

정전기력을 받는 마이크로 외팔보의 동적 해석

Dynamic Analysis of Micro Cantilever Beams Undertaking Electrostatic Forces

정 강 식* · 문 승 재** · 유 흥 희†

Kang-Sik Jung, Seung-Jae Moon and Hong-Hee Yoo

(2004년 6월 10일 접수 ; 2004년 8월 2일 심사완료)

Key Words : Structural Dynamics(구조동역학), Cantilever Beam(외팔 보), Modal Analysis(모드 해석), MEMS(마이크로 전자기계 시스템), Electrostatic Force(정전기력)

ABSTRACT

Static and dynamic responses of micro cantilever beam structures undertaking electrostatic forces are obtained employing Galerkin's method based on Euler beam theory. Variations of static and dynamic responses as well as resonant frequencies are estimated for several sets of beam properties and applied voltages. It is shown that the applied voltage influences the deflection and the modal characteristics significantly. Such information can be usefully employed for the design of MEMS structures.

기 호 설 명

1. 서 론

- d : 보와 고정 전극의 간격
- E : 탄성계수
- ϵ_0 : 진공의 유전율
- f_i : 강제진동 시의 i 번째 고유진동수
- f_{ni} : 자유진동 시의 i 번째 고유진동수
- I : 2차 단면 관성 모멘트
- L : 보의 길이
- ρ : 단위길이 당 질량
- V : 적용 전압
- v_T : 자유단의 변위
- w : 보의 너비

반도체 제조공정 기술의 발달로 인하여 최근 많은 제품들의 핵심 부품들이 마이크로 구조물로 제작되고 있다. HDD용으로 사용되는 마이크로 구동기나 차세대 영상 기술인 DLP의 마이크로 미러, 개인용 단말기 기지국의 신호 검출 장치와 각속도 측정 관성 센서인 마이크로 자이로스코프 등이 그 대표적 예제들이다.

마이크로 구조의 부품들은 그 효율적인 구동을 위해 정전기력이 널리 사용되고 있다. 그러므로 정전기력을 받는 마이크로 구조물의 정적 및 동적 특성에 대한 연구는 구조물의 효율적인 설계를 위해서 매우 중요하다.

현재까지 정전기력을 받는 마이크로 구조물의 정적 및 동적 특성에 대한 다양한 연구들이 이루어졌다. 참고문헌(2)는 정전기력을 받는 강체인 평판과 이를 지지하는 탄성 외팔보로 이루어진 구조물의 동적 해석을 수행하였다. 또한 참고문헌(3)은 Fig. 1과 같이 마이크로 외팔보의 집합구조를 갖는 comb drive에 대한 특성을 다루었다. 그러나 정전기력을 받는 외팔

† 책임저자 : 정희원, 한양대학교 공과대학 기계공학부
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr
Tel : (02) 2290-0446, Fax : (02) 2293-5070

* 정희원, 한양대학교 대학원 기계설계학과

** 한양대학교 기계공학부

보는 강체로, 지지하는 부분만을 탄성체로 고려하였고 정적응답과 고유진동수 변화를 예측하는 수식은 제시하였으나 실제적인 응답의 분석은 실험을 통한 연구를 수행하였다. 참고문헌(4)는 단일 마이크로 외팔보에 대한 연구로서 정전기력을 받는 외팔보를 큰 변형을 갖는 탄성체로 고려하였다. 그러나 이 연구는 정적 응답의 예측에만 국한된 것으로 동적 특성은 다루지 않았다. 그리고 참고문헌(5)는 마이크로 외팔보를 탄성체로 고려한 동적 응답의 제어를 연구하였으나 가진 전압에 대한 동적 특성의 일반적인 변화를 다루지는 않았다.

이 연구에서는 comb drive를 비롯한 많은 MEMS 구조물에서 사용되는 정전기력 구동기의 기본 구조인 마이크로 외팔보를 탄성체로 고려하여 동역학적 모델링을 수행하였다. 또한 운동방정식을 바탕으로 정적 및 동적 해석을 수행하고 그 결과를 분석하였으며 특히 전압에 의한 고유진동수의 변화와 가진 전압의 주파수 변화에 의한 동적 특성의 변화를 예측하였다. 따라서 본 연구는 이전의 연구에 비해 구조 동역학적으로 모델링의 정확성을 높였다고 볼 수 있으며 이를 기반으로 더 일반적인 MEMS 구조물에 대한 연구를 수행하기 위한 기반을 구축하였다는 점에서 그 연구의 의미를 갖는다고 할 수 있다.

