韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 18집 제 2호, 2004. 7. 321-340

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 18, No. 2, July. 2004. 321-340

초등기하학습에서의 GSP를 활용한 영재교육 자료 개발 및 활용 방안

김 해 규 (제주교육대학교)
현 창 석 (제주노형초등학교)

본 연구에서는 van Hieles의 기하학 사고 수준에 따라, GSP(Geometer's SketchPad)를 활용한 초등기하 영재교육에 활용할 수 있는 프로그램을 구안하여, 구안된 프로그램을 제주대학교 부설 과학영재교육원 초등수학반 학생들에게 적용, 그 효과를 검증해봄으로써, GSP를 이용한 초등수학 영재 교육 프로그램의 개발과 활용 가능성을 연구하는데 그 목적이 있다.

I. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

초등학교 제7차 수학과 교육과정의 영역은 모두 여섯 영역으로 수와 연산, 도형, 측정, 확률과 통계, 문자와 식, 규칙성과 함수이다. 이 중 도형영역이 차지하는 비율은 약 27%로 수와 연산 영역만큼 중요시되고 있다. 초등수학 도형영역의 과제는 구체물로부터 모양을 찾고 이를 도형으로 발전시켜, 도형의 성질을 탐구하고 그 성질 사이의 관계를 규명하는 것이라 할 수 있다.

학습자들은 도형영역의 학습을 통하여 생활 주변의 구체물을 수학적으로 추상화하여 학습의 대상으로 삼아야 한다. 그러나 추상화 능력의 부족함으로 인해 도형영역을 어려워하는 실정이다. 더불어 van Hieles의 이론에 따르면, 기하학과 관련된 사고 과정이 존재하고, 이에 적절한 학습을 통하여 순차적인 수준 향상이 이루어지게 되는데, 이에 반하는 학습, 즉 학습자의 사고 수준에 맞지 않는 학습과제가 주어져 결손이 생기고 이를 보충하지 않고 다음 학습 수준으로 이행하는 경우 도형학습에 대한 어려움이 더해진다고 한다.(양규모, 2002)

이러한 초등수학 도형영역의 문제점을 해결하기 위하여 많이 연구되어지고 있는 내용 중 하나는 탐구형 소프트웨어의 활용이다. 탐구형 소프트웨어 활용 기하학습과 관련된 여러 선행연구의 결과들을 살펴보면, 구체물로부터 도형의 특성을 추상화하는 과정에서 도움을 주며, 더불어 도형의 성질 탐구를 위하여 효과적으로 이용할 수 있음을 시사하고 있다.[1] 특히, 임해경(2000)의 '초등수학을 위한

1) GSP를 활용한 기하학습에 대한 선행 연구들로는 박서규(1993), 강병욱(1999), 임해경(2000), 맹종만(2001) 등의 연구가 있다. 이들 연구의 주요 내용들은, 수학교과의 효과적인 지도를 위하여 탐구활동이 필요하다고 지

GSP 자료와 활용방안'에서는 초등기하학습에 활용할 수 있는 많은 자료들을 제시하고 있고, 더불어 영재교육 자료를 활용한 교육활동에서 학습자가 연구자가 예상하지 못했던 수학적 원리를 발견, 제시했다는 보고도 있었다.

그러나, 최근 초등수학 영재교육 관련 연구물들을 살펴 보면, 제7차 수학과 교육과정 상에서 다루어지는 내용을 넘어선 다양한 기하학적 문제들을 주제로 다루고 있음을 쉽게 알 수 있다. 이는 현재 도형영역과 연관되어 이루어지는 다양한 영재교육들의 학습 내용이 교육과정 상의 내용을 넘어서고 있는 실정으로 판단되므로, 학교 현장에서 기하학습에 대한 추상화나 사고 수준에 관한 문제점을 해결하지 않고 영재교육에 임하는 학습자는 영재교육을 통하여 적절한 향상을 거둘 것이라고 기대하기는 힘들 것으로 사료된다.

따라서, 본 연구에서는 van Hieles의 기하학 사고 수준에 따라, GSP를 활용하여 초등기하 영재교육에 활용할 수 있는 프로그램을 구안하여, 구안된 프로그램을 제주대학교 부설 과학영재교육원 초등수학반 학생들에게 적용하여 그 효과를 검증해봄으로써, GSP를 이용한 초등수학 영재교육 프로그램의 개발과 활용 가능성을 연구하는데 그 목적이 있다.

2. 연구의 내용

본 연구는 다음과 같은 내용에 초점을 맞추었다.

가. 다양한 문헌 탐색을 통하여, van Hieles의 기하학 사고 수준에 따라, 초등기하학습에서 GSP를 활용한 영재교육 자료 및 프로그램 개발의 준거를 설정한다.

나. 설정된 개발 준거에 따라 GSP를 활용한 영재교육 프로그램을 개발한다.

다. 개발된 프로그램을 과학 영재교육원 초등수학반 학생에게 투입, 분석하여 프로그램의 활용방안을 제시한다.

II. 이론적 배경

1. van Hieles의 기하학 사고 수준 이론

van Hieles는 네덜란드의 부부교사로, 학습자들이 겪는 도형 학습의 어려움을 해결하기 위한 다양한 연구를 실시하던 중, 교사와 학습자는 서로 다른 사고 수준에서 생각하고 말하게 되어 서로를 잘 이해할 수 없다는 점을 관찰하고, 이에 대한 연구를 진행하여 기하학 인지발달 과정의 van Hieles 이론을 전개했다.

적하고 있으며, 도형 학습에서 컴퓨터 소프트웨어를 활용하면 도형의 속성을 관찰할 수 있으므로 도형학습의 어려움을 완화시켜준다고 하고 있다.

가. van Hieles 이론의 기하학 사고 수준

van Hieles는 Piaget의 기하학 발달 단계의 입장을 수용하면서도, '학습'에 더욱 초점을 두어, 학습에 의해 발달 단계를 다음 수준으로 이동시킬 수 있다고 주장하였다. 더불어 수학적 사고 활동이란 경험의 세계를 조직하는 활동이며, 한 수준에서 경험을 정리하는 수단이 새롭게 경험의 대상으로 인식되어 그것을 조직화하는 활동이 이루어지게 되면서 그 다음 수준으로의 도약을 하게 되는 과정을 반복한다고 하였다.(우정호, 1986)

van Hieles 이론의 기하학 사고 수준을 간략히 정리, 표로 제시하면 다음과 같다.[2)]

<표 1> van Hieles의 기하학 사고 수준[3)]

수 준	특 징 및 판 별 규 준		7차교육과정 관련 단원명 (학년-단계-단원명)
제1수준 시각적 인식수준 (Recognition)	특징	• 도형을 시각적 외관에 의해 구분하나, • 도형의 성질이나 도형 사이의 관계는 인식 불가능 • 도형을 '~ 모양'으로 인식하고 따라 그리기가 가능 • 시각적 대상들은 그 특징이나 성질과 관련되기 시작함.	▸1-가-3.여러가지모양 ▸1-나-2.여러가지모양 ▸2-가-3.도형과 도형움직이기
	판별 규준	• 도형들과 다른 기하학적 도형들을 겉모양에 따라 확인하고 조작한다. ▸눈에 보이는 대로 모양에 따라 도형을 인식한다. ▸여러 가지 도형 그림에서 올바른 도형을 찾는다. ▸주어진 도형을 복사할 수 있다. ▸자신 스스로의 용어를 사용하여 정의한다. ▸구성 성분으로 도형을 인식하지 못하고 도형의 부분을 하나로 인식한다. ▸도형의 일반성이나 관계를 파악하지 못한다.	

2) van Hieles는 초기 논문에서 수준(Level)을 0~4수준으로 5단계 구분을 하였으나, van Hiele(1986)에서는 1~5수준으로 구분하고 있는데, 위에 제시한 <표 1>은 1986년의 구분에 따른 것이다. 한편, Usiskin(1982)은 제0수준에도 미치지 못하는 아동이 있음을 주목하고, 이를 0수준으로 수정하여 전부 6단계(0~5수준)로 재분류하여 사용하였다.

