

한계상태를 고려한 구조물의 최적화에 관한 연구 A Study on Optimization of Structure with Limit State Constraints

김기대*
Kee-Dae Kim*

<Abstract>

This study presents a optimization of structure, in which constraints contain the conditions of stress and serviceability, while the sequential linear programming method(SLP) is used as a rational approach. The optimum design results contained on the limit state constraints are compared with those obtained by the only stress and ministry of construction enacted standard plans. A simple slab bridge is analysed numerically for illustration of the structural optimization. It may be asserted that serviceability constraints is very important to a structure design.

Key words : optimization, limit state constraints, sequential linear programming.

1. 서론

구조물이나 구조요소가 본래의 설계 목적을 달성하기에 부적합 하거나 또는 구조적 기능을 상실하게 될 때를 한계상태라 하고, 이에에는 강도한계상태와 사용성한계상태가 있다. 강도한계상태는 구조물의 일부분 또는 전체의 붕괴와 관련되는 상태로서 주로 재료의 응력에 의해 좌우된다. 그리고 사용성 한계상태는 구조물에 외력이 작용할 때 그 외력의 크기에 따라 구조물의 안전에는 지장이 없으나 과도한 처짐, 균열, 피로 등이 일어나면 사용성이 불량할 뿐만 아니라, 미관을 해치고 구조물 사용자에게 불안감을 주게 되며 또 구조물의 내구성을 저하시키게 된다. 최근 콘크리트나 철근이 고강도화 됨에 따라 부재단면이 작아

지므로, 처짐이나 균열 또는 피로현상이 크게 되어 이에 대한 연구가 필요한 실정이다.

지금까지 구조물의 설계는 응력위주로 단면이 결정되었으나 본 연구에서는 응력뿐만 아니라 사용성도 함께 고려하여 구조물로서는 철근콘크리트 슬래브교에 대한 단면 및 치수의 최적화를 시도한다.

최적화 방법으로는 SLP(Sequential Linear Programming) 기법을 도입하고, 설계 변수로는 단면치수·부재길이·철근 단면적 등을 채택하여 최소 건설경비를 목적함수로 하며, 응력·사용성을 제약조건으로 하는 최적화 알고리즘을 도출 하였다. 적용 알고리즘의 타당성과 신뢰성을 확인하기 위하여 건교부 표준도, 응력제약 조건만 고려한 경우, 사용성 제약조건만을 고려한 경우, 그리고 응력 및 사용

* 정희원, 대구대학교 건설환경공학부 교수, 工博

*prof. Dept. of Construction Environmental Engineering, Daegu University

성 제약조건을 모두 고려한 경우에 대한 결과를 비교 검토하여 사용성 제약조건의 필요성을 입증하였다.

2. 최적설계의 방법

2.1 최적설계의 정식화

구조물의 최적설계는 설계변수의 함수로 표시되는 제약조건을 만족하면서 목적함수를 최소 또는 최대로 하는 설계변수의 조합을 수학적 방법에 의해 구하는 설계방법이다. 목적함수로는 통상 최소비용, 최소중량, 최소오차, 최대단면계수, 최대강성 등이 고려될 수 있으며, 제약 조건으로는 응력, 변위, 단면치수, 처짐 등의 제한치가 고려될 수 있다. 이러한 구조물 최적화를 위한 일반적인 정식화는 다음과 같다.¹⁾

$$\begin{aligned} \text{Minimize } Z &= f(X) & (2.1) \\ \text{subject to } g_i(X) &\leq 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, k \end{aligned}$$

여기서, X 는 설계변수의 vector이고, Z 는 목적함수이며, g_i 는 제약조건이다.

2.2 최적화 기법

수학적 계획법의 기본이 되는 선형 제약조건을 갖는 선형계획문제의 최적화는 Simplex 알고리즘을 이용하여 비교적 쉽게 해를 구할 수 있으며, 비선형 제약조건을 갖는 최적화 문제는 그 해법으로 다양한 기법들이 사용되고 있는데, 그 중 대표적인 방법은 Lagrange Multiplier Method, SUMT(Sequential Unconstrained Minimization Technique), Feasible Direction Method, SLP등이 있다.⁶⁾⁻⁹⁾

이들 중 SLP방법은 연속적인 선형 최적화 기법으로 그 해법이 간단하고, 기존의 Simplex 알고리즘을 이용하여 비선형 문제를 해결할 수 있는 방법이다¹⁾

(1) SLP방법

SLP방법으로 최적해를 구하는 정식화는 먼저 식(2.1)을 X^* 점에 관해 Taylor급수로 전개하여 1차항까지 취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } Z &= f^* + \{\nabla f^*\}^T (X - X^*) & (2.2) \\ \text{subject to } g_i &= g_i^* + \{\nabla g_i^*\}^T (X - X^*) \leq 0 \end{aligned}$$

여기서, 첨자 *는 초기 가정해 또는 전 단계의

해를 뜻하고, ∇ 은 Gradient 벡터이다.