2. 운동방정식

이 장에서는 정전기력을 받는 마이크로 외팔 보에 대한 운동방정식을 유도하려고 한다. 정전기력을 받는 마이크로 외팔보는 Fig. 2와 같이 나타낼 수 있다. 보 상의 위치에 따른 변위 변화를 고려하는 연속체에 서의 굽힘 방향 운동방정식은 오일러 보 이론에 근거 하여 식 (1)과 같이 주어진다.

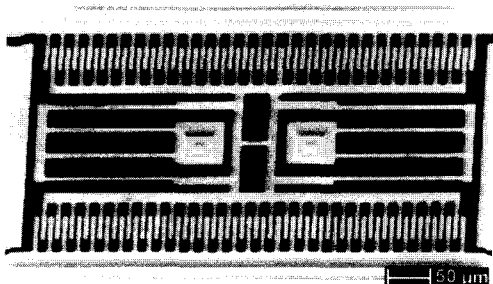


Fig. 1 Configuration of a comb drive

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = f \quad (1)$$

여기서 f 는 정전기력으로서 식 (2)와 같이 참고문헌(1)에서 제시되었으며 변위에 대해 비선형적 관계를 갖는다. 본 연구에서는 효과적인 해석을 위해 다음과 같이 변위에 대해 선형적인 관계로 근사화한다.

$$f = \frac{w\epsilon_0}{2} \left(\frac{V}{d-v} \right)^2 \cong \frac{w\epsilon_0 V^2}{2} \left(\frac{1}{d^2} + \frac{2v}{d^3} \right) \quad (2)$$

운동방정식을 구하기 위해 식 (1)에 가중함수 ϕ_i 를 곱한 후 외팔 보의 영역에 대해 부분적분하고 경계조건을 대입한다.

$$\int_0^L \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \cdot \phi_i dx + \int_0^L EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot \phi_i'' dx = \int_0^L f \cdot \phi_i dx \quad (3)$$

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_i(x) q_i(t) \quad (4)$$

다음은 변위를 식 (4)와 같이 근사화한 후에 식 (2)와 식 (4)를 식 (3)에 대입하면 다음과 같은 운동방정식을 구할 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu} M_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{\mu} K_{ij} q_j = \sum_{j=1}^{\mu} R_{ij}^1 q_j + R_i^0 \quad (i=1, \dots, \mu) \quad (5)$$

여기서

$$M_{ij} = \int_0^L \rho \phi_i \phi_j dx = \rho L \delta_{ij} \quad (6)$$

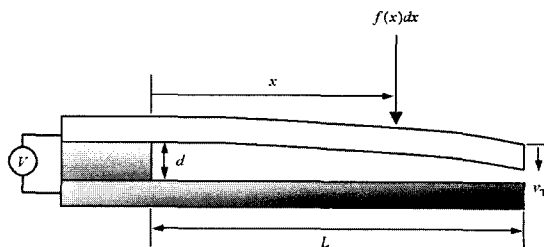


Fig. 2 Configuration of a micro cantilever beam undertaking electrostatic force

$$K_{ij} = \int_0^L EI \phi_i'' \phi_j'' dx = \lambda_i^4 \frac{EI}{L^3} \delta_{ij} \quad (7)$$

$$R_{ij}^1 = \int_0^L \frac{w \epsilon_0 V^2}{d^3} \phi_i \phi_j dx = \frac{w \epsilon_0 V^2}{d^3} \delta_{ij} \quad (8)$$

$$R_i^0 = \int_0^L \frac{w \epsilon_0 V^2}{2d^2} \phi_i dx \quad (9)$$

또 운동방정식의 가중함수 및 모드함수로 사용한 ϕ_i 는 아래 나타난 식 (10)으로 표현되는데 여기서 λ_i 의 값은 식 (11)의 방정식을 만족하는 값으로 보의 굽힘 방향 고유진동수와 관련된다.