3) 표의 판별 규준은 Crowley(1987)에 의한 내용을 요약한 것이며, 이를 기준으로 양규모(2002)가 7차교육과정 관련단원을 분석한 결과를 제시한 것으로, 그는 7차 교육과정의 기하 단원에 대하여 van Hieles의 이론에 따라 학습 주제별로 그 수준을 정리하여 보면, 총 97개의 주제 중 제1수준에 해당하는 주제가 11개(11.34%), 2수준에 해당하는 주제가 43개(44.33%), 3수준에 해당하는 주제가 43개(44.33%)로 2, 3수준에 해당하는 주제가 1수준에 비해 훨씬 많았다고 분석, 보고하였다. 그리고 김복자(2000)는 이와 관련하여 1, 2, 3수준을 고려한 교수-학습 지도안의 예를 제시하고 있다.

<table>
<tr><th>수 준</th><th colspan="2">특 징 및 판 별 규 준</th><th>7차교육과정
관련 단원명
(학년-단계-단원명)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">제2수준
기술적 분석적
수준
(Analysis)</td><td>특징</td><td>• 관찰과 실험을 통하여 도형의 구성 요소들 사이의 관계를 분별하기 시작함.
• 도형의 구성요소와 기본 성질에 대한 초보적인 분석만 하는 수준 (예> '평행사변형에서 마주보고 있는 두 변의 길이는 같다.')
• 예측과 조작적 검증을 통하여 인식할 수 있는 단계</td><td rowspan="2">▸2-가-3.도형과 도형움직이기
▸2-나-3.쌓기나무 놀이
▸3-가-3.평면도형
▸3-나-3.도형
▸4-가-4.삼각형
▸4-나-4.수직과평행
▸4-나-5.사각형과 도형만들기</td></tr>
<tr><td>판별 규준</td><td>• 도형의 구성요소들과 구성요소들 사이의 관계에 의해 도형을 분석하고 도형의 성질을 확실히 알고 문제를 풀기 위해 성질을 사용한다.
▸도형의 성질을 구분하나, 그 성질들이 어떻게 관련되어 있는지 설명하지 못한다.
▸관찰을 통하여 도형을 분류할 수 있고 일반화를 만들 수 있지만, 명확한 수학적 정의를 내리지는 못하고 형식적 정의를 사용하지 못한다.
▸구성성분 사이의 관계, 성질을 가지고 하나의 모양을 다른 모양과 구별한다.
▸포함관계는 생각하지 못한다.
▸구성 요소들과 관계들에 대한 적합한 어휘를 사용하고, 언어적, 기호적 문장을 해석하고 적용한다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">제3수준
비형식적
연역적 수준
(Ordering)</td><td colspan="2">• 도형에 존재하는 성질과 그들과의 관계와 도형들 사이의 관계 인식
• 즉, 도형의 성질에 의하여 도형을 분류하는 논리적 배열 가능
• 도형의 포함관계와 수학적 정의 이해 가능
• 간단한 형식적 증명 가능
• 경험적이고 실험적인 방법으로 추론을 이해하지만, 공리나 정리들의 의미를 이해하지 못하는 단계</td><td rowspan="2">▸3-나-3.도형(공간감각)
▸5-가-2.무늬만들기
▸5-가-4.직육면체
▸5-나-3.도형의 합동
▸6-가-2.각기둥과 각뿔
▸6-나-2.입체도형</td></tr>
<tr><td>판별 규준</td><td>• 학생은 정의를 형성하고 사용하며, 전에 발견된 성질에 순서를 주는 비형식적, 연역적 논증을 제시한다.
▸명백하게 정의를 규명하고 정의를 형식화한다.
▸정의를 다른 식으로 표현하는 것에 대해 이해한다.
▸정의를 이용하여 도형을 파악하고 이해, 분류할 수 있다.
▸도형의 성질을 추론할 수 있고, 그 사이의 관계를 파악할 수 있다.
▸도형의 성질을 이용하여 도형의 포함관계를 이해하고 배열한다.
▸간단한 형식적 증명은 가능하나, 가정에서 결론으로 이끌어 가는 논리적인 순서를 파악하지 못한다.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>수 준</th><th colspan="2">특 징 및 판 별 규 준</th><th>7차교육과정
관련 단원명
(학년-단계-단원명)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">제4수준
형식적 연역적 수준
(Deduction)</td><td colspan="2">• 공리론적 조직 속에서 기하의 정리들을 세우는 방법의 하나인 추론 이해 가능
• 하나의 명제로부터 다른 명제를 연역을 위해 증명 구성 가능</td><td rowspan="2">▸중학생 이상의 수준</td></tr>
<tr><td>판별 규준</td><td>• 학생들은 공리체계와 정의와 관계 사이의 관계망을 형성한다.
▸증명과정을 창조할 수 있으며, 충분조건과 필요조건의 상관성을 인식한다.
▸기호를 사용하여 정리와 증명을 하며, 증명에서 정리의 가정 또는 결론을 구분하게 된다.
▸연역적 추론을 다양화하려는 시도를 하고 유클리드 기하의 공리를 내재적으로 받아들인다.
▸형식적, 연역적 논증을 하지만 공리 자체를 조사하지 않고 공리체계를 비교하지 않는다.</td></tr>
<tr><td>제5수준
엄밀, 수학적 수준
(Rigor)</td><td colspan="2">• 엄정한 논리로 구성되는 다양하고 추상적인 연역적 추론의 필요성 이해
• 비유클리드 기하학을 이해할 수 있는 단계
• 공리의 무모순성, 독립성, 완전성 등 공리 체계의 성질 이해
• 수학자들이 사용하는 절차에 충분히 익숙해지기 전에는 도달 불가능</td><td></td></tr>
</table>

이러한 van Hieles 모델의 특징을 요약하면 다음과 같다.(Clements & Battista, 1992)

첫째, 학습은 불연속적인 과정이다. 즉 학습 곡선에서는 점프(Jump)가 있는데 이것은 이산적이고 질적으로 서로 다른 사고 수준이 존재한다는 것을 의미한다.

둘째, 기하적 사고 수준은 순차적이고 위계적이다. 즉 기하적 사고 수준은 위계적으로 되어 있으며 한 수준에서의 이해가 이루어졌을 때 다음 수준으로 순차적으로 발달한다. 한 수준에서의 잠정적인 이해는 다음 수준에서 명확히 이해되며, 다음 수준의 사고 개발에 통합되고 확장된다.

셋째, 한 수준에서 다음 수준으로의 진보는 나이나 생물학적인 성장보다는 교육(instruction)에 더 의존한다. 적절한 활동을 통한 경험은 보다 높은 수준으로 진보하는 것을 가능케 한다.

넷째, 각 수준에는 그 자체의 언어를 가지고 있다. 즉 각 수준은 그 자체의 언어적 기호와 그 기호를 연결하는 관계망을 가지고 있기 때문에 학생들의 수준에 적절한 언어를 구상해야 활발한 사고 활동이 조장된다.

다섯째, 보다 높은 수준으로의 발달을 위해서 어떤 특정한 수준에 관련된 내용을 표현하는 활동을 조장하는 기회와 활동 속에서 표현된 아이디어를 토론하는 기회, 문제를 해결하는 기회, 회상하고 요약함으로써 아이디어를 통합하는 기회를 제공해야 한다.

여섯째, 발달에 대한 교수 수준과 학생의 수준이 균형을 이루지 못하면 학습은 일어나지 않는다. 학습자의 사고 수준보다 높은 수준의 내용, 자료, 어휘를 사용하는 교사는 실패와 갈등을 겪게 될 학생의 학습을 방해한다.

나. van Hieles의 기하학 사고 수준에 근거한 학습 단계(김현미, 1998)

van Hieles의 이론은 사고 수준의 진행에서 비약이란 없으며 단계적으로 일어난다고 주장했다. 학생은 한 수준에서 다음 수준으로 몇 단계를 거쳐 이행하게 되는데 이러한 이행은 자연스런 과정이 아니며, 교수학습 프로그램에 힘입어 일어난다. van Hieles 부부는 여러 학습 단계를 이용하여 각 수준 구조 안에서 교육적으로 계열화하기 위한 교수학적 수단을 개발했다. van Hieles와 Crowley에 의하면 교수 단계는 질의 안내 단계, 안내한 탐구 단계, 명료화 단계, 자유 탐구 단계, 통합 단계라는 연속적인 5단계 학습법을 제안했다.