(2) 이동한계

SLP방법을 적용하여 최적해를 얻는 과정에서 설계변수의 Oscillation을 방지하여 최적해에 빨리 수렴시키기 위해 다음의 이동한계(Move Limits)를 제약조건에 포함시킨다.

$$\Delta X^L \leq |X - X^*| \leq \Delta X^U \quad (2.3)$$

여기서, ΔX^L 과 ΔX^U 는 각각 하한과 상한의 설계변수 변동량이다.

3. 구조물의 최적화

3.1 목적함수식

철근콘크리트 구조물을 건설하는 데에는 콘크리트, 철근, 거푸집, 지보공 등의 비용이 포함되는데, 다음과 같이 표시 할 수 있다.

$$Z = C_c V_c + C_s V_s + C_f A_f + C_m \quad (3.1)$$

여기서, Z 는 슬래브교의 총건설비용이고, C_c 는 콘크리트의 단위체적당 경비, C_s 는 철근의 단위체적당 경비, C_f 는 거푸집의 단위면적당 경비, C_m 은 기타 경비이며, V_c 는 콘크리트의 체적, V_s 는 철근의 체적, A_f 는 거푸집의 면적이다.

3.2 제약 조건식

(1) 사용성 제약 조건

1) 균열제약²⁾

$$w = 1.08 R f_s^3 \sqrt{d_c A} \times 10^{-5} < w_a \quad (\text{허용 균열폭 } mm) \quad (3.2)$$

여기서, $R = \frac{k-x}{d-x}$, $x = kd$, d 는 유효높이,

$k = -np + \sqrt{(np)^2 + 2np}$ 또는 R 은 보 1.2, Slab 1.35를 취해도 좋다.

$f_s = \frac{\text{사용하중 } M}{A_s(d-x/3)}$, M 은 휨 모멘트, A_s 는 철근량.

d_c : 인장축 하단에 가장 가까운 철근의 도심으로부터 인장축 하단까지의 거리.

$A = \frac{b(2y)}{\text{철근수}}$, y 는 인장축 하단에서 철

근도심까지 거리.

w_a : 철근0.005C, PS강재0.004C. C : 최외단 인장 주철근의 표면과 인장을 받는 conc. 표면까지의 최단거리 (mm)

2) 처짐제약

① 단순 또는 연속경간을 갖는 부재는 사용활하중과 충격으로 인한 처짐이 도시기역 교량의 경우 경간의 1/1000을 초과해서는 안된다.³⁾

② 깊이가 일정한 부재의 최소두께 (m) slab 교량의 단순경간: $1.2(s+3)/30$, s 는 경간길이 (m)⁴⁾

③ 탄성처짐공식으로 처짐을 구하는 방법. 다음의 유효단면2차 모멘트 I_e 를 사용하여 구해야한다.²⁾

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right] I_{cr} < I_g$$

여기서, $M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t}$, $f_r = 2.0\sqrt{f_{ck}}$,

y_t : 철근을 무시한 총단면의 중심축에서 인장 연단까지의 거리, $y_t = h - x$.

I_g : 철근을 무시한 총단면의 I .

M_a : 처짐이 계산되는 단계에서 부재의 휨모멘트.

I_{cr} : 콘크리트로 환산된 균열 단면의 단면 2차 모멘트 $I_{cr} = \frac{bx^3}{3} + nA_s(d-x)^2$

$$\delta_e < \delta_a \tag{3.3}$$

여기서, δ_e 는 I_e 를 사용하여 구한 처짐

δ_a 는 허용처짐

3) 피로제약

콘크리트 슬래브의 피로검토는 활하중에 의한 모멘트 변화가 큰곳에서 최대모멘트와 최소 모멘트에 의한 응력을 어느 한계 이내에 들도록 검토하며 주로 주철근이 차량진행 방향에 평행한 슬래브에 대해 검토한다. 피로를 고려하지 않아도 되는 철근의 응력 범위는 다음 Table 1과 같다.⁴⁾

$$\Delta f = f_{smax} - f_{smin} = \frac{M_{max}}{A_s Z} - \frac{M_{min}}{A_s Z} < f_{sr} \tag{3.4}$$

