \quad (2.10)$$

A와 a는 각각 제어 하고자하는 플랜트 매개변수들로 구성된 행렬과 벡터이다. 또한 X와 x는 제어기 전달함수의 계수들로 구성된 행렬과 벡터이다. 또 ΔA 는 플랜트 매개변수 행렬의 섭동량이고, Δa 와 Δb 는 각각 플랜트 매개변수 벡터 및 특성 다항식 계수 벡터들의 섭동량이다.

2.2 문제의 정식화

일반적인 제어기 설계에 있어서는 제어할 플랜트에 관한 특성을 정확히 알고 있다는 가장 하에서 제어방식이나 제어기 구조를 적절하게 설계할 수 있다. 그러나 제어 시스템을 구성

하는데 있어서 모델에 근거를 두고 잘 설계된 제어기가 실제를 플랜트에 사용되었을 때 플랜트를 모델화 하는 과정에서 발생하는 여러 가지 오차 즉 플랜트의 비선형성, 선형성, 모델차수의 제한, 플랜트 매개변수의 불확실성들 때문에 제어 시스템의 안정성을 유지할 수 있다는 보장이 없다. 따라서 모델에 어느 정도의 오차가 포함되어 있어도 시스템의 안정성을 유지할 수 있도록 제어기를 설계하여야 하는데 이때 설계된 강인제어기(robust controller)의 강인성(robustness) 즉, 제어대상의 안정 hypersphere 반경을 구하기 위하여 다음 각 경우를 고려하고자 한다.

단일입력 - 다출력(SIMO)의 경우에 대해서 매개변수 섭동 hypersphere 및 강인 제어기를 구하기 위하여 문제 1, 2를 제시한다.

문제1

1) $b \in R_t$ 인 관계를 갖는 식(2.5)의 실다항식을 고려하자. 여기서 R_t 는 다음식과 같이 정의되는 tolerance영역이며

$$R_t := \{ b \in R^{n+1} \mid \underline{b}_i \leq b_i \leq \bar{b}_i, i = 0, 1, \dots, n \} \quad (2.11)$$

$$\underline{b}_i = b_i^0 - q_i, \quad \bar{b}_i = b_i^0 + q_i$$

여기서, b_i^0 는 설계치이고, p_i 와 q_i 는 각각 b_i 의 lower tolerance 와 upper tolerance이다. 설계치 b_i 가 주어지면 $R_t \subset S_b$ 인 조건하에서 최대의 tolerance p_i 와 q_i 를 구한다.

여기서, S_b 는 식(2.5)의 다항식 계수공간에서의 안정도 영역이다.

2) R_i 가 다음 식과 같이 정의된 tolerance영역 일때 $a \in R_t$ 인 시스템 매개변수를 갖는 식(2.1)의 시스템을 생각하자.

$$a^T := [n_0^T d_0 \dots, n_q^T, d_q] \cdot \dots \quad (2.12)$$

$$R_t := \{ a \in R^{(1+m)(q+1) \times 1} \mid \underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i, i = 0, 1, \dots, (1+m)(q+1)-1 \} \quad (2.13)$$

$$\underline{a}_i = \underline{a}_i^0 - v_i, \quad \bar{a}_i = \underline{a}_i^0 + w_i$$

, $\underline{a}_i^0 = \text{nominal value}$

여기서 \underline{a}_i 는 설계치이고 v_i 와 w_i 는 \underline{a}_i 의 tolerance와 upper tolerance이다.

$R_t \subset S_a$ 인 조건하에서 tolerance v_i 와 w_i 의 최대안정영역을 찾는다. 여기서 S_a 는 특성다항식(2.5)의 시스템 매개변수 공간에서의 안정영역이다.

문제 2

- 1) $R_t \subset S_a$ 인 조건하에서 tolerance v_i 와 w_i 를 최대로 증가시킬 수 있는 강인제어기 X^* (fixed order에 대해)를 구한다.
- 2) 식(2.6)와 식(2.9)의 안정도 즉 본 페루우프 시스템과 변화된 페루우프 시스템의 안정도를 동시에 유지하면서 $\| \Delta a \|_2$ 를 최대로 증가시키는 강인제어기 X^* (fixed order에 대해)를 구한다.

여기서, $\Delta a \in R^{(1+m)(q+1) \times 1}$ 은 동일한 upper tolerance와 lower tolerance를 갖는 시스템 매개변수의 섭동공간이다.

- 3) 안정성을 해치지 않는 범위내의 영역 변화특성을 기술하기 위해 사용된 안정도 판별식 (2.5)의 실다항식을 가지고 다음과 같은 $(2 \times N)$ 행렬 B_N 을 정의한다.

여기서 N 은 $(n+2)/2$ 와 같던가 그보다 작은 최대정수이다.

이때 n 가 짝수 혹은 홀수 일 때 각각 다음과 같이 정의한다.