<표 2> van Hieles의 수준에 근거한 학습 단계

단 계	주 요 활 동
1단계 질의 안내 단계 (Inquiry/Information)	• 선수학습 확인 • 학습 목표 확인 • 학습 방법 확인
2단계 안내된 탐구 단계 (Directed Orientation)	• 짧은 발문으로 제시된 자료를 통해 학습자 스스로 과제 수행 • 활동을 통하여 새로운 개념의 특징과 친숙하게 됨. • 교사는 학생의 행동을 적절한 탐구로 이끌어 내면서 활동 지시 • 제시 자료는 목표로 정해진 개념과 절차가 잘 드러나는 소재 선택
3단계 명료화 단계 (Explication)	• 2단계에서 경험하거나 관찰된 자기의 과정을 토론 • 학습자들은 적절한 언어를 사용하면서 자신의 의견을 개념화하고 제안 • 교사는 적절한 수학적 용어를 도입하는 역할 수행
4단계 자유 탐구 단계 (Free Orientation)	• 2단계보다, 문제해결적 생각을 갖는 보다 복잡한 과제에 도전 • 관계에 관한 깊은 조사 과정으로 들어간다. • 과제 완성후 학습자 스스로 자신의 연구과제를 정하여 관련성 탐색
5단계 통합 단계 (Integration)	• 학습 내용 복습, 정리하여 학습내용이 포함된 새로운 관계망 통합 • 교사는 학습자가 배운 내용에 대하여 전체적인 맥락을 완성하므로써 보조함. • 5단계 이행 후 다음 수준을 학습할 준비가 됨.

2. 탐구형 소프트웨어(GSP)의 효능

가. 수학교육의 새로운 동향 : 컴퓨터 활용 교육

수학교육의 세계적 동향을 살펴보면, 과학기술의 발달에 따라 사회 구조가 정보화 시대로 변모함에 따라 수학 학습에서도 컴퓨터의 활용을 강조하고 있는 추세이다. 즉, 미래 사회를 살아갈 시민 생활에 있어서 필수적인 수학교육은 그 내용적인 면에서뿐만 아니라 방법적인 면에서도 새로운 변화를 시도하려는 노력이 활발히 이루어지고 있다. 특히 MSEB(1990)는 정보화 사회에서 수학교육이 지향해야 할 방향을 다음과 같이 제시하고 있다.(MSEB, 1990, 맹종만, 2001, 재인용)

첫째, 정보화 시대에 적응하기 위해 대부분의 직업은 이제까지의 단순한 기계적인 기능보다는 분석적인 기능을 요구하고 있으며, 학생들의 수학적 능력의 신장을 더욱 강조하고 있다.

둘째, 과학기술 문명의 발달로 인하여 컴퓨터 등을 학습 도구로 활용하게 되면서 수학 내용과 학습하는 방법, 수학이 응용되는 분야에 있어서 변화가 있어야 한다.

셋째, 학습자가 학습하는 방법에 대한 이해의 변화, 즉 정보를 수동적으로 받아들이고, 쉽게 재생 가능한 부분들로 저장하는 과정이라는 과거의 입장에서 새로운 정보를 동화시키고 자신의 의미를 구성해 가는 구성주의적이고 활동적인 관점으로의 변화가 일어나야 한다.

또한 NCTM(2000)은 정보화 사회에서 요구되는 수학교육의 방향을 다음과 같이 제시하고 있다.

첫째, 일상생활과 직장생활을 영위하는데 그 동안 학교수학 교육에서 강조한 개념이나 기능 자체보다는 지식과 기능을 새로운 문제 상황에 적용하는 문제 해결력이 필요하다.

둘째, 세상의 의미를 이해하는 강력한 수단으로서 수학을 이해하고 접근하도록 하기 위해서는 수학적 활동의 기초가 되는 추론을 강조하여야 한다.

셋째, 학습자들이 문제풀이 전략을 이해하고 생성시키기 위한 도구로서 의사소통을 사용해야 한다.

넷째, 수학 내적 연결성은 물론 일상생활과 다른 과목과의 연결이 강조되어야 한다.

다섯째, 수학에 대한 이해력을 넓히기 위해 수학적 표상을 강조해야 한다.

나. GSP를 통한 평면기하 학습의 의의(맹종만, 2001)

첫째, 마우스 조작을 통해 도형의 모양이나 크기, 각도, 위치 등을 자유롭게 변형시킬 수 있기 때문에 능동적이고 자유로운 조작을 통하여 도형 사이의 기하학적인 관계를 유지하면서 도형을 탐구할 수 있는 기회를 갖도록 하고, 시각적으로 도형을 인지할 수 있도록 하며, 추론의 폭을 넓게 한다.

둘째, 평면도형의 성질을 정적인 상태의 인쇄 매체, 칠판에서의 강의 등을 통하여 지도할 때보다 더욱 확실하게 이해시킬 수 있다.

셋째, GSP는 일반적으로 그림을 그리는 프로그램과 달리 작도와 측정 기능을 통하여 학생들의 흥미를 자극할 수 있고, 실제 컴퓨터 조작을 통해 학습내용을 확인할 수 있어서 효과적이다.

넷째, GSP를 마치 실험도구처럼 사용하여 실제로 작도하고 측정하면서 그 성질에 대한 가설을 학습자 스스로 세울 수 있도록 도와주고 확인할 수 있다.

다섯째, 평면도형의 성질을 탐구하는 데 있어서도 평면도형의 성질이 학습자에게 충분히 이해된 다음 연역적인 증명이 필요한데 이 때에도 GSP는 정확한 그림을 제공하여 증명이나 문제풀이에 필요한 정보를 제공한다.

여섯째, 애니메이션 기능을 사용하여 평면도형의 성질을 연속적이면서 역동적으로 관찰할 수 있으며, 흔적 남기기 기능과 함께 사용하면 도형의 자취를 생생하게 보여줄 수 있어 학습자의 흥미와 호기심을 자극하여 다양한 도형에 대한 탐구활동을 할 수 있다.

일곱째, GSP는 사용자로 하여금 단순히 어떤 도형을 편리하게 그리도록 해 주는 도구뿐만 아니라 기본적인 도형의 경우에는 사용자가 그린 도형에 대한 좌표와 수식까지도 나타내어 준다.

여덟째, 도형의 변의 길이와 둘레, 각의 크기, 면적 등을 자동으로 측정할 수 있고, 계산 기능을 제공하기 때문에 복잡한 측도나 계산에서 벗어나 도형의 제 성질에 대한 탐구활동을 촉진시킬 수 있다.

Ⅲ. 프로그램의 개발

1. 프로그램의 개발 방향

첫째, 활동 중심의 학습 자료이어야 한다.

학습은 학습자가 무엇인가에 대한 체험을 통하여 이루어진다고 할 수 있다. 더욱이 영재아들 또한 구체물을 가지고 학습하는 활동으로 수업할 때 그 효과가 훨씬 크다. 따라서 학습자들이 흥미를 가지고 적극적으로 참여할 수 있도록 학습자료를 개발하여야 한다. 이를 위해 컴퓨터를 이용하여 도형을 직접 그려보고, 만들어보는 학습 방법은 학습자들의 관찰과 탐구 활동을 더욱 장려할 수 있어 효과적이라 하겠다.

둘째, 관찰과 탐구활동을 통하여 기하학의 연구방법을 학습하고 적용해보는 자료이어야 한다.

기하학 학습을 위한 일련의 과정은 기하학을 연구하는 방법과 절차에 따라 구성되어져야 한다. 이는 도형을 관찰하고 적절한 조작활동을 가하여 그 성질과 특징을 탐구하도록 하여야 한다는 것이다. 이러한 일련의 과정을 통하여 기하학의 연구방법을 체득토록 하는 것은 기하학습의 중요한 목표 중의 하나라고 할 수 있다. 연구방법의 학습은 새로운 기하학적 문제상황에서 그 해결을 위한 좋은 지침을 제공하여 줄 것이다. 더불어 도형을 관찰하고 그 성질과 특징을 탐구하는 활동은 영재아들에게 발견하는 수학의 즐거움을 맛보게 하여 수학 학습에 대한 흥미를 더욱 고조시킬 수 있다.

