

# 면내/면외변형을 고려한 이송되는 박막의 진동해석<sup>#</sup>

## Vibration Analysis of an Axially Moving Membrane with In-plane/Out-of-plane Deformations

신 창 호\* · 정 진 태<sup>†</sup>

Changho Shin and Jintai Chung

(2004년 6월 30일 접수 : 2004년 8월 2일 심사완료)

**Key Words** : Axially Moving Material(이송체), Vibration Analysis(진동해석), Steady State(평형상태)

### ABSTRACT

The vibration analysis of an axially moving membrane are investigated when the membrane has the two sets of in-plane boundary conditions, which are free and fixed constraints in the lateral direction. Since the in-plane stiffness is much higher than the out-of-plane stiffness, it is assumed during deriving the equations of motion that the in-plane motion is in a steady state. Under this assumption, the equation of out-of-plane motion is derived, which is a linear partial differential equation influenced by the in-plane stress distributions. After discretizing the equation by using the Galerkin method, the natural frequencies and mode shapes are computed. In particular, we put a focus on analyzing the effects of the in-plane boundary conditions on the natural frequencies and mode shapes of the moving membrane.

### 1. 서 론

축방향 이송체의 응용분야는 자기테이프, 벨트, 종이, 웹 등의 여러 공학 분야에서 쉽게 발견할 수 있다. 이러한 이송시스템의 진동문제는 많은 관심의 대상이 되어 연구가 활발하게 진행되어 왔다. Mote와 Wickert<sup>(1, 2)</sup>는 축방향 이송체의 안정성에 관한 확장된 연구를 수행하였으며, 평판톱의 진동과 안정성에 대한 연구는 Ulsoy와 Mote<sup>(3)</sup>가 수행하였다. Thurman과 Mote<sup>(4)</sup>는 연성된 비선형의 축방향 이송체의 자유진동을 제시하였다. 축방향의 속도가 주기적이라 가정하고, 축방향 가속도를 갖는 현의 횡방향 진동에 대해 Pakdemirli<sup>(5)</sup>가 연구하였다. 기하학적 비선형성

을 가진 현의 진동에 대한 연구를 J. Chung<sup>(6, 7)</sup>이 수행하였다. 위의 예처럼 이송체에 대한 진동문제가 판(plate), 보(beam)과 현(string)의 모델을 사용하여 상당히 많이 연구되어 왔다.

반면 박막 모델은 J. Neimi와 A. Pramila<sup>(8)</sup>가 FEM을 통해 이송되는 박막의 횡방향 진동을, 기하학적 비선형성을 고려하여 수치모델과 비선형의 영향을 H. Koivurova와 A. Pramila<sup>(9)</sup>가 제시하였지만 해석의 용이성과 폭의 문제를 고려할 수 있는 장점에도 불구하고 개발이 미흡한 상태이다. 따라서 본 논문에서는 박막을 이용한 이송체의 모델링과 두 개의 서로 다른 면내 경계조건에 따른 면외진동 특성을 파악하고자 한다. 기하학적 비선형성을 포함하여 면내변위는 정적 평형상태, 면외변위는 동적 평형상태라 가정 한 후, 확장된 Hamilton원리<sup>(10)</sup>로부터 면내 및 면외 방정식을 유도하여 Galerkin의 방법을 이용하여 이산화한다. 이산화된 행렬-벡터방정식을 통해 고유진동수와 모드형상을 조사하여 서로 다른 면내 경계조건에 따른 박막의 면외진동을 비교하고 영향을 분석하고자 한다.

<sup>†</sup> 책임저자 : 정희원, 한양대학교 기계공학과

E-mail : jchung@hanyang.ac.kr

Tel : (031) 400-5287, Fax : (031) 406-5550

\* 정희원, 한양대학교 일반대학원 정밀기계공학과

<sup>#</sup> 이 논문은 2004 춘계학술대회에서 우수발표논문으로 추천되었음.

## 2. 운동방정식

Fig. 1은 축방향( $x$ 방향)으로 이송되는 박막에 대한 개략도이다. 박막은 두 쌍의 롤러에 의해 지지되어 있고, 길이  $L$ , 폭  $b$  두께는  $h$ 이다. 축방향의 속도  $V$ 는 일정하고, 양 끝단의장력  $T$ 는 일정하다고 가정한다.

박막의 운동은 고정좌표계인  $xyz$ -좌표계를 사용하여 변위에 의해 표현한다. 변형으로 인해 한 점  $P(x, y)$ 가 다른 점  $P'(x', y')$ 으로 이동될 때  $P$ 점의 운동은 축방향 변위를  $u$ , 폭방향( $y$ 방향) 변위를  $v$ , 횡방향( $z$ 방향) 변위를  $w$ 로 표시한다.