$$\phi_i(x) = \cosh \frac{\lambda_i x}{L} - \cos \frac{\lambda_i x}{L} - \frac{\cosh \lambda_i + \cos \lambda_i}{\sinh \lambda_i + \sin \lambda_i} \left(\sinh \frac{\lambda_i x}{L} - \sin \frac{\lambda_i x}{L} \right) \quad (10)$$

$$\cosh \lambda_i \cdot \cosh \lambda_i + 1 = 0 \quad (11)$$

식 (5)의 운동방정식에서 시간에 따른 변화를 무시함으로써 정적 응답과 관련된 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu} K_{ij} q_j = \sum_{j=1}^{\mu} R_{ij}^1 q_j + R_i^0 \quad (12)$$

식 (7)과 식 (8)을 식 (12)에 대입하여서 정리하면 다음과 같이 자유단 처짐을 구할 수 있다.

$$q_i = \frac{C_{Ri}/2}{\frac{\lambda_i^4 EI d^2}{w \epsilon_0 L^4 V^2} - \frac{1}{d}} = \frac{C_{Ri}/2}{\frac{\lambda_i^4 EI d^2}{w \epsilon_0 \alpha^2} - \frac{1}{d}} \quad (13)$$

$$v_T = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_i(L) q_i \quad (14)$$

여기서

$$C_{Ri} \equiv \frac{1}{L} \int_0^L \phi_i dx \quad (15)$$

$$\alpha \equiv VL^2 \quad (16)$$

시스템의 고유진동수는 식 (5)에 식 (6)과 (7)을 대입하여 얻을 수 있으며 실제적으로 가장 지배적 주파수인 첫번째 고유진동수는 식 (17)와 같다. 여기에서 관찰할 수 있듯이 고유진동수는 전압 V 에 의해 형성되는 강성감소 효과로 인해 자유진동의 경우보다 감소하게 된다.

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_1^4 EI}{\rho L^4} - \frac{w \epsilon_0 V^2}{\rho d^3}} \quad (17)$$

3. 수치 해석

본 장에서는 앞 장에서 유도된 운동방정식을 바탕으로 정전기력을 받는 외팔 보에 대해서 정적 및 동적 응답 해석과 고유진동 해석을 수행하였다. 수치 해석에 사용한 물성 값들은 모두 Table 1에 나타나 있다.

Fig. 3은 정적 해석을 수행한 결과로서 가해진 전압 변화에 대해 무차원화된 자유단 처짐 변화를 나타낸 것이다. 그림에 나타난 4가지 선들은 4가지 보의 길이를 갖는 외팔 보들의 응답을 나타내고 있다. 그런데 식 (13)에서 모든 물성치는 일정한 값으로 결정되며 C_{Ri} 는 보의 길이와 상관없이 일정한 값을 갖는다. 그러므로 식 (13)과 식 (14)으로부터 식 (16)에서 정의된 α 의 수치만 동일하다면 동일한 크기의 정적

Table 1 Numerical data used for the simulation

Notation	Description	Numerical data
ρ	Mass per unit length	9.320×10^{-9} kg/m
E	Young's modulus	55 GPa
I	Moment of inertia of the cantilever	$1.3333 \mu\text{m}^4$
L	Beam length	100 ~ 400 μm
w	Beam width	2.0 μm
ϵ_0	Permittivity of free space	8.8542×10^{-12} F/m
V	Applied drive voltage	0.0 ~ 64.0 V
d	Gap between cantilever and deflection electrode	2.0 μm

응답을 갖게 됨을 알 수 있다. 다시 말해 모든 물성 값들이 같다면 보의 길이와 전압에 의해 결정되는 α 값이 같게 된다면 같은 크기의 처짐이 발생한다는 것이다. 또 Fig. 3에는 보의 길이가 증가할수록 전압 변화에 따른 정적 처짐 기울기가 급격히 증가하는 것을 보여주는데 이는 외팔 보의 구조강성이 보 길이의 3제곱에 반비례하기 때문이다.

Fig. 4는 식 (17)로부터 구한 가해진 전압의 변화에 대한 고유진동수의 변화를 보여주고 있다. 이 그림이 보여주듯이 전압 변화에 대해 첫번째를 제외한 고유진동수들의 변화는 거의 무시할만한 것을 알 수 있다. Fig. 5는 4가지 보 길이에 대해 첫번째 고유진동수의 변화를 보여주고 있다. 앞의 정적 처짐의 경우와 마찬가지로 보의 길이가 증가하면 전압의 변화에 따라 고유진동수가 급격하게 감소하고 있다.