셋째, 기하학 사고 수준을 향상시키는 학습자료이어야 한다.

기하학습과 관련하여 영재아를 위해 투입된 자료 및 교육 프로그램은 영재아들의 기하학적 능력을 향상시켜야 한다는 것은 당연한 것이다. 이에 van Hieles의 이론에 기초하여, 수학 영재아를 위한 자료는 수학적 문제 상황에서 문제해결 과정을 효율적으로 수행할 수 있는 기하학 사고 수준 및 문제해결 능력을 신장시키는데 중심을 두어야 한다는 것이다.

2. 프로그램 개발의 준거

가. 프로그램은 초등 영재아들의 기하학 사고 수준을 향상시켜 초등 기학 학습의 문제점을 해결하는데 기여할 수 있도록 개발한다.

나. 영재아를 위한 프로그램이므로, 그 내용면에서 정규교육과정 내용에 비해 다소 복잡하고, 추상적인 개념이 포함되도록 한다.

다. van Hieles 이론에 입각하여 기하학 사고 수준 1수준부터 4수준까지 단계적으로 연결할 수 있도록 구성한다.

라. 그러나, 영재아를 대상으로 함을 고려하여 2, 3수준을 중심으로 구안하며, 이를 위하여 다음과 같은 자료들을 재구성하여 개발한다.

(1) 관찰과 실험을 통하여 도형의 구성요소들 사이의 관계에 관심을 갖도록 하는 자료

(2) 도형에 존재하는 성질과 그들과의 관계와 도형들 사이의 관계에 관심을 갖도록 하는 자료

(3) 실험적이고 경험적인 방법으로 추론을 이해하도록 하는 자료

(4) 형식적 증명을 고려하여 도형에 대한 다양한 성질, 정리들을 증명 또는 그 과정을 예측토록 하는 자료

(5) 이러한 자료들은 van Hieles의 수준에 근거한 학습 단계를 고려하여 통합할 수 있는 자료

마. 프로그램의 투여시 그 내용을 재구성할 수 있도록 주제중심의 프로그램을 구안한다.

바. 관찰과 실험, 탐구, 토론 활동이 중심되도록 구안한다.

3. 프로그램의 구안

프로그램 개발의 준거에 따라 프로그램을 다음의 표와 같이 전체 6개의 주제로 구성하였다.

<표 3> 구안한 영재교육 자료 구성표

<table>
<tr><th>주 제 명</th><th colspan="2">주요 활동 목표 및 포함 자료</th><th>비 고</th></tr>
<tr><td rowspan="2">제1주제 :
기하학과 작도
(3시간)</td><td colspan="2">• 기하학의 기본개념과 유클리드 기하학을 이해할 수 있다.
• 유클리드 도구를 이용하여 다양한 도형을 정확히 작도할 수 있다.</td><td rowspan="2">-강의, 실습, 토론 중심 활동
-2수준 중심 자료구성</td></tr>
<tr><td>자 료</td><td>• 평행선과 수직선 그리기
• 삼각형 그리기(이등변삼각형, 정삼각형, 직각삼각형)
• 사각형 그리기(평행사변형, 사다리꼴, 마름모, 정사각형)
• 정12각형 그리기
• 정 5각형 그리기</td></tr>
<tr><td rowspan="2">제2주제 :
다양한 작도와 GSP
(3시간)</td><td colspan="2">• 유클리드 도구를 이용한 작도와 GSP의 관계를 이해할 수 있다.
• GSP를 이용하여 다양한 평면도형 작도할 때, 도형 구성요소들 사이의 관계가 유지되도록 작도할 수 있다.
• 도형의 구성요소에 주목하는 태도를 갖을 수 있다.</td><td rowspan="2">-강의, 실습, 토론 중심 활동

-2수준 중심 자료구성</td></tr>
<tr><td>자 료</td><td>• 평행선과 수직선 그리기
• 삼각형 그리기(이등변삼각형, 정삼각형, 직각삼각형)
• 사각형 그리기
(평행사변형, 사다리꼴, 마름모, 직사각형, 정사각형)
• 정8각형, 정12각형 그리기
• 정 5각형 그리기</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>주제명</th><th colspan="2">주요 활동 목표 및 포함 자료</th><th>비 고</th></tr>
<tr><td rowspan="2">제3주제 :
GSP를 이용한
평면도형의 성질
탐구
(3시간)</td><td colspan="2">• 안내된 방법에 따라 GSP를 이용하여 다양한 평면도형 작도할 수 있다.
• 작도한 평면도형을 관찰, 실험, 탐구, 토론하여, 그 도형의 성질을 탐색, 발견할 수 있다.
• 도형의 구성요소 사이의 관계가 유지됨은 그 도형의 성질과 관계있음을 이해할 수 있다.</td><td rowspan="2">-실습, 토론 중심 활동

-3수준 중심 자료구성</td></tr>
<tr><td>자 료</td><td>• 이등변삼각형 • 정삼각형
• 사각형 • 평행사변형 • 사다리꼴
• 직사각형 • 정사각형 • 마름모</td></tr>
<tr><td rowspan="2">제4주제 :
GSP를 활용한
기하학적 정리
증명하기
(6시간)</td><td colspan="2">• GSP를 이용하여 기하학적 정리들을 증명할 수 있도록 도형을 작도할 수 있다.
• 작도한 평면도형을 관찰, 실험, 탐구, 토론하여, 그 도형과 관련된 정리들을 증명할 수 있다.</td><td rowspan="2">-실습, 토론 중심 활동

-3수준 중심 자료구성</td></tr>
<tr><td>자 료</td><td>• 평행선과 관련된 성질 증명하기
• 삼각형과 관련된 성질 증명하기
• 사각형과 관련된 성질 증명하기
• 원과 관련된 성질 증명하기
• 자신이 조사해온 여러 가지 정리 증명하기</td></tr>
<tr><td rowspan="2">제5주제 :
GSP와 바닥깔기
(6시간)</td><td colspan="2">• GSP를 이용하여 도형의 변환을 이해할 수 있다.
• GSP를 이용하여 바닥깔기의 원리를 이해하고, 이를 그릴 수 있다.
• GSP를 이용하여 자신만의 창의적인 바닥깔기 작품을 그릴 수 있다.</td><td rowspan="2">-실습, 토론 중심 활동

-4수준 중심 자료구성</td></tr>
<tr><td>자 료</td><td>• 삼각형의 바닥깔기 • 사각형의 바닥깔기
• 정다각형 두 개 이상을 이용한 바닥깔기
• 평행이동을 이용한 바닥깔기 • 회전이동을 이용한 바닥깔기
• 선대칭 이동을 이용한 바닥깔기
• 자기만의 바닥깔기 작품 만들기</td></tr>
<tr><td rowspan="2">제6주제 :
GSP를 이용한 도형
문제 해결하기
(3시간)</td><td colspan="2">• GSP를 이용하여 문제해결형 도형문제 해결 방안을 찾아 해결할 수 있다.</td><td rowspan="2">-실습, 토론 중심 활동
-4수준 중심 자료구성</td></tr>
<tr><td>자 료</td><td>• 자신이 조사한 다양한 도형 문제 해결하기</td></tr>
</table>

Ⅳ. 개발된 프로그램의 투입 결과 및 활용 방안

1. 개발된 프로그램에 대한 투입

가. 연구의 대상

본 프로그램의 활용 대상은 현재 제주대학교 부설 과학영재교육원 초등영재교육부 초등수학분야

에서 교육을 받고 있는 학습자들 중 2년차에 해당하는 심화과정 학습자 14명을 기준으로 하였다. 이들은 제주도내 거주하는 5, 6학년 아동들로서, 1년차 기초과정 중 GSP의 사용법을 이미 익힌 경험이 있다.[4] 이들을 대상으로 프로그램을 투입, 그 결과를 분석하였다.