또한 운동방정식을 구할 때 면내운동은 정상상태(steady state)이며 면외운동은 동적상태(dynamic state)라 가정하였다. 이것은 면내방향의 고유진동수가 면외방향보다 훨씬 크기 때문이다. 이런 가정에 대한 예는 회전원판<sup>(11, 12, 13)</sup>에서도 확인할 수 있다. 언급한 가정에 의해 축방향 및 폭방향 변위는 공간 좌표인  $x, y$ 의 함수이다. 또한 횡방향 변위는 동적 상태이므로 공간 좌표인  $x, y$  뿐만 아니라 시간  $t$ 의 함수이다. 그러므로 변위들은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = w(t, x, y) \quad (1)$$

Lagrange 방정식을 이용하여 운동방정식을 구하기 위해서는 운동에너지와 위치에너지가 필요하다. 따라서, 먼저 변형된 후의 한 점  $P$ 의 위치벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{r} = (x+u)\mathbf{i} + (y+v)\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (2)$$

여기서,  $i, j, k$ 는 각각  $x, y, z$  방향의 단위벡터이다. 위의 위치벡터에 대한 미분은 속도벡터를 나타낸다.

$$\mathbf{v} = V\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathbf{i} + V\frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{j} + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathbf{k} \quad (3)$$

박막에 대한 운동에너지는 다음 식과 같다.

$$K = \frac{1}{2}\rho h \int_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dA \quad (4)$$

여기서,  $\rho$ 는 박막의 밀도이다.  $A$ 는  $A=bL$ 인 단면적이다. 또 위치에너지는 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2}h \int_A (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + 2\sigma_{xy} \epsilon_{xy}) dA \quad (5)$$

여기서,  $\epsilon_x, \epsilon_y$ 는  $x, y$ 의 변형률,  $\epsilon_{xy}$ 는 전단 변형률이며 각각에 대응하는 응력들은  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ 이다. 박막의 큰 변형에 의해 발생하는 기하학적 비선형성을 고려하기 위해서, 변형률은 변위에 대한 비선형 함수로 표현되며, 이것은 von Karman 변형률로 다음과 같다.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \\ \epsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad (6)$$

박막의 재질은 탄성이며, 균일하고 Hooke의 법칙이 적용 가능하다고 가정하면 응력과 변형률의 관계는 다음과 같다.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\epsilon_x + \epsilon_y), \\ \sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu}\epsilon_{xy} \quad (7)$$

여기서,  $E$ 는 Young계수,  $\nu$ 는 Poisson비이다.

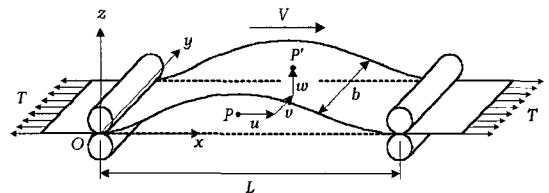


Fig. 1 Model of an axially moving membrane with velocity  $V$

비록 선형화된 응력을 비선형 응력대신에 사용하더라도 박막의 동적 운동을 기술할 수 있다. 왜냐하면 기하학적 비선형성은 큰 변형에 의해 변형률에 주로 영향을 주기 때문이다. 이런 모델링 기법은 다른 회전원판<sup>(11, 12, 13)</sup>에서 찾아볼 수 있다. 선형 응력을 사용하여 위치에너지를 변분을 구해보면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta U = \int_A (q_x \delta \epsilon_x + q_y \delta \epsilon_y + 2q_{xy} \delta \epsilon_{xy}) dA \quad (8)$$

여기서  $q_x, q_y, q_{xy}$ 는 박막의 선형 응력이며 다음과 같다.

$$q_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad q_y = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$q_{xy} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (9)$$

최종 운동방정식은 확장된 Hamilton원리<sup>(9)</sup>를 사용하여 구한다.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U + \delta W_{nc} - \delta M) dt = 0 \quad (10)$$

여기서  $t_1, t_2$ 는 임의의 시간,  $\delta$ 는 변분 연산기호이다.  $W_{nc}$ 는 비보존력에 의한 일이며,  $M$ 은 수송운동량(momentum transport)이다. 단위 폭당 장력  $T$ 는 양끝단면에, 압력  $P(t, x, y)$ 가 박막의 표면에 작용되어 비보존력에 의한 일은 다음과 같다.

$$\delta W_{nc} = T \int_0^b (\delta u|_{x=L} - \delta u|_{x=0}) dy + \int_A P \delta w dA \quad (11)$$

다른 한편으로, 수송운동량의 변분은

$$\delta M = \rho h V \cdot \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r} \Big|_{x=0}^L \quad (12)$$

식 (4), (8), (11)과 (12)를 식 (10)에 대입하여 운동방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\rho h V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

$$\rho h V^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (14)$$

$$\rho h \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( q_x \frac{\partial w}{\partial x} + q_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( q_y \frac{\partial w}{\partial y} + q_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = P \quad (15)$$

면내 응력인  $q_x, q_y, q_{xy}$ 는 면내변위  $u, v$ 만의 함수이다. 즉 식 (13)과 (14)는 오직  $u, v$ 의 함수이다. 즉 정상상태 평형위치의 운동방정식임을 의미한다. 이런 이유로 면외방정식에 무관하게 독립적으로 계산할 수 있다. 하지만 식 (15)는 동적 운동방정식임을 알 수 있다. 즉 면외방정식은 면내변위와 연성되어 있고 면외진동이 면내응력의 영향을 받음을 알 수 있다.