Fig. 6은 일정 크기의 전압에 의해서 발생하는 정전기력을 받는 경우로 정적 해석 시 자유단의 변위가

같았던 두 경우에 (전압과 보의 길이는 서로 다르나 VL^2 값은 동일함) 대해 동일한 크기의 최대 변위가 발생하고 있는 것을 보여주고 있다. 최대 동적 응답 크기는 전체적으로 정적 해석에서 구한 $(v_T/d)_{static} = 0.045$ 의 2배인 0.09이다. 동적 응답은 정적 응답을 평균으로 하여 0과 최대값 사이에서 진동하고 있다. 또한 각각의 경우에 식 (17)를 이용하여 구할 수 있는 고유진동수인 1.527×10^5 Hz와 3.818×10^4 Hz로 동적 응답 값이 진동하고 있다. 결국 이 결과는 자유진동에 의한 동적 반응에 해당하며 동적 반응에 나타나는 주파수도 고유진동수에 해당하는 값들이다.

그러나 앞의 일정한 전압을 받는 경우와 달리 시간에 대해서 조화함수 형태로 변하는 전압을 받는 경우에는 Fig. 6에서 동적 응답의 형태가 달랐던 두 경우의 외팔보가 Fig. 7과 같이 거의 일치하는 응답을 보인다. 이 결과는 일반적인 교류전압과 같은 60 Hz의 주파수를 갖는 전압에 대한 응답을 나타낸 것으로 응