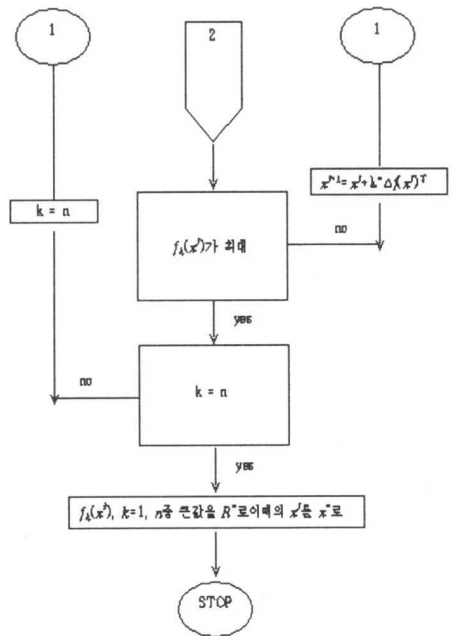
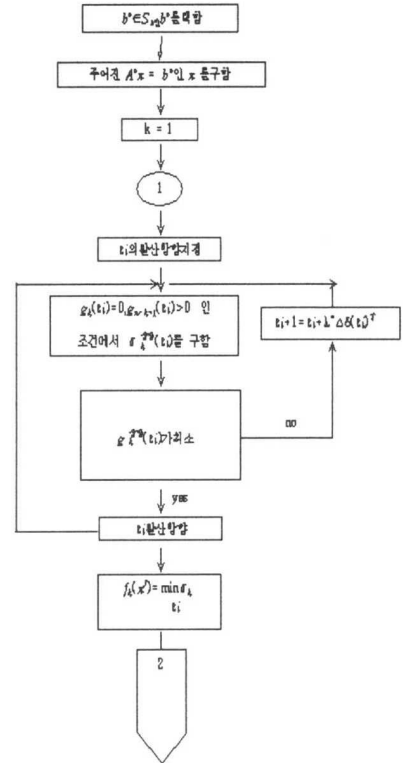
$$B_N := \begin{bmatrix} b_1 & b_3 & \dots & b_{n-1} & 0 \\ b_1 & b_2 & \dots & \cdot & b_n \end{bmatrix}$$

또는 $\begin{bmatrix} b_1 & b_3 & \dots & b_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix} \dots \dots (2.14)$

B_N 에서 출발하여 $(2 \times k)$ 행렬 B_k 는 $k = N-1, N-2, \dots, 1$ 에 대해 다음과 같이 구성한다.

$$B_N := \begin{bmatrix} v^{(k)}_1 & v^{(k)}_2 & \dots & v^{(k)}_k \\ w^{(k)}_1 & w^{(k)}_2 & \dots & w^{(k)}_k \end{bmatrix}$$

$$k = N, N-1, \dots, 1 \dots \dots \dots (2.15)$$



강인제어기 알고리즘 흐름도
Flow-Chart of Robust Contoller Algorithm

상기 순서도에서 b(s)가 Hurwitz인 b°를 택한다.
문제의 정식화의 문제2.2를 적용하여 최대공간영역을 gradient법으로 구하였다.

3. 컴퓨터 시뮬레이션에 의한 결과고찰

앞장의 알고리즘을 적용하여 그 타당성을 입증해 보이기 위하여 제어대상으로 불안정한 4차플랜트를 잡고 섭동하는 매개변수가 일반적인 경우에 대하여 0차 제어기를 다루었다.

3.1 섭동하는 매개변수가 일반적인 경우

4차 1입력 2출력 불안정한 플랜트 전달함수를 다음 식과 같이 주어졌다고 하자.

$$G(s) = \frac{1}{d_n(s)} \begin{bmatrix} n_1(s) \\ n_1(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{d_4 S^4 + \dots + d_0}$$

$$\begin{bmatrix} n_{41} S^4 + \dots + n_{01} \\ n_{42} S^4 + \dots + n_{02} \end{bmatrix}$$

단,

$$\begin{aligned} n_{41} &= 1, & n_{31} &= -5, & n_{21} &= 8, \\ n_{11} &= 6, & n_{01} &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_{42} &= 1, & n_{32} &= 3, & n_{22} &= 1, \\ n_{12} &= 4, & n_{02} &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_4 &= 1, & d_3 &= 2, & d_2 &= 3, \\ d_1 &= 2, & d_0 &= 1 \end{aligned}$$

강인제어기 설계 알고리즘에서 최대매개변수 hypersphere 알고리즘과 강인제어기 설계 알고리즘을 적용하여 구하면,

0차 안정화 제어기는 $C(S) = \frac{\begin{bmatrix} n_{c10} \\ n_{c20} \end{bmatrix}}{d_0}$ 는

$$X = \begin{bmatrix} n_{c10} \\ n_{c20} \\ d_{c0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7375 \\ 0.2034 \\ 1.5160 \end{bmatrix}$$