나. 연구 대상에 대한 기하학적 능력 점검

(1) 분석 검사도구

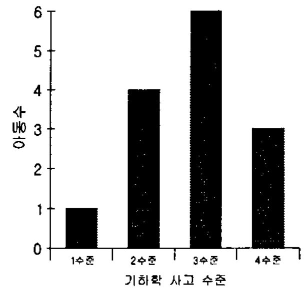
초등기하학습을 목적으로 하는 영재교육에 있어서 처음 시작은 영재아의 기하학적 능력의 진단과 이해이다. 그리고 앞에서 살펴본 van Hieles의 기하학 사고 수준 이론은 좋은 지표를 마련하여 준다. 본 연구에서 사용한 검사도구는 van Hieles's Level Test로, Chicago Project에서 Usiskin이 개발한 5지 선다형 20문항을 번역한 김선열, 김현미, 박지혜 등의 검사지를 참고로 초등학생 수준의 언어로 수정한 양규모(2002)의 검사지 및 채점방법을 기준으로 실시하였다.

(2) 기하학적 능력 점검 결과

영재 아동 14명을 대상으로 기하학 사고 수준 사전검사를 실시한 결과, 다음과 같은 결과를 얻었다.

<표 4> 기하학 사고 수준 사전검사 결과표

사고수준	아동수	퍼센트(%)
1수준	1	7.1
2수준	4	28.6
3수준	6	42.9
4수준	3	21.4
계	14	100.0



이를 통하여 볼 때, 대상 아동 14명 중 10명(71.5%)이 van Hieles의 기하학 수준 중 2, 3수준에 해당되어 있음을 알 수 있다. 또한 van Hieles의 이론에 따라 하위수준을 통과하지 않고 차상위수준에 도달할 수 없다는 순서적 발달의 관점에서 볼 때, 불균형적으로 차상위수준의 발달을 보인 아동은 없었다. 이러한 점들과 더불어 이들이 초등 5, 6학년 아동임을 고려할 때, 정상적인 교육과정을 이행하고 있다면 2, 3수준의 기하학적 능력을 갖는 것이 적절하므로, 이들은 정상적인 발달을 이루고 있다고 볼 수 있다.

따라서, 개발된 프로그램이 이들에게 투입하여 그에 따른 변화된 기하학 사고 수준을 점검하여 본다면, 개발된 프로그램이 본 연구의 목적에 부합한지를 검증하여 볼 수 있을 것이다.

---

4) 손인수 외(1999) 등 GSP와 관련된 다양한 문헌을 이용하여 사용방법을 익혔다.

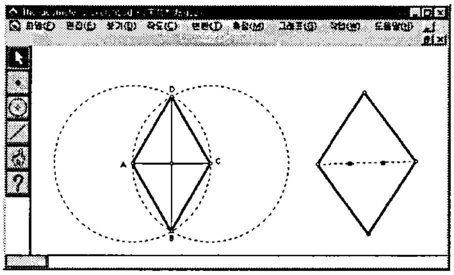
다. 구안한 프로그램의 투입 및 반응의 예

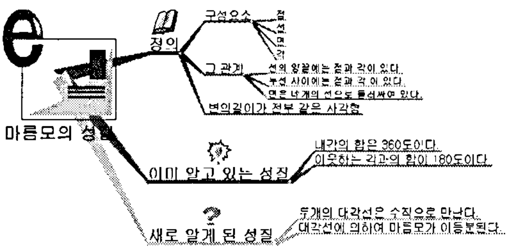
구안한 프로그램은 van Hieles의 기하학 사고 수준 이론에 입각하여 구안되었다. 따라서 이의 활용에 있어서 무엇보다도 먼저 고려되어야 할 것은 학습 단계이다. 즉, 앞에 제시한 van Hieles의 학습 단계를 고려한 활동이 이루어져야 할 것이며, 특히 학습 단계상 2, 3, 4단계의 과정에서 학습자들이 많은 관찰과 탐구, 토론 활동이 이루어져야 할 것이다.

이에 준하여 6개의 주제로 구안한 프로그램을 총 24시간에 걸쳐 연구대상에게 투입하였다. 이에 따라, 투입된 프로그램에 대하여 연구 대상의 반응 사례를 살펴보고, 이를 통하여 자료의 활용 방안에 대하여 논의하고자 한다.

(1) '제3주제 : GSP를 이용한 평면도형의 성질 탐구' 활동 중

다음의 그림은 '마름모 작도하고, 그 성질 탐구하기'와 관련하여, 학습자가 자신의 의도에 맞추어 GSP를 이용하여 마름모를 다양하게 작도하고, 이의 탐색을 통하여 마름모의 성질을 발견하여 마인드 맵으로 정리한 결과물이다.





이는 교사가 지시문만을 제시하여 학습자로 하여금 다양한 방법으로 마름모를 작도하고 '끌기'의 반복을 통하여 마름모의 구성요소와 그 사이의 관계들 중에서 변하는 것과 변하지 않는 것을 관찰하고, 이들 중 변하지 않는 것들에 관심을 갖고 탐구하도록 하여, 이를 자유롭게 토론, 정리한 결과이다. 마인드 맵의 내용을 보면, 자신이 이미 알고 있는 성질들과 새롭게 알게 된 성질들을 구분하여 정리함으로써, 학습자의 탐구 결과를 재확인할 수 있다.

(2) '제5주제 : GSP와 바닥깔기' 활동 중

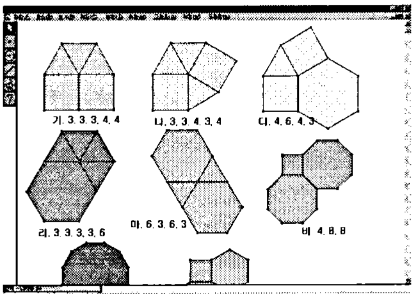
제5주제는 GSP를 통하여 다양한 바닥깔기를 하는 중, 이를 기하학적 개념 및 정리들을 통하여 그 원리를 탐색하고, 실제 작도하여 보도록 하는 내용을 중심으로 구성되어 있다.

다음의 자료는, 일반적인 삼각형과 사각형을 이용한 바닥깔기를 통하여 그 개념과 원리를 학습한 후, 정다각형 두 개 이상을 이용한 바닥깔기가 가능한지를 확인하고 그 예를 찾도록 하는 자료이다. 이를 제시한 이유는, van Hieles의 학습 단계에 따라, 앞의 학습에 대하여 복잡한 과제를 제시하고 자유탐구 과정에서 문제를 해결하도록 유도하기 위해 제시된 것이다.

정다각형 두 개 이상을 이용하여 바닥깔기가 가능할까? 가능한 연결형태는 어떤 것이며, 그 연결모양은 어떤 형태가 될까? 다음의 표를 참고하여 그 연결상태를 GSP로 작성하여라.

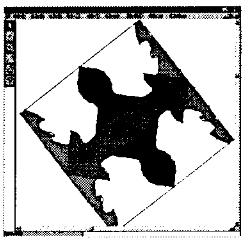
구분	정삼각형	정사각형	정육각형	정팔각형	정십이각형	꼭지점에서의 배열방법
가						
나						
다						
라						
마						
바						
사						
아						

이에 학습자들은 각자가 찾아낸 해법을 토론과 확인절차를 통하여 다음과 같이 정리하여 활동의 결과를 제시하였다.



다음의 예는, 바닥깔기를 이용하여 에셔가 만든 작품을 통하여 무늬의 수학적 변환이 회화적 반복의 미를 만들어내는 작품을 제시한 것으로, 이에 따라 에셔의 작품과 같은 수학적 변환 패턴을 찾고 그 방법을 모방하여 자신만의 창의적인 바닥깔기 작품을 GSP를 이용하여 창작하여 보도록 유도하는 자료이다. 이는 단순히 작품을 만들기보다는 이와 얽혀있는 다양한 수학적 개념 및 원리들을 적용하여 작품을 만들어 보도록 하고, 그 속에서 수학적 아름다움과 회화적 아름다움을 학습자들이 체험하도록 하기 위하여 구안된 자료이다. 이에 대하여 학습자들은 짧은 시간 동안에 간단하게나마 오른쪽과 같은 작품들을 만들어 내었다.

다음 그림은 에셔의 작품에서 발췌한 것이다. 어떤 방법을 통하여 만들어졌을지 생각하여 보자. 그리고 자기만의 바닥깔기 작품을 만들어보자.