경계조건의 종류는 참고문헌(14)처럼 고려하였다. 폭방향  $v$ 의 구속조건만이 다르고 나머지는 동일하다. 경우 I은 마찰이 없고, 경우 II는 미끄럼이 없는 경우이다. 따라서 경우 I의 경계조건은

$$q_x = T, \quad q_{xy} = w = 0 \quad \text{at } x = 0, L \quad (16)$$

$$q_y = q_{xy} = q_y \frac{\partial w}{\partial y} + q_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{at } y = 0, b \quad (17)$$

반면 경우 II의 경계조건은

$$q_x = T, \quad v = w = 0, \quad \text{at } x = 0, L \quad (18)$$

$$q_y = q_{xy} = q_y \frac{\partial w}{\partial y} + q_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{at } y = 0, b \quad (19)$$

### 3. 운동방정식의 이산화

운동방정식과 경계조건으로부터 근사해를 구하기 위해 Galerkin방법을 사용하였다. 모든 경계조건을 만족하는 비교함수(comparison function)를 사용하기 어려워 허용함수(admissible function)를 사용할 수 있는 weak form으로 변형하여 사용하였다.

먼저, weak form을 구하기 위해, 비중함수를 정의

하여야 한다.  $u, v, w$ 에 각각 상응하는 비중함수는  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 이다.

면내운동에 대한 weak form은 식 (13)과 (14)에,  $\bar{u}, \bar{v}$ 를 각각 곱하고, 합하여 전체면적에 대해 적분을 한 후, 부분적분을 이용하여 전개하고 정리하면 아래 식과 같다.

$$\int_A \left[ \rho h V^2 \left( \bar{u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bar{v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} q_x + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} q_y + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) q_{xy} \right] dA = T \int_0^b (\bar{u}|_{x=L} - \bar{u}|_{x=0}) dy \quad (20)$$

동일한 방법으로 면외방향의 weak form을 구해보면 다음과 같다.

$$\int_A \left[ \rho h \bar{w} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + q_x \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + q_y \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + q_{xy} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dA = \int_A \bar{w} P dA \quad (21)$$

위의 weak form은 경우 I과 II에 모두 사용할 수 있으며,  $u, v, w$ 의 시도함수는

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} T_{ij}^u X_i(x) Y_j(y) \\ v &= \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} T_{ij}^v X_i(x) Y_j(y) \\ w &= \sum_{p=0}^{M_x} \sum_{q=0}^{M_y} T_{pq}^w(t) \sin \frac{(p+1)\pi x}{L} Y_q(y) \end{aligned} \quad (22)$$

$u, v, w$ 에 해당하는 비중함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \sum_{m=0}^{N_x} \sum_{n=0}^{N_y} \bar{T}_{mn}^u X_m(x) Y_n(y) \\ \bar{v} &= \sum_{m=0}^{N_x} \sum_{n=0}^{N_y} \bar{T}_{mn}^v X_m(x) Y_n(y) \end{aligned}$$

$$\bar{w} = \sum_{r=0}^{M_x} \sum_{s=0}^{M_y} \bar{T}_{rs}^w(t) \sin \frac{(r+1)\pi x}{L} Y_s(y) \quad (23)$$

위의 식 (22)과 (23)을 식 (20)과 (21)에 각각 대입하여  $\bar{T}_{mn}^u, \bar{T}_{mn}^v, \bar{T}_{rs}^w(t)$ 에 대해 정리하면

$$\sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} (k_{mnij}^{uu} T_{ij}^u + k_{mnij}^{uv} T_{ij}^v) = f_{mn}^w$$

for  $m=0, 1, \dots, N_x$  and  $n=0, 1, \dots, N_y$  (24)

$$\sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} (k_{mnij}^{vu} T_{ij}^u + k_{mnij}^{vv} T_{ij}^v) = 0$$

for  $m=0, 1, \dots, N_x$  and  $n=0, 1, \dots, N_y$  (25)

$$\sum_{p=0}^{M_x} \sum_{q=0}^{M_y} (m_{rspq}^w \ddot{T}_{pq}^w + 2V g_{rspq}^w \dot{T}_{pq}^w + V^2 h_{rspq}^w T_{pq}^w + k_{rspq}^w T_{pq}^w) = f_{rs}^w$$

for  $r=0, 1, \dots, M_x$  and  $n=0, 1, \dots, M_y$  (26)