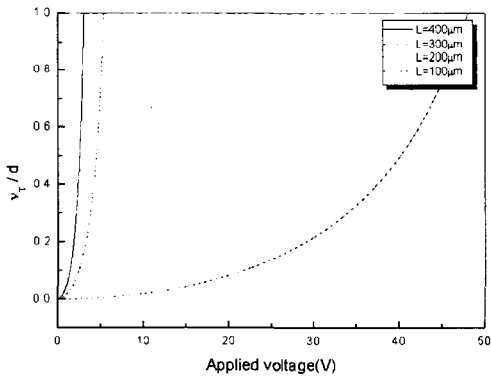


Fig. 3 Variation of static deflection of beam versus applied voltage

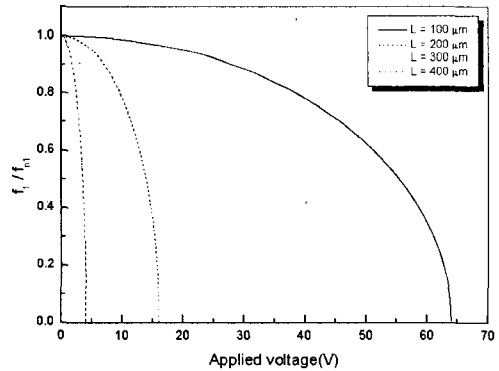


Fig. 5 Variation of the 1st natural frequency with four cases of beam length

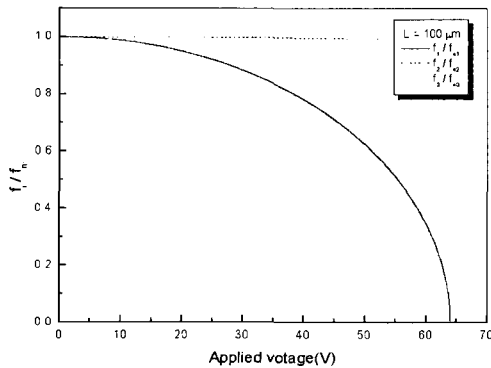


Fig. 4 Variations of natural frequencies versus applied voltage

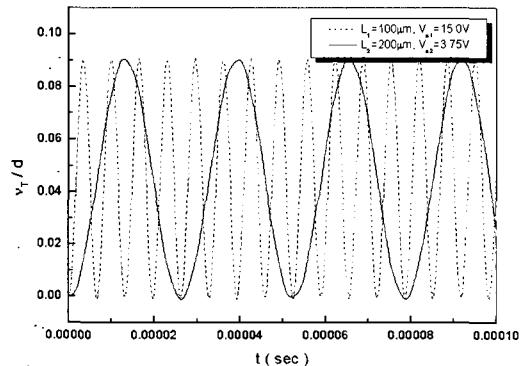


Fig. 6 Dynamic responses by a step input voltage

답 크기가 일정한 전압이 가해진 경우와 달리 가해지는 최대 전압에 의한 정적 응답과 동일한 크기의 최대값과 0사이에서 진동하고 있다. 실제로는 이 신호 속에도 고유진동수를 관찰할 수 있는 비교적 짧은 주기의 응답이 미세 크기로 발생하고 있지만 고유진동수와 가진 주파수의 차이가 상당히 크기 때문에 그 진폭이 매우 작아 전체적 응답의 모습은 가진 주파수의 성분이 주도적인 역할을 하고 있음을 보여준다. 다시 말해 이와 같이 가진 주파수의 크기가 고유진동수에 비해 매우 작은 경우에는 매순간 전압 크기에 상응하는 정적 변형이 일어나는 것과 같이 동적 반응이 나타나게 된다.

그러나 가진 주파수가 고유진동수에 접근하게 되면 Fig. 8, 9와 같이 동적 반응에 변화가 발생한다. 그리고 특히 Fig. 9와 같은 경우에는 자유단 응답의 최대값이 실제 시스템에서 발생할 수 없는 값인 간극보다 큰 값을 갖게 된다. 이것은 자유단과 전극간의 접촉이 발생함을 의미하며, 이와 같은 결과로부터 전압이

낮은 주파수로 가해질 때는 안정적인 응답을 발생시키더라도 특정 주파수로 가해질 때 동적 반응을 크게 변화시켜 마이크로 외팔보의 작동이 불안정해 질 수 있음을 예상할 수 있다.

Fig. 10은 가진 전압의 진폭과 주파수를 변화시키면서 최대 동적 응답을 나타낸 결과로서 고유진동수에 대해 가진 주파수의 비가 0.5일 때 동적 반응의

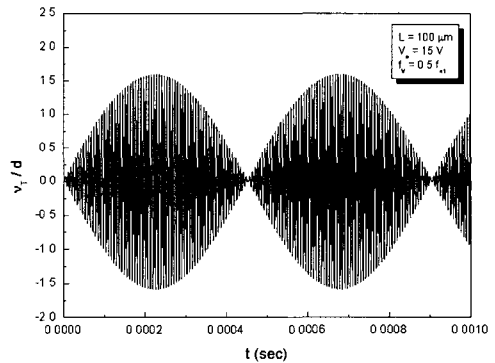


Fig. 9 Dynamic response by a harmonic input voltage of a high exciting frequency ($f_e = 0.5f_m$)

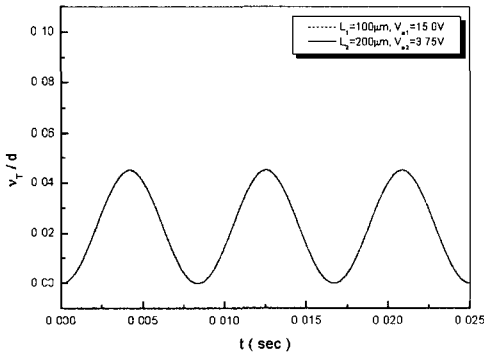


Fig. 7 Dynamic responses by a harmonic input voltage of a low exciting frequency

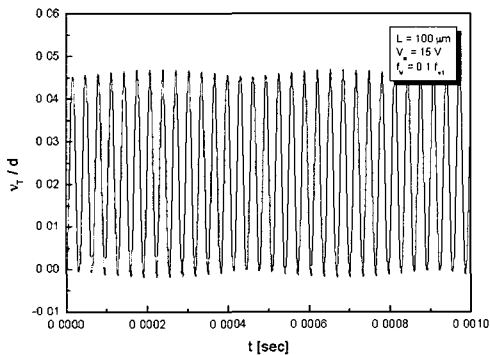


Fig. 8 Dynamic response by a harmonic input voltage of a high exciting frequency ($f_e = 0.1f_m$)