Table 1 철근 응력 범위

철근의 종류	철근의 인장 및 압축 응력 범위 f_{sr} (kgf/cm ²)
SD 30	1300
SD 35	1400
SD 40	1500

여기서, $Z = d - \frac{x}{3}$, f_{sr} 은 철근의 인장 및 압축 응력 범위

또한 AASHTO에서는 사용하중하에서 활하중과 충격에 의해 야기되는 직선철근의 최대 인장응력과 최소 인장응력 사이의 범위는 다음식의 값을 초과할 수 없도록 되어 있다.¹¹⁾

$$f_g = 1630 - 0.33f_{smin} > \Delta f \tag{3.5}$$

(2) 휨응력 제약 조건²⁾

$$\phi_f A_s f_y d \left(1 - \frac{0.59 A_s f_y}{f_{ck} b d}\right) \geq \gamma_D M_{Dn} + \gamma_L M_{Ln} \tag{3.6}$$

여기서, ϕ_f 는 휨에 대한 강도감소계수, γ_D 는 고정하중에 대한 하중계수, γ_L 은 활하중에 대한 하중계수, f_y 는 철근의 항복강도, d 는 부재의 유효높이, f_{ck} 는 콘크리트의 설계기준 강도, b 는 부재의 폭, A_s 는 철근의 단면적, M_{Dn} 는 공칭 고정하중으로 인한 휨moment, M_{Ln} 는 공칭 활하중으로 인한 휨moment이다.

(3) 철근비 제약 조건

1) 최대 철근비의 제약

최대 철근비는 다음식과 같다.

$$\rho_{max} = 0.75\rho_b = 0.75\left(0.85\beta_1 \frac{f_{ck}}{f_y} \frac{6000}{6000 + f_y}\right) \tag{3.7}$$

여기서, ρ_b 는 평형 철근비이고, β_1 은 등가 응력 사각형의 높이와 중립축의 비이다.

따라서, 최대 철근비의 제약조건은 다음식과 같이 표현할 수 있다.

$$\rho < \rho_{max} \tag{3.8}$$

여기서, ρ 는 사용 철근비이다.

2) 최소 철근비의 제약

최소 철근비는 다음식과 같다.

$$\rho_{\min} = \frac{0.8\sqrt{f_{ck}}}{f_y} \quad (3.9)$$

또는,

$$\rho_{\min} = \frac{14}{f_y} \quad (3.10)$$

따라서 최소 철근비의 제약조건은 식(3.9)와 식(3.10)중 큰 값을 ρ_{\min} 으로 하며, 다음식과 같이 표현할 수 있다.

$$\rho_{\min} < \rho \quad (3.11)$$

3.3 사용성을 고려한 철근콘크리트 구조물의 최적화 알고리즘

본 연구에서 적용된 한계상태를 고려한 슬래브교의 지간과 단면을 최소 건설경비로 최적화하는 기본 Algorithm은 다음과 같다.⁵⁾

- (1) 구조물 layout, 부재치수 및 단면, 작용 하중 등으로부터 사용하여 설계 단면력을 계산한다.
- (2) 비선형인 목적함수와 제약조건 식(3.1) ~ (3.11)을 식(2.2)에 의해서 선형화 한다.
- (3) 단계(1)에서 구한 설계 단면력을 단계(2)에 대입하여 얻은 선형식과 식(2.3)의 이동한계를 포함하여 선형 programming을 푼다.
- (4) 단계(1)에서 단계(3)을 반복하여 설계변수가 일정간격을 두고 되풀이 되면, 다음 단계로 넘어간다.
- (5) 이동한계를 점차 줄여가면서 단계(1)에서 단계(4)를 되풀이 수행하여 목적함수가 수렴되면 그때의 설계변수 값이 최적해가 된다.

4. 수치계산예 및 고찰

수치계산예로서는 철근콘크리트(RC) 단순 슬래브교를 선정하여 한계상태 제약조건이 고려된 최적인 단면을 결정하기 위하여 Table 2의 설계조건으로 Fig. 1과 같은 설계변수를 최소의 건설경비로 최적화하여 그 계산결과를 분석하였다.