여기서,  $k_{mnij}^{uu}, k_{mnij}^{uv}, k_{mnij}^{vu}, k_{mnij}^{vv}, f_{mn}^w$ 은 참고 문헌(14)과 동일하다. 그리고 식 (26)에 보인 계수들은

$$\begin{aligned} m_{rspq}^w &= \rho h \delta_{rp} \int_0^b Y_s(y) Y_q(y) dy \\ g_{rspq}^w &= \rho h \alpha_{rp} \int_0^b Y_s(y) Y_q(y) dy \\ h_{rspq}^w &= -\frac{(p+1)^2 \pi^2}{2} \frac{\rho h}{L} \delta_{rp} \int_0^b Y_s(y) Y_q(y) dy \\ f_{rs}^w &= \int_A P(x, y) \sin \frac{(r+1)\pi x}{L} Y_s(y) dA \\ k_{rspq}^w &= \frac{(r+1)(p+1)\pi^2}{L^2} \int_A q_x(x, y) \cos \frac{(r+1)\pi x}{L} \cos \frac{(p+1)\pi x}{L} Y_s(y) Y_q(y) dA \\ &+ \int_A q_y(x, y) \sin \frac{(r+1)\pi x}{L} \sin \frac{(p+1)\pi x}{L} \frac{dY_s(y)}{dy} \frac{dY_q(y)}{dy} dA \\ &+ \frac{(r+1)\pi}{L} \int_A q_{xy}(x, y) \cos \frac{(r+1)\pi x}{L} \sin \frac{(p+1)\pi x}{L} Y_s(y) \frac{dY_q(y)}{dy} dA \\ &+ \frac{(p+1)\pi}{L} \int_A q_{xy}(x, y) \sin \frac{(r+1)\pi x}{L} \cos \frac{(p+1)\pi x}{L} \frac{dY_s(y)}{dy} Y_q(y) dA. \end{aligned} \quad (27)$$

여기서

$$\begin{aligned} \delta_{rp} &= \begin{cases} 1 & \text{for } r = p, \\ 0 & \text{for } r \neq p, \end{cases} \\ \alpha_{rp} &= \begin{cases} 0 & \text{for } r = p, \\ \frac{[1 - (-1)^{r+p}](r+1)(p+1)}{(r-p)(r+p+2)} & \text{for } r \neq p. \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

이산화된 운동방정식은 두개의 행렬-벡터방정식으로 구성된다. 하나는 정상상태의 면내평형방정식이며, 다른 하나는 면외방정식이다. 식 (24)와 (25)는 아래와 같이 된다.

$$\mathbf{K}^{uw}\mathbf{T}^{uw} = \mathbf{F}^{uw} \quad (29)$$

여기서,

$$\mathbf{T}^{uw} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}^u \\ \mathbf{T}^v \end{Bmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^u &= \{T_{00}^u, T_{10}^u, \dots, T_{N_x,0}^u, T_{01}^u, T_{11}^u, \dots, T_{N_x,1}^u, \dots, T_{0N_y}^u, T_{1N_y}^u, \dots, T_{N_x,N_y}^u\}^T \\ \mathbf{T}^v &= \{T_{00}^v, T_{10}^v, \dots, T_{N_x,0}^v, T_{01}^v, T_{11}^v, \dots, T_{N_x,1}^v, \dots, T_{0N_y}^v, T_{1N_y}^v, \dots, T_{N_x,N_y}^v\}^T \end{aligned} \quad (31)$$

식 (29)는 강제운동을 제거하기위해 다른 행과 열에 종속되는 0값을 갖는 행과 열을 제거하여야 한다. 식 (29)로부터  $T_{ij}^u, T_{ij}^v$ 의 계수를 계산하면 면내변위 뿐만 아니라 면내응력을 구할 수 있다. 이산화된 면외운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{M}^w\ddot{\mathbf{T}}^w + 2V\mathbf{G}^w\dot{\mathbf{T}}^w + (V^2\mathbf{H}^w + \mathbf{K}^w)\mathbf{T}^w = \mathbf{F}^w \quad (32)$$

여기서  $\mathbf{M}^w$ 는 면외 질량행렬,  $\mathbf{G}^w$ 은 자이로 스코프 힘에 관련된 행렬,  $\mathbf{H}^w$  원심력에 의한 행렬,  $\mathbf{K}^w$  구조강성행렬,  $\mathbf{F}^w$  횡방향의 힘벡터이며,  $\mathbf{T}^w$  아래와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^w &= \{T_{00}^w, T_{10}^w, \dots, T_{M_x,0}^w, T_{01}^w, T_{11}^w, \dots, T_{M_x,1}^w, \dots, \\ &T_{0M_y}^w, T_{1M_y}^w, \dots, T_{M_x,M_y}^w\}^T \end{aligned} \quad (33)$$