(3) '제6주제 : GSP를 이용한 도형 문제 해결하기' 활동 중

제6주제는 도형문제를 GSP를 이용하여 해결해 보고, 이를 바탕으로 더욱 더 난이도가 높은 도형 문제를 제시하고, 이를 GSP를 통하여 작도, 그 도형을 관찰, 탐구하도록 하여 문제 해결의 단서를 찾고, 이를 통하여 문제 해결의 경험을 제공함으로써, GSP의 활용도를 높이기 위한 목적으로 구안하였다.

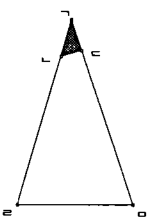
[초등수학올림피아드 최상급 27번 문제] 발췌

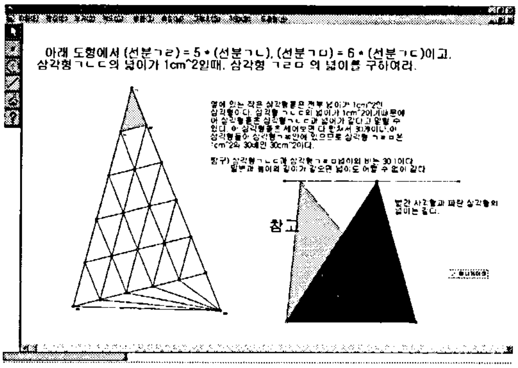
"다음 도형에서 (선분ㄱㄹ) = 5 × (선분ㄱㄴ),

(선분ㄱㅁ) = 6 × (선분ㄱㄷ)이고,

삼각형ㄱㄴㄷ의 넓이가 1㎠ 일 때,

삼각형ㄱㄹㅁ의 넓이를 구하여라.





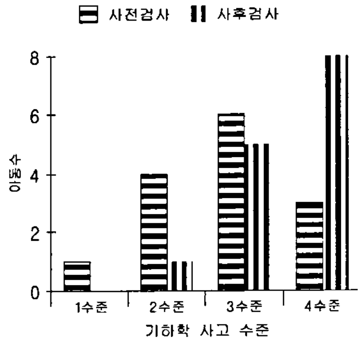
이는 문제해결형 도형문제를 GSP를 이용하여 해결하도록 하는 자료로, GSP를 이용하여 문제해결형 도형 문제의 해결 단서를 찾아 그 해결방안을 모색하고, 그 계획에 따라 자신의 해결 방안을 GSP를 이용하여 즉각적으로 확인해보도록 하는 경험을 제공해 준다. 이에 대하여 한 학습자는 관찰과 탐색의 과정을 거쳐, 위 오른쪽의 GSP 그림을 작도하고 문제를 해결하였다.

라. 프로그램의 투입 후, 학습자의 기하학 사고 수준 향상 정도 분석

구안, 투입된 프로그램의 목표들 중 하나는 GSP를 활용한 학습을 통하여 학습자들의 기하학 사고 수준 향상에 있다. 따라서 van Hieles의 이론에 입각한 기하학 사고 수준 향상도를 측정하고 이를 분석해보는 것은 중요한 의미를 갖는다. 이에 영재교육 프로그램 종료한 후, 기하학 사고 수준의 향상도를 측정하기 위하여 사전검사로 활용하였던 van Hieles's Level Test를 다시 사후검사로 실시하여, 그 향상도를 분석하였다. 그 분석한 결과는 다음 표와 같다.

<표 5> 기하학 사고 수준 사전·사후검사 결과표

사고수준	사전검사		사후검사	
	아동수	퍼센트(%)	아동수	퍼센트(%)
1수준	1	7.1	0	0
2수준	4	28.6	1	7.2
3수준	6	42.9	5	35.7
4수준	3	21.4	8	57.1
계	14	100.0	14	100.0



검사구분 \ 학습자	1번	2번	3번	4번	5번	6번	7번	8번	9번	10번	11번	12번	13번	14번
사전검사	2	4	3	3	2	3	4	4	3	3	2	3	1	2
사후검사	4	4	3	4	4	3	4	4	4	3	2	3	3	4
향상도	2	0	0	1	2	0	0	0	1	0	0	0	2	2

위 결과를 통하여 볼 때, 사전검사에 비하여 사후검사에서 학습자들의 기하학 사고 수준이 많이 향상되었음을 알 수 있다. 특히, 사후검사에서는 4수준에 해당하는 학습자들이 증가되었음을 알 수 있다. 세부적으로 보면, 수준향상 정도가 2단계인 경우는 4명, 1단계인 경우는 2명으로 전체적으로 6명의 학습자가 수준 향상을 보였고, 사전·사후검사 모두 4수준인 학습자 3명을 제외하면, 수준 향상을 보이지 않은 학습자는 5명이었다.

마. 프로그램의 효과성에 대한 사전·사후검사의 유의미한 차이 분석

프로그램의 효과성에 대한 유의미한 차이를 검증하기 위하여 기하학 사고 수준에 대한 T-검정을 실시하였다. 그 결과, 다음과 같은 결과가 도출되었다.

<표 6> 프로그램의 효과성에 대한 T-검정 결과표

구분	N	M	SD	df	t	p
사전검사	14	2.79	0.89	26	-2.42	0.023
사후검사	14	3.50	0.65			

위 표의 내용을 볼 때, 사후검사의 평균이 사전검사 때와 달리 0.71 수준이 높게 나타났고, T-검정에서 유의수준 α=0.05에서 p=0.023<0.05이므로 통계적으로 유의미한 차이를 나타내고 있다.

따라서, 이 결과는 구안된 프로그램이 본 연구의 목적인 영재아들의 기하학 사고 수준 향상에 기여하는 프로그램이라고 결론지을 수 있다. 그러나, 프로그램을 수행하고도 수준 향상을 보이지 않은 학습자가 5명이 있었다는 점을 고려할 때, 앞으로 좀 더 수정·보완할 필요성이 있을 것으로 사료된다.

2. 활용 방안

가. 교수-학습 과정상 활용 방안

본 연구에서는 van Hieles의 이론에 입각하여 GSP를 활용한 탐구, 토론 활동 중심의 프로그램으로 구안하여 적용하여 보았다. 따라서 본 프로그램의 활동을 위해서는 van Hieles의 학습 단계를 고려한 교수-학습 과정과 GSP의 막강한 동적인 기능을 적극적으로 활용하여, 다음과 같은 단계에 따라 교수-학습 활동이 이루어지도록 활용하여야 할 것이다.

(1) 1단계 : GSP를 활용하여 정의에 맞는 도형을 작도한다.

(2) 2단계 : GSP로 작도한 도형의 한 구성요소를 '끌기'를 통하여 움직여 보도록 한다. 이 때 구성요소 및 그들 사이의 관계들 중에서 변하는 것과 변하지 않는 것을 관찰, 탐구하여 구분하도록 한다.

(3) 3단계 : 위 단계의 결과로 구성요소 및 그들 사이의 관계들 중 변하지 않는 것에 관심을 갖도록 하고, 토론을 통하여 도형의 성질을 추론하도록 한다. 이 때, GSP의 동적인 기능을 이용하여 이를 검증하도록 유도한다.

(4) 4단계 : 검증한 내용을 목록으로 정리한다.

이 과정에서, 교사는 적절한 문제 제시와 발문을 통하여 학습자들의 관찰과 실험 활동을 장려하고 탐구활동을 통한 결과를 토론할 수 있도록 안내하는 것이 무엇보다도 중요하다.

나. 타 영재교육 기관에서의 활용 방안

본 연구를 통하여 개발된 프로그램은, 몇 가지 유의점을 고려하여 다양한 방법으로 재구성, 다양한 영재교육 활동에 투여할 수 있을 것이다. 즉, 자료를 세분화하여 재배열, 재구성함으로써 다양한 장면에서 자료를 활용할 수 있을 것이다. 단, 이러한 재구성의 과정에서는 무엇보다도 '개발된 프로그램이 어떤 학습자를 위한 자료인가?', 그리고 '개발된 프로그램의 투입을 통하여 학습자들에게 어떤 효과를 얻고자 하는가?'라는 점을 고려하여야 할 것이다.