Table 2. 설계조건

구분	규격	적용값	비고
콘크리트	$f_{ck} = 210 \text{ kgf/cm}^2$	11만원/ m^3	
철근	$f_{ck} = 2400 \text{ kgf/cm}^2$	90만원/ton	
거푸집	3회	1만원/ m^3	
활하중	1등교	DB24	
강도감소계수	ϕ	0.85	응력제약에 적용
하중계수	γ_D, γ_L	1.3, 2.15	"

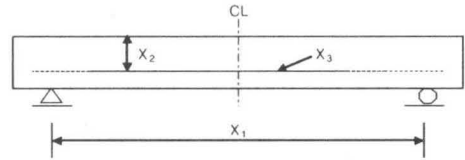


Fig. 1 RC 슬래브교의 설계 변수

4.1 목적함수식의 작성

Table 2의 설계조건 및 Fig. 1의 간단한 RC 슬래브교를 예로 들어 식(3.1)에 의해 목적함수식을 작성하면 아래와 같다.

$$F(X) = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + C_0 \quad (4.1)$$

여기서, $C_i = \Delta F^* = (-\frac{\partial F}{\partial X_i})^*$ 이고, X_i 는 Fig. 4.1의 설계변수이며, C_0 는 상수항이다.

4.2 제약조건식의 작성

균열, 처짐, 피로 등의 사용성 제약조건과 휨응력 제약조건 식(3.2)~식(3.11)을 식(2.2)와 같이 선형화 하면 그 일반식은 아래와 같다.

$$A_{1i}X_1 + A_{2i}X_2 + A_{3i}X_3 \geq b_i \quad (4.2)$$

여기서, A_i 는 각 제약조건을 뜻하고,

$$A_{ij} = \nabla g_i^* = (\frac{\partial g_i}{\partial X_j})^* \text{이며, } b_i \text{는 상수항이다.}$$

4.3 계산 결과

최적해의 결과는 RC 슬래브교의 단위폭당 건설비이며 각 경우에 대해 다음과 같다. 휨응력 및 사용성을 고려한 경우는 Table 3 휨응력만 고려한 경우는 Table 4, 사용성만 고려한 경우는 Table 5, 그리고 건설교통부 표준도

의 값은 Table 6과 같다. 아래 Table에서 건설비는 각 경우에서 공통인 상수에 해당되는 것은 포함되지 않았으며, 경간을 일정하게 8.0m, 10.0m, 12.0m로 한 것과 각 경우별로 구분하여 최소건설경비를 구한 것은 서로를 비교 검토하기 위한 것이다.

Table 3. 휨 응력 및 사용성 제약조건을 고려한 결과

경간 (m)	8.0	10.0	12.0
설계변수			
$X_1(m)$	7.34	9.34	11.34
$X_2(m)$	0.491	0.610	0.734
$X_3(m^2)$	0.00473	0.00588	0.00708
건설비 (만원)	73.02	110.47	156.40

Table 4. 휨 응력 제약만을 고려한 결과

경간 (m)	8.0	10.0	12.0
설계변수			
$X_1(m)$	7.34	9.34	11.34
$X_2(m)$	0.363	0.434	0.500
$X_3(m^2)$	0.00638	0.00808	0.00982
건설비 (만원)	69.45	103.55	143.86

Table 5. 사용성 제약만을 고려한 결과

경간 (m)	8.0	10.0	12.0
설계변수			
$X_1(m)$	7.34	9.34	11.34
$X_2(m)$	0.457	0.566	0.680
$X_3(m^2)$	0.00440	0.00545	0.00655
건설비 (만원)	68.56	103.17	145.68

Table 6. 건교부 표준도의 값

경간 (m)	8.0	10.0	12.0
설계변수			
$X_1(m)$	7.34	9.34	11.34
$X_2(m)$	0.430	0.570	0.670
$X_3(m^2)$	0.00642	0.00794	0.00957
건설비 (만원)	75.54	117.72	164.60

4.4 비교 및 고찰

주어진 설계조건을 중심으로 Fig. 1의 RC 슬래브교에 대한 수치해의 결과를 목적함수에 대해 비교하면 Fig. 2와 같다

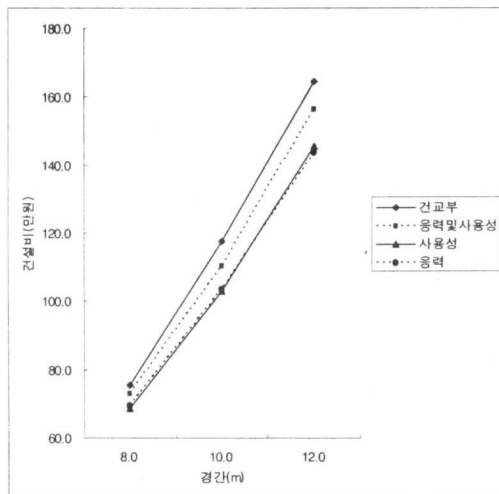


Fig. 2. 목적함수값의 비교

또 휨 응력 및 사용성 제약조건을 모두 고려한 경우를 기준으로 하여 목적함수 값을 비교하면 Table 7과 같다.