축방향으로 이송되는 박막의 면외방향의 고유진동수와 모드형상을 얻기 위해서는 아래 식

$$\mathbf{T}^w = \mathbf{T}_0 e^{\lambda_n t} \quad (34)$$

을 이용하여 식 (32)에 대입하여 정리하여 고유치 문제를 풀면

$$\det(\lambda_n^2 \mathbf{M}^w + 2V\lambda_n \mathbf{G}^w + V^2 \mathbf{H}^w + \mathbf{K}^w) = 0 \quad (35)$$

여기서,  $\lambda_n$ 은 고유치이며, 허수부가 고유진동수  $\omega_n$ 을 나타낸다. 또한 물성치는  $\rho = 1400 \text{ kg/m}^3$ ,  $E = 3.8 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $L = 420 \text{ mm}$ ,  $h = 25 \mu\text{m}$  and  $T = 25 \text{ N/m}$ 이다. 단순화 하기 위해 무차원화된  $\tilde{\omega}$ 과  $\tilde{V}$ 을 사용하였다.

$$\tilde{\omega} = \omega_n \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{T}}, \quad \tilde{V} = V \sqrt{\frac{\rho h}{T}} \quad (36)$$

#### 4. 고유진동수

면내변위에 대한 이산화된 방정식의 증명을 위해 경우 I 과 II의 응력분포를 속도 이며, 일 때 확인하였다. 식 (29)를 이용하여 수치적으로 계산하고  $x, y$  방향의 기저함수(basis function)는 을 사용하였다. 응력함수(stress function)  $\phi$ 를 도입하여 경우 I에 대한 엄밀해는 다음의 방정식을 이용하여 구할 수 있다.

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (37)$$

그리고 여기에 상응하는 경계조건은 참고문헌과 같다.<sup>(15)</sup> 경우 I의 경우 응력함수는 다음과 같다.

$$\phi = \frac{T}{2h} y^2 \quad (38)$$

위의 식은 박막이 오직  $x$  방향으로 일정한 응력을 가지고 있음을 나타내며, 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\sigma_x = T/h, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_{xy} = 0 \quad (39)$$

경우 I에서 식 (29)에 의해 수치적으로 계산된 는 일정한 값  $10^6 \text{ N/m}^2$ 을 전 영역에 대해 갖는다. 또한 계산된  $\sigma_y$ 는  $-1.6 \times 10^{-8}$ 에서  $3.73 \times 10^{-8} \text{ N/m}^2$ 을 갖고  $\sigma_{xy}$ 는  $-1.2 \times 10^{-8}$ 에서  $1.2 \times 10^{-8} \text{ N/m}^2$ 의 값을 갖는다. 이 계산된 값은 식 (39)의 엄밀해와 거의 같음을 확인할 수 있다.

다음은 경우 II에 대해서 면내 응력분포를 조사해보면, 응력분포는 Fig. 2와 같다. Fig. 2a, 2b, 2c는 각각  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_{xy}$  를 나타낸다.

한편 같은 박막에 대해 응력분포를 유한요소프로그램인 Ansys를 사용하여 membrane 41의 4점 사각형 요소를 3600개로 나누어 계산하였다. Fig. 3은 Ansys에 의한 응력분포를 나타낸다. Fig. 2와 Fig. 3을 비교하면 거의 일치함을 알 수 있다. 그러므로, 식 (29)

의 운동방정식은 Legendre함수와 삼각함수를 기저함수로 사용하는 것이 타당함을 알 수 있다. 정지상태의 박막의 면외방정식이 경우 I의 경우 타당함을 보이기 위해  $x$ 방향만 응력이 존재함을 이용하여 식 (15)는 다음과 같이 축소될 수 있다.