이 되며 이때 페루프 다항식에 대응하는 근

$$S_1, S_2, S_3, S_4 \text{은}$$

$$S_1, S_2 = -0.3513 \pm j0.4935$$

$$S_3, S_4 = -0.6956 \pm j1.9042 \text{ 이다.}$$

또 얻어진 안정 hypersphere 반경은 $R = 0.57823$ 이다. 더 나아가서 0차 강인제어기는

$$X^* = \begin{bmatrix} M_{c10} \\ M_{c20} \\ M_{c0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.59615 \\ 0.19599 \\ 1.53879 \end{bmatrix}$$

이 되며 이때 페루우프 다항식에 대응하는 근

$$S_1, S_2, S_3, S_4 \text{은}$$

$$S_1, S_2 = -0.4141 \pm j0.5234$$

$$S_3, S_4 = -0.6662 \pm j1.7347 \text{ 이다.}$$

또 얻어진 최대 안정 hypersphere 반경은 $R^* = 0.61038$ 이다.

4. 결과 및 검토

2.2 문제정식화 문제 2의 강인제어기 알고리즘을 적용해 본 결과 특성다항식 알고리즘을 이용할 때와 같은 방법으로 최대 hypersphere를 구한 결과 최대 안정 hypersphere반경의 중심이 최대 반경인지 확인할 수 있고, 안정 hypersphere 반경은 최대안정 hypersphere반경이 확대되었음을 확인할 수 있고, 본 논문에서 제시한 강인제어기 알고리즘을 이용하면 제어기의 설계영역을 응용 확대할 수 있으며 특히 이번에 매개변수를 제한하는 경우가 아닌 매개변수를 제한하지 않은 일반적인 경우의 4차 1입력 2출력 제어기에 적용한 결과도 같은 안전영역을 얻음으로써 일반적으로 안정 제어기의 hypersphere반경보다 제어기에서의 hypersphere반경이 더 확장되었음을 확인할 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 제어기의 설계 시 매개변수의 제한을 둘 경우와 일반적인 경우 중 매개변수

의 일반적인 경우를 응용확대 적용해 보았다. 본 논문에서 제시한 알고리즘을 플랜트매개변수섭동의 안정영역범위를 밝히는 hypersphere 이다.

이를 이용한 제어기 설계를 다루는데 있어서 제어대상으로 불안정한 플랜트를 잡고 섭동하는 매개변수에 있어서 매개변수를 제한하는 경우¹³⁾와 제한하지 않는 일반적인 경우 모두에 주어진 알고리즘이 적용됨을 확인할 수 있어 앞으로 제어기 설계 시 더욱 폭넓게 응용되리라 생각되어진다.

참고문헌

- 1) V.L.Kharitonov : Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations, *Urasen.*, Vol.14, No.11, pp.2086-2088, Nov 1978.
- 2) R.M.Biernacki : Sensitivities of stability constrains and their applications, *IEEE Int. symp. Circuits and systems.* 1986.
- 3) J.P.Guiver and N.K.Bose : Strictly Hurwitz property invariance of quartics under coefficient perturbation, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-28, No. 1. pp.106-107, Jan 1983.
- 4) B.R.Barmish : Invariance of the strict Hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients, *IEEE Trans. Automat. contr.*, Vol. AC-29, No 10, pp.935-936, Oct 1984.
- 5) S. Bialas and J.Garloff : Stability of polynomials under coefficient perturbation, *IEEE Trans Automat. contr.*, Vol. AC-30, No 3, pp.310-312, Mar 1985.
- 6) R.M.Biernacki. "Robust stability with structured Real parameter perturbations", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-32, No 6, pp.495-506, Jun 1987.
- 7) Nobuyama, E., "Robust stabilization of time delay system via reduction to delay-free model matching problems." *Proceedings of the 31st Conference on Decision and, Control Tucson, Arizona, U.S.A.*, pp.357-358, 1992.
- 8) Kemin Zhou with John C. Doyle and Keith Glover, *Robust and optimal control*, Prentice Hall, 1996.
- 9) Kwon, W. H., and Pearson, A. E., "Feedback stabilization of linear systems with delayed control," *IEEE Transaction on Automatic Control*, 25, pp.266-269, 1980.
- 10) 황유섭, 이상혁, "매개변수 섭동구조를 갖는 플랜트의 강인안정화 알고리즘", *대한전기학회 논문지*, 제38권 4호, pp.316-325, 1998년 4월.
- 11) 황유섭 "The Stability Analysis of Robust Stabilization of Plants Subject to Plant Parameter Perurbation" *충주대학교 논문집* 제 34집 2호, pp.179-192, 1999년 2월.
- 12) 황유섭, "플랜트 매개변수 변화구조를 갖는 플랜트의 강인안정화" *충주대학교 논문집* 제 35집 2호, pp.239-255, 2000년 9월.
- 13) 황유섭, "특성다항식 계수섭동 알고리즘을 이용한 강인 제어기설계" *충주대학교 논문집* 제37집, pp.99-112, 2002년 11월.

(2003년 12월16일 접수, 2004년 5월20일 채택)