이는 기하학과 관련된 영재교육 대상자들에 대한 이해와 연계하여 고려해보아야 할 점이다. 즉, 자료와 프로그램을 재구성하기 이전에 대상 영재아들의 기하학 사고 수준이 어떠한가에 대하여 가늠해 보고, 그들의 선수 학습 정도와 그 능력을 진단해 보아야 한다는 것이다.

더불어 교육 후의 효과에 대한 고려는 교육의 모든 활동에 있어서 가장 중요한 의미를 갖으며 기본적인 고려사항이 된다. 즉, 자료와 프로그램을 재구성하는 교사는 'GSP를 학습에 활용하여 어떤 목표를 달성할 것인가?'에 관련된 질문에 나름대로의 해답을 정하고 재구성하여야 한다는 것이다.

V. 결론 및 제언

구체물을 도형으로 추상화하는 어려움은 초등기하 학습에서 이미 오래 전부터 제기되어온 문제점이다. 이 문제의 해결을 위하여 다양한 방안들이 연구되어왔고 지금도 그에 대한 많은 연구들이 진행중에 있다. 이에 본 연구는 van Hieles의 이론을 바탕으로 하여 초등기하학습에서 GSP를 활용한 영재교육 자료를 개발하여 활용가능성을 검증하고, 그 활용 방안을 모색해 봄으로써 이러한 기하 학습의 문제점을 해소하고자 하는데 목적이 있다.

이에 따라 본 연구에서는 기하학습에서의 GSP를 활용한 영재교육 프로그램을 구안하여, 초등수학 영재아들에게 실제로 투입한 결과를 분석함으로써 프로그램의 개발 및 활용 방안을 제시하였다. 본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 다양한 문헌 탐색을 통하여, van Hieles의 기하학 사고 수준과 학습 단계를 고려하여 GSP를 활용한 영재교육 프로그램을 6개의 주제로 개발하였다.

둘째, 프로그램을 투입하기 전에, van Hieles's Level Test를 통하여 수학영재아들의 기하학 사고 수준이 2, 3수준임을 확인하여, 이들에게 프로그램을 투입하였다.

셋째, 프로그램의 투입 과정에서 van Hieles의 학습 단계에 준하여 교수-학습 활동을 전개하였고, 관찰 및 탐구, 토론활동을 중심으로 프로그램을 진행하였다.

넷째, 이러한 과정을 통하여 투입한 프로그램이 수학 영재아들의 기하학 사고 수준 향상에 전반적으로 기여하고 있음을 검증한 후, 개발된 프로그램의 활용 방안을 제시하였다.

본 연구를 통하여, 탐구형 소프트웨어인 GSP를 활용하여 추상적인 도형 개념을 시각화하고, 이에 적절한 조작활동을 통하여 그 도형의 다양한 성질들을 관찰·탐구할 수 있도록, van Hieles의 기하학 사고 수준 이론에 따른 프로그램을 구안하여 적용시킴으로써, 초등기하 영재교육에서 GSP를 이용한 프로그램의 개발과 활용 가능성을 확인해 볼 수 있었다. 더 나아가, van Hieles의 기하학 사고 수준을 고려한 입체기하 학습용 프로그램을 개발·적용하게된다면, 영재교육 학습자들의 기하학적 사고 능력을 크게 향상시킬 수 있을 것으로 예측된다. 따라서 후속 연구에 있어서는 탐구형 소프트웨어를 이용한 평면기하용 프로그램뿐만 아니라, 입체기하 영역의 영재교육 자료 및 프로그램의 개발과 그 활용에 대한 계속적인 연구가 있어야 할 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

강병욱 (1999). 컴퓨터 소프트웨어 활용이 도형 학습에 미치는 영향, 제주대학교 석사학위 논문.

김복자 (2000). 사고 수준을 고려한 도형영역의 교수-학습 효과 분석, 부산교육대학교 석사학위 논문.

김현미 (1998). 반 힐레 이론에 근거한 초등학교 도형지도, 인천교육대학교 석사학위 논문.

맹종만 (2001). 탐구형 기하 S/W 활용을 통한 도형 개념 형성 및 성질 탐구에 관한 연구, 대구교육대학교 석사학위 논문.

박서규 (1993). 탐구학습 활용을 통한 효과적인 수학 지도법에 대한 연구, 한국교원대학교 석사학위 논문.

손인수·송영준·조성윤·김세식 (1999). 예제로 배우는 한글 GSP, 서울 : 수학사랑.

양규모 (2002). van Hieles 이론에 근거한 도형학습 수준 분석과 자료 개발에 관한 연구, 부산교육대학교 석사학위 논문.

우정호 (1986). van Hieles 수학학습 수준이론에 대한 소고, 서울대학교 사대 논총 **33**.

임해경 (2000), 초등수학을 위한 GSP 자료와 활용방안, 한국교원대학교 부설 교과교육공동연구소.

Clements, D.H & Battista, M.T (1992). Geometry and Spatial Reasoning. *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learing*, New York: Macmillan Publishing Company.

Crowley, M. L. (1987). *The van Hieles Model of the development of geometry Thought*, NCTM, Learning and Teaching Geometry K-12.

MSEB (1990). *Perspectives on School Mathematics ; Reshaping School Mathematics, A Philosophy and Framework for Curriculum, Mathematical Sciences Education Board*; National Research Council, Washington D.C.: National Academy Press.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, VA : The National Council of Teachers Mathematics, Inc.

Usiskin (1982). *van Hieles levels and achievement in Secondary School Geometry* : final Report od CDASSG. University of Chicago.

van Hiele, Pierre Marrie (1986). *Structure and Insight : A Theory of Mathematics Education*, London, Academic, Inc.

- 부 록 - van Hieles's Level Test 검사지 및 채점방법

1. van Hieles's Level Test 검사지 (순서대로 1쪽~6쪽)

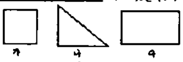
Van Hieles의 기하학적 사고 수준 검사지를 통한 검사는, 학생들의 기하학적 개념의 특징 사고의 수준을 검사할 수 있는 검사입니다.
이번 검사의 목적은 유명한 학자의 이론을 근거로 한 기하학적 사고 수준을 검사함으로써, 앞으로의 기하학적 학습에 어떠한 도움을 주어야 할 것인지를 알아보기 위한 것입니다. 여러 학생의 정확한 답을 얻어내기 위해, 그러니 여러분은 평소 알고있는 대로(이해한 대로) 정직하게 임해야 합니다.

Van Hieles의 기하학 수준 검사지

( )초등학교 ( )학년 이름 ( )

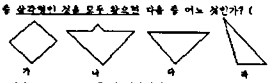
※ 다음 물음을 잘 읽고 알맞은 번호를 ( )에 쓰세요.

1. 아래 그림 중 정사각형인 것을 모두 찾으면 어느 것인가? ( )



① 가 하나뿐이다. ② 나 하나뿐이다.
③ 다 하나뿐이다. ④ 가와 다이다.
⑤ 가, 나, 다 모두이다.

2. 아래 그림 중 삼각형인 것을 모두 찾으면 다음 중 어느 것인가? ( )

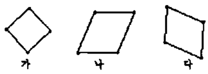


① 하나도 없다 ② 나 하나뿐이다.
③ 다 하나뿐이다. ④ 다와 라이다.
⑤ 나와 다이다.

3. 아래 그림 중 직사각형인 것을 모두 찾으면 다음 중 어느 것인가? ( )

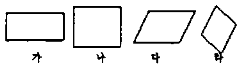
① 가 하나뿐이다. ② 나 하나뿐이다.
③ 가와 나이다. ④ 가와 다이다.
⑤ 가, 나, 다 모두이다.

4. 아래 그림 중 정사각형인 것을 모두 찾으면 다음 중 어느 것인가? ( )



① 가 하나뿐이다. ② 나 하나뿐이다.
③ 다 하나뿐이다. ④ 가, 나, 다
⑤ 하나도 없다.

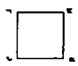
5. 아래 그림 중 평행사변형인 것을 모두 찾으면 다음중 어느 것인가? ( )



① 아무것도 없다. ② 나 하나뿐이다.
③ 가와 나이다. ④ 나와 라이다.
⑤ 가, 나, 다, 라 전부다.