$$\rho h^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = Ph \quad (40)$$

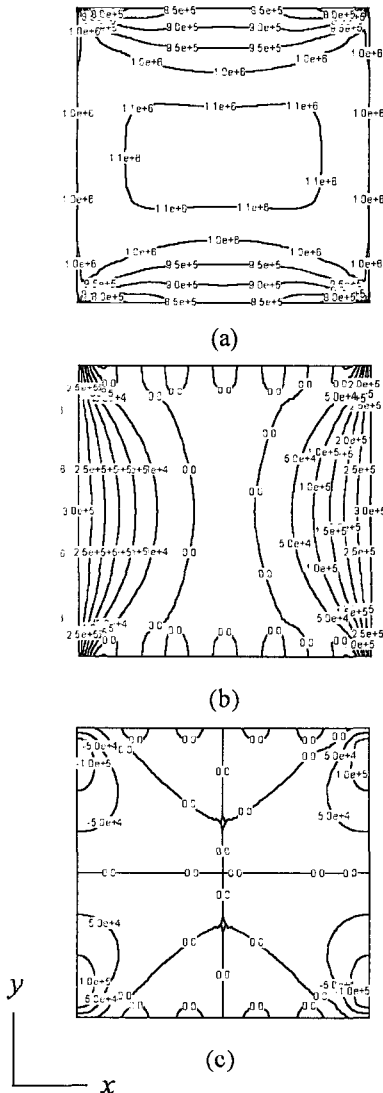


Fig. 2 Stress distributions of the stationary membrane computed by the proposed method with when the membrane has the boundary conditions of Case II: (a)  $\sigma_x$ ; (b)  $\sigma_y$ ; and (c)  $\sigma_{xy}$

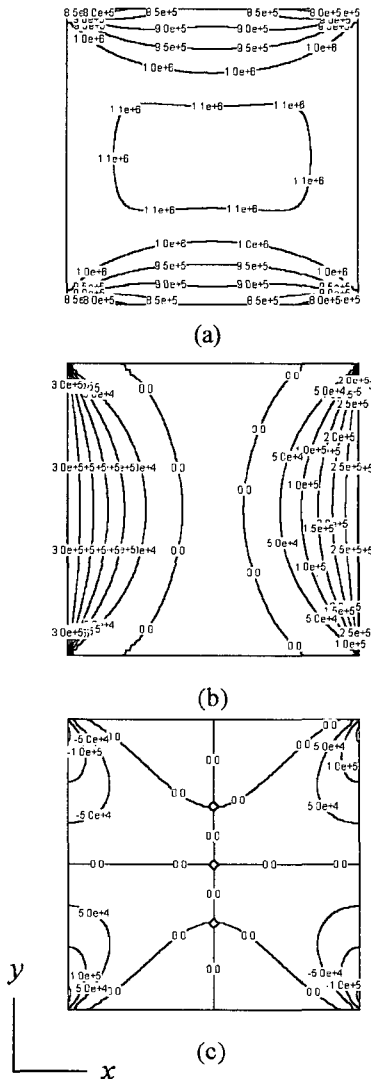
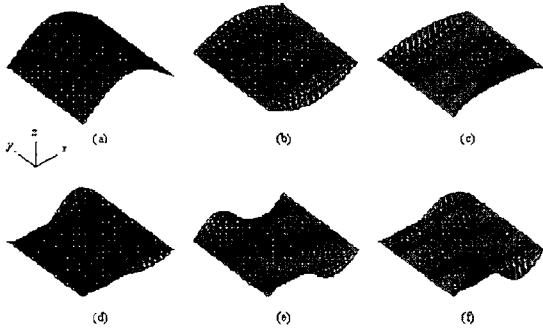


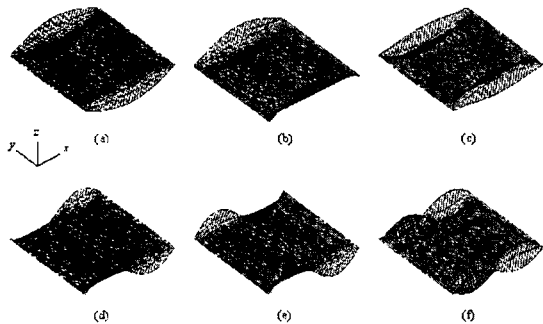
Fig. 3 Stress distributions of the stationary membrane computed by ANSYS with 3600 elements when the membrane has the boundary conditions of Case II: (a)  $\sigma_x$ ; (b)  $\sigma_y$ ; and (c)  $\sigma_{xy}$

그러므로 경우 I의 박막의 경우 유연 현(string)의 고유진동수와 같음을 알 수 있다. Table 1은 정적인 박막의 특성을 나타낸다. Table 1에서 보는 것처럼 기저함수의 개수에 관계없이 수렴함을 알 수 있으며 유연 현의 값과 동일하게 수렴한다. 또한 Table 1의 모드( $k, l$ )에서  $k, l$ 은 각각  $x$ 방향과  $y$ 방향의 nodal line을 나타낸다.