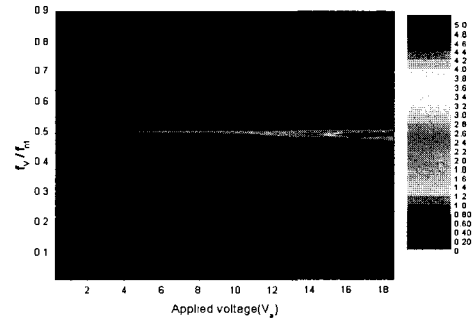


Fig. 10 Variation of maximum dynamic response by a harmonic input voltage

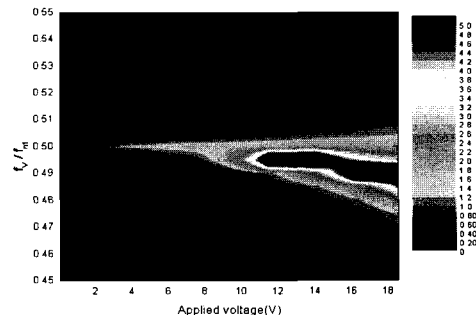


Fig. 11 Variation of maximum dynamic response by a harmonic input voltage(magnified)

변화가 급격함을 볼 수 있다. 또한 변화가 급격한 부분을 확대한 Fig. 11의 결과로부터 전압의 진폭 증가에 따라 마이크로 외팔보의 작동이 불안정해지는 주파수 영역이 넓어지는 것을 볼 수 있으며 같은 크기의 진폭에서 작동을 가장 불안정하게 하는 주파수로 볼 수 있는 최대 동적 응답이 가장 큰 지점 역시 진폭 증가에 따라 점차 아래쪽으로 이동하는 것을 볼 수 있다.

4. 결론

이 논문에서는 정전기력을 이용하여 동작하는 많은 마이크로 제품에 나타나는 기본 형태인 마이크로 외팔보의 운동방정식을 정전기력을 고려하여 유도하였다. 이 운동방정식에 기초하여 전압의 변화에 따른 정적 및 동적 응답과 고유진동수의 변화를 수식적으로 유도하였으며 그에 근거하여 수치 해석 결과를 도출하였다. 이 결과는 이러한 구조들의 정적 및 동적 응답과 고유진동수가 가해지는 전압에 크게 영향을 받는 것을 보여주었으며 특별히 어느 값 이상이 되면 허용되는 처짐이나 고유진동수의 한계를 넘어서게 되는 것을 확인할 수 있었다. 또한 특정 주파수로 가해지는 가진 전압에 의해 마이크로 외팔보의 작동이 불안정해 질 수 있음을 확인하였다.

본 연구는 현재 산업의 여러 분야에 걸쳐 많은 개발이 이루어지고 있는 MEMS 제품 설계를 위해 필수적인, 정전기력을 받는 마이크로 구조의 동적 응답 예측을 위한 모델링 및 방법 개발에 기반을 제공한다. 이는 점에서 중요한 의미를 가지며 아울러 전자기계적 현상과 기계적인 현상이 연성되어 발생하는 물리적 현상에 대한 이해의 지평을 넓힌다는 점에서도 의의를 갖는 것으로 사료된다.

후 기

이 연구는 한국과학재단지정 한양대학교 최적설계 신기술연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참 고 문 헌

- (1) Kovacs, Gregory T. A., 1998, *Micromachined Transducers Sourcebook*, McGraw-Hill, pp. 278~281.
- (2) Chu, Patrick B., Nelson, Phyllis R., Tachiki, Mark L., and Pister, Kristofer S. J., 1996, "Dynamics of Polysilicon Parallel-plate Electrostatic Actuators," *Sensors and Actuators*, A52, pp. 216~220.
- (3) Tang, William C., Nguyen, Tu-Cuong H., and Howe, Roger T., 1989, "Laterally Driven Polysilicon Resonant Microstructures," *Sensors and Actuators*, 20, pp. 25~32.
- (4) Hirai, Yoshihiko, Marushima, Yoshinari, Soda, Shinnosuke, Jin, Donghao, Kawata, Hiroaki, Inoue, Kouji, Tanaka, Yoshio, 2000, "Electrostatic Actuator with Novel Shaped Cantilever," 2000 International Symposium on Micromechatronics and Human Science, pp. 223~227.
- (5) Wang, P. K. C., 1998, "Feedback Control of Vibration in a Micromachined Cantilever Beam with Electrostatic Actuators," *J. of Sound and Vibration*, pp. 537~550.