Table 7. 휨 응력 및 사용성 제약을 기준으로 한 비교

경간 (m)	8.0	10.0	12.0
각 경우			
휨력 및 사용성	1.0	1.0	1.0
사용성	0.94	0.94	0.93
휨력	0.95	0.94	0.92
건교부	1.03	1.07	1.05

(1) Fig. 2의 결과로 볼때 최적화되지 않은 건설부 표준도의 값은 다소 큰 것으로 판단되며, 과거 휨 응력 제약조건만 고려한 최적설계의 결과는 사용성에 문제가 있는 것으로 나타났다.

(2) Table 4, Table 5의 결과에서 보면 사용성 제약조건만 고려한 것은 철근단면은 적고 콘크리트 단면이 큰 반면, 휨 응력 제약조건만 고려한 것은 콘크리트 단면은 적고 철근단면이 크게 나타났는데, 이는 사용성에는 처짐 제약이 있기 때문에 콘크리트 단면이 크게 되는 것이라 볼 수 있다.

(3) 슬래브교의 설계에서 휨 응력 및 사용성 제약조건을 모두 고려하는 것이 가장 바람직한 설계방법이라 할 수 있으므로, 이를 기준으로 하여 목적함수 값을 비교한 Table 7의 결

과에서 건교부의 단면은 5%정도 큰 것으로 나타났다. 또 휨 응력만 고려한 결과는 6~8% 정도 단면이 부족한 것으로 나타났으므로 사용성의 고려가 반드시 필요하다고 할 수 있다.

5. 결 론

본 연구는 구조물의 한계상태를 고려한 최적화를 시도하기 위해 최적화 기법으로 SLP 방법을 사용하였다. 대상 구조물로는 간단한 철근 콘크리트 단순 슬래브교를 선정하였다. 최소 건설비를 목적함수로 하고, 제약조건으로는 휨 응력만 고려한 경우, 사용성만 고려한 경우, 휨 응력 및 사용성을 모두 고려한 경우에 대해 각각의 최적해를 산출하였다. 또 비교의 목적으로 건교부 표준단면과도 비교 검토하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 건교부 표준단면은 최적화의 관점에서 볼때는 다소 여유가 있는 설계임을 알 수 있었다.
- (2) 휨 응력 제약조건만을 고려한 설계는 사용성에서 문제를 야기시킬수 있는 것으로 나타났다.
- (3) 사용성 제약조건만 고려하더라도 휨 응력 및 사용성 제약조건을 고려하는 경우와 유사하므로 본 연구의 경우는 사용성이 지배적인 것으로 볼 수 있다.
- (4) 사용성 제약조건은 매우 중요하며, 앞으로의 구조물의 설계에서는 휨 응력제약 뿐만 아니라 사용성 제약조건도 함께 고려되어야 한다고 본다.

후 기

본 연구는 대구대학교 2002학년도 학술연구비에 의해 조성된 논문입니다.

참 고 문 헌

- 1) Kirsch, U., Optimum Structural Design, McGraw-Hill, 1981
- 2) Chu Kia Wang, Charles G. Salmon, Reinforced Concrete Design(3rd),Harper & Row Publishers, pp.108-115, 1985
- 3) 건설 교통부, 콘크리트 구조 설계기준, 기문당, pp.73-90, 1999
- 4) 대한토목학회, 도로교 설계기준 해설, 기문당, pp.660-662, 2003
- 5) 金基大, 梁昌鉉, & 趙孝男. 鐵筋콘크리트 뼈대구조의 信賴性 最適設計에 관한 研究, 大韓土木學會論文集,第9卷第3号,pp.57-64, 1989
- 6) Adeli, H. Advances in Design Optimization, London:chapman & Hall, pp.400-450, 1994
- 7) Atrek, E., Gallagher, R. H., Ragsdell, K. M., & Zienkiewicz, O. C., New Directions in Optimum Structural Design, New York: John wiley & Sons Ltd., pp.89-166, 1984
- 8) Morris., Foundations of Structural Optimization: A unified Approach, New York:John wiley & sons Ltd., pp.545-558, 1982
- 9) Rao, S. S., Engineering Optimization (3rd), New York:John wiley & sons Inc., 1996
- 10) 건설교통부, 표준설계도집, 건설연구사,1982
- 11) AASHTO, Standard Specification for the Design of Highway Bridges, 16th ed., washington DC, 1996

(2004년 1월9일 접수, 2004년 5월20일 채택)