경우 I에 대한 정적 모드형상은 Fig. 4와 같다. 동일한  $x$ 의 방향의 nodal line에서 같은 고유진동수를 갖지만 모드형상은 서로 다를 수 있다. 경우 II에 대한 수렴성은 Table 2에 나타내었다. 기저함수의 수가 증가함에 따라 수렴함을 알 수 있으며, 특히 경우 I과 다르게 동일한  $x$ 의 방향의 nodal line에서 고유진동수가 서로 다른 값을 갖게 되며, 경우 I에



**Fig. 4** Mode shapes of the stationary membrane with the boundary conditions of Case I: (a) the (0, 1) mode: (b) the (0, 2) mode: (c) the (0, 3) mode: (d) the (1, 1) mode: (e) the (1, 2) mode and (f) the (1, 3) mode



**Fig. 5** Mode shapes of the stationary membrane with the boundary conditions of Case II: (a) the (0, 1) mode: (b) the (0, 2) mode: (c) the (0, 3) mode: (d) the (1, 1) mode: (e) the (1, 2) mode and (f) the (1, 3) mode

**Table 1** Convergence characteristics of the dimensionless natural frequencies  $\tilde{\omega}$  for the stationary membrane with the boundary conditions of Case I

$M_x$	$M_y$	Mode			
		(0, 1)	(0, 2)	(1, 1)	(1, 2)
2	5	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	6	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	7	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	8	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	9	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
3	5	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	6	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	7	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	8	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	9	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
4	5	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	6	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	7	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	8	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	9	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
5	5	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	6	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	7	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	8	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000
	9	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000

**Table 2** Convergence characteristics of the dimensionless natural frequencies  $\tilde{\omega}$  for the stationary membrane with the boundary conditions of Case II

$M_x$	$M_y$	Mode			
		(0, 1)	(0, 2)	(1, 1)	(1, 2)
2	5	0.9274	0.9353	1.8596	1.8738
	6	0.9274	0.9206	1.8596	1.8479
	7	0.9144	0.9206	1.8380	1.8479
	8	0.9144	0.9086	1.9380	1.8293
	9	0.9029	0.9086	1.8218	1.8293
3	5	0.9274	0.9353	1.8595	1.8737
	6	0.9274	0.9206	1.8596	1.8477
	7	0.9144	0.9206	1.8374	1.8477
	8	0.9144	0.9086	1.8374	1.8283
	9	0.9029	0.9086	1.8200	1.8283
4	5	0.9272	0.9351	1.8595	1.8737
	6	0.9272	0.9205	1.8596	1.8477
	7	0.9143	0.9205	1.8374	1.8477
	8	0.9143	0.9084	1.8374	1.8283
	9	0.9024	0.9084	1.8200	1.8283
5	5	0.9272	0.9351	1.8592	1.8734
	6	0.9272	0.9205	1.8592	1.8474
	7	0.9143	0.9205	1.8370	1.8474
	8	0.9143	0.9084	1.8370	1.8273
	9	0.9024	0.9084	1.8168	1.8273

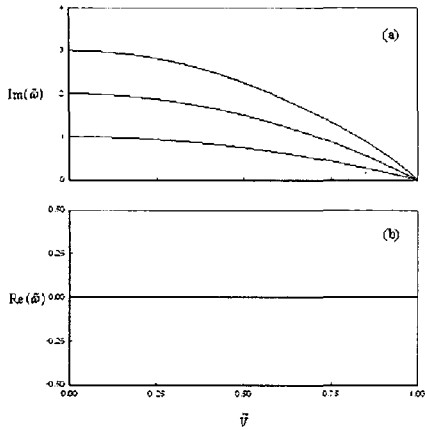


Fig. 6 Variation of the complex eigenvalues for the dimensionless velocity with the boundary conditions of Case I: (a) the imaginary part; and (b) the real part

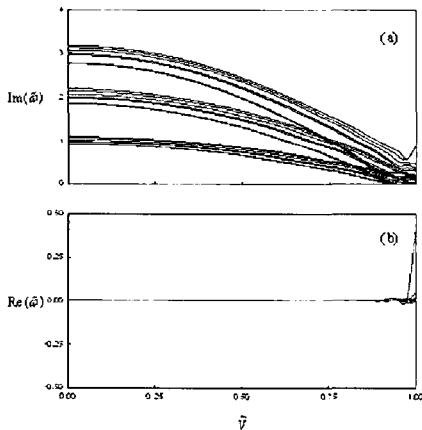


Fig. 7 Variation of the complex eigenvalues for the dimensionless velocity with the boundary conditions of Case II: (a) the imaginary part; and (b) the real part

비해 낮은 값을 갖는다. 또한 Fig. 5는 경우 II에 대한 정적 모드형상을 나타내며 각각 서로 다르다. 경우 I 과 II의 모드형상은 서로 다른 형태로 차이가 발생함을 볼 수 있다. 이것은 면내방향의 경계조건에 따라 고유진동수와 모드형상이 서로 달라짐을 알 수 있다.

한편 속도의 증가에 따른 위험속도(critical speed)와 동적 불안정(dynamic instability)의 영역에 대해서 경우 I과 II에 대해 Fig. 6과 7에 각각 나타내었다. Fig. 6a와 6b는 경우 I에 대한 고유치의 허수와 실수 부분을 나타낸다. 고유진동수는 속도에 따라 감소하며, 유연 현처럼 위험속도가 1임을 알 수 있다.