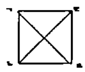
6. 오른쪽의 사각형 ㄱㄴㄷㄹ 은 정사각형이다. 다음 중 정사각형에 대하여 항상 옳은 것은 어느 것인가? ( )

① 네 각이 모두 직각이다.
② 네 개의 변이 있다.
③ 두 대변의 길이는 같다.
④ 두 대각선의 길이는 같다.
⑤ 모두 참이다.

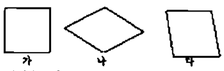


7. 오른쪽의 사각형 ㄱㄴㄷㄹ 은 정사각형이다. 다음 중 정사각형에 대하여 항상 참이라고 할 수 있는 것은 어느 것인가? ( )

① 대각선 ㄱㄷ과 변 ㄴㄷ의 길이는 같다.
② 대각선 ㄴㄹ과 대각선 ㄱㄷ은 수직이다.
③ 변 ㄱㄴ과 변 ㄷㄹ은 수직이다.
④ 변 ㄱㄴ과 대각선 ㄴㄹ의 길이는 같다.
⑤ 각 ㄱㄹㄷ은 각 ㄴㄷㄹ보다 크다.



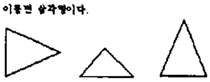
8. 마름모는 네 변의 길이가 모두 같은 사각형이다. 다음 도형은 모두 마름모이다.



다음 중에서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 어느 것인가? ( )

① 두 대각선의 길이는 같다.
② 각 대각선은 마름모의 각을 이등분한다.
③ 두 대각선은 수직이다.
④ 마주보는 두 각의 크기는 서로 같다.
⑤ 네 변의 길이는 같다.

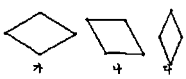
9. 이등변삼각형은 두 변의 길이가 같은 삼각형이다.
다음 도형은 모두 이등변 삼각형이다.



다음중 이등변삼각형에 대하여 항상 참인 것은 어느것인가? ( )

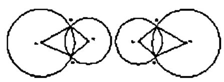
① 세 변의 길이는 모두 같다.
② 한 변의 길이는 다른 변의 2배이다.
③ 적어도 두 개의 각의 크기가 같다.
④ 세 각의 크기는 모두 같다.
⑤ 모두 참이다.

10. 아래 그림 중 마름모인 것을 모두 찾으면 다음 중 어느 것인가? ( )



① 가, 나, 다 모두이다.
② 나 하나뿐이다. ③ 다 하나뿐이다.
④ 나와 다이다. ⑤ 가와 다이다.

11. 점 ㄱ과 점 ㄴ을 중심으로 하는 두 개의 원이 두 점 ㄷ과 ㄹ에서 만나서 사각형 ㄹㄴㄷㄱ을 만들었다.
다음 중 항상 참이라고 말할 수 있는 것은 다음 중 어느 것인가? ( )

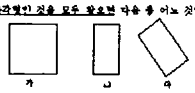


① 사각형 ㄹㄴㄷㄱ은 마름모이다.
② 각ㄱ과 각 ㄴ의 크기는 같다.
③ 사각형 ㄹㄴㄷㄱ에는 네 각의 크기는 같다.
④ 선분ㄱㄴ과 선분ㄷㄹ은 수직이다.
⑤ 모두 거짓이다.

12. 다음 중 옳은 것은 어느 것인가? ( )

① 세 변의 길이가 같으면서 두 각의 크기가 같은 삼각형은 없다.
② 세 변의 길이가 같고 크기가 같은 두 개의 각을 가진 삼각형을 찾을 수 있다.
③ 크기가 같은 두 개의 각을 가진 삼각형의 세 변의 길이는 같다.
④ 삼각형의 세변의 길이 중 한 변의 길이만 틀려도 세 각의 크기는 모두 다르다.
⑤ 모두 옳지 않다.

13. 아래 그림 중 직사각형인 것을 모두 찾으면 다음 중 어느 것인가? ( )



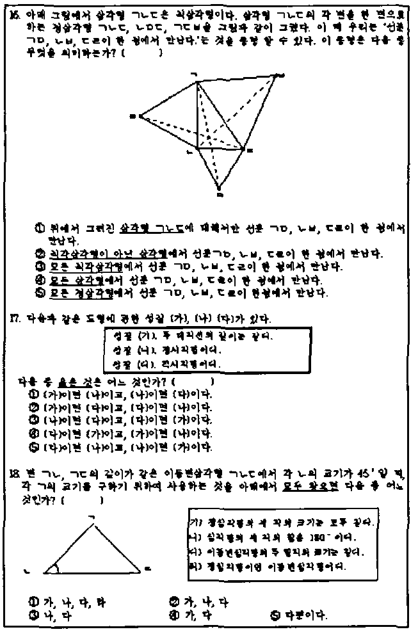
① 가, 나, 다 모두이다.
② 나 하나뿐이다. ③ 다 하나뿐이다.
④ 가와 나이다. ⑤ 나와 다이다.

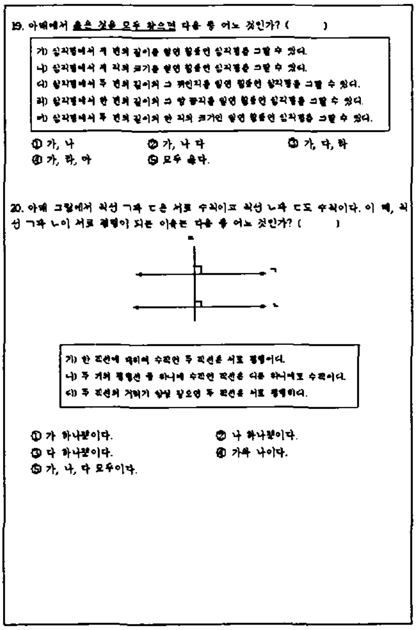
14. 다음 중 옳은 것은 어느 것인가? ( )

① 모든 정사각형은 직사각형이다.
② 모든 직사각형은 정사각형이다.
③ 모든 평행사변형은 직사각형이다.
④ 모든 평행사변형은 정사각형이다.
⑤ 모두 옳지 않다.

15. 다음 중 직사각형에서는 성립하지만 평행사변형에서는 성립하지 않는 성질은 어느 것인가? ( )

① 마주보는 두 변의 길이는 같다.
② 두 대각선의 길이가 같다.
③ 마주 보는 두 변이 평행하다.
④ 마주 보는 각의 크기가 서로 같다.
⑤ 모두 성립하지 않는다.





2. 검사지의 채점방법

채점방법에 있어서, Chicago Project에서 사용한 방법(Usiskin, 1982)을 사용하여 다음 표와 같이 점수를 부여하였다.

<표> 문항 구성 및 점수부여, 판정 방법

문항	van Hieles 수준	부여점수	각 수준별 점수부여기준	비 고
1번 ~ 5번	제1수준 문제	1점	각 수준문제별로 5문제 중 4문제 이상 정답시 수준별로 부여된 점수를 매긴다.	5문제 중 3문제 이하 정답시는 각 수준별로 0점 처리
6번 ~ 10번	제2수준 문제	2점		
11번 ~ 15번	제3수준 문제	4점		
16번 ~ 20번	제4수준 문제	8점		

※ 표를 해석하는 방법:

(1) 각 수준 문제별로 5문제 중 4문제 이상 정답을 맞출 경우 수준별로 부여된 점수를 매긴다.

(2) 각 수준별로 부여된 점수를 합산하는 가능한 경우를 생각하면, 0~15점까지 나타나는데, van Hieles의 기하학 사고 수준은 연속적으로 발달하므로, 0, 1, 3, 7, 15점이 되어야 하고, 이 점수에 따라 각각 제 0, 1, 2, 3, 4수준에 도달한 것으로 판정한다.

(예1) 만약 피검자에 부여된 합산총점이 7점(=1+2+4)이면, 제 3수준에 도달한 것으로 판정함.

(예2) 만약 합산총점이 11점(=1+2+0+8)이면, 제4수준 문제에서 4문제 이상 정답을 체크하였으나 제3수준에서 0점을 얻었으므로 제3수준은 적절히 수행되지 않은 것이므로, 결국 제2수준에 도달한 것으로 판정함.