또한 예서는 동적 불안정 이 없음을 Fig. 6b를 통해서 확인할 수 있다. 반면 Fig. 7a와 7b는 경우 II에 대한 고유치의 허수와 실수 부분을 나타낸다. 속도의 증가에 따라 고유진동수는 감소하며, 위험속도는 경우 I보다 작은 0.95임을 알 수 있다. 또한 영역에서 동적 불안정성이 존재함을 알 수 있다. 즉 면내 경계 조건에 의해 위험속도 및 동적 불안정성의 영역이 영향을 받음을 알 수 있다.

### 5. 결론

두개의 서로 다른 경계조건을 갖고 기하학적 비선형성을 갖는 이송되는 박막의 운동방정식을 구하였다. 면내운동은 정상상태, 면외방향은 동적상태라 가정하고, 확장된 Hamilton원리를 적용하여 면내 및 면외 방정식을 구하였다.

면내방정식은 선형으로 오직 면내방향만으로 연성되고, 면외 방정식은 비선형으로 구성된다. Galerkin 방법을 사용하여 운동방정식을 이산화 하고 고유진동수와 모드형상에 관해 조사하였다. 위의 결과를 요약하면 다음과 같다.

- (1) 경우 I에 대한 고유진동수는 폭방향의 모드형상에 변화에 관계없이 일정하며, 경우 II는 폭방향의 모드형상에 따라 각각 다른 값을 갖는다.
- (2) 경우 II의 모드형상은 폭방향으로 출렁임이 경우 I에 비해 상대적으로 적음을 알 수 있는데 이것은 경계조건에 의해 폭방향의 장력이 존재하기 때문이다.
- (3) 경우 II의 동적불안정이 경우 I의 이송속도보다 낮은 구역에서 발생함을 알 수 있다.

### 참고 문헌

- (1) Mote, Jr, C. D., 1972, "Dynamic Stability of Axially Moving Materials," Shock and Vibration, Vol. 4, pp. 2~11.
- (2) Wickert, J. A. and Mote, Jr, C. D., 1988, "Current Research on the Vibration and Stability of Axially Moving Materials," Shock and Vibration Digest, Vol. 20, pp. 3~13.
- (3) Ulsoy, A. G. and Mote, Jr, C. D., 1982, "Vibration of Wide Band Saw Blades," Journal of



Engineering for industry Vol. 104, pp. 71~78.

(4) Thurman, A. L. and Mote, Jr, C. D., 1969, "Free, Periodic, Nonlinear, Oscillation of an Axially Moving Strip," Journal of Applied Mechanics, Vol. 36, pp. 83~91.

(5) Pakdemirli, M., Ulsoy, A. G. and Ceranoglu, A., 1994, "Transverse Vibration of an Axially Accelerating String," Journal of Sound and Vibration, Vol. 169, pp. 179~196.

(6) Sin, C., Chung, J. and Han, C. S., 2000, "Dynamic Modeling and Analysis for an Axially Moving Sting," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 10, pp. 838~842.

(7) Chung, J., Han, C. S. and Yi, K., 2001, "Vibration of an Axially Moving String with Geometric Non-linearity and Translating Acceleration," Journal of Sound and Vibration, Vol. 240, pp. 733~746.

(8) Niemi, J. and Pramila, A., 1987, "FEM-analysis of Transverse Vibrations of an Axially Moving Membrane Immersed in Ideal Fluid," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, pp. 2301~2313.

(9) Koivurava, H. and Pramila, A., 1997, "Non-

linear Vibration of Axially Moving Membrane by Finite Element Method," Computational Mechanics, Vol. 20, pp. 573~581.

(10) McIver, D. B., 1972, "Hamilton's Principle for Systems of Changing Mass," Journal of Engineering Mathematics, Vol. 7, pp. 249~261.

(11) Iwan, W. D. and Moeller, T. L., 1976, "The Stability of a Spinning Elastic Disk with a Transverse Load System," American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics, Vol. 43, pp. 485~490.

(12) Hutton, S. G., Chonan, S. and Lehmann, B. F., 1987, "Dynamic Response of a Guided Circular Saw," Journal of Sound and Vibration, Vol. 112, pp. 527~539.

(13) Chung, J., Heo, J. W. and Han, C. S., 2003 "Natural Frequencies of a Flexible Spinning Disk Misaligned with the Axis of Rotation," Journal of Sound and Vibration, Vol. 260 pp. 763~775.

(14) Shin, C., Kim, W. Chung, J., 2003 "Free In-plane Vibration of an Axially Moving Membrane," Journal of Sound and Vibration, Vol. 272, pp. 137~154.

(15) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., 1970, Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York.