韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 18집 제 2호, 2004. 7. 109-124

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 18, No. 2, July. 2004. 109-124

대학수학에서 귀납적 증명에 대한 연습[1)]

김 병 무 (충주대학교)

대학수학에서 수학적귀납법의 원리를 소개하고 풍부한 예를 통해 이해를 돕는다. 특별히 교양수학을 수강하는 1학년 학생 수준에 맞게 매스매티카 프로그램을 이용하여 구체적인 예를 갖고 한단계 한단계 접근하여 수학적귀납법의 증명을 연습할 기회를 준다. 증명을 단계적으로 하는 것을 연습하여 학생들은 논리적인 사고능력을 개발하고 새로운 명제를 발견할 수 있는 기회를 맞보게 한다. 물론, 증명 연습은 1학년 신입생에게는 쉽지 않으나 여러 명제에 대해 연습을 하는 것은 수학적, 논리적 사고 능력을 개발하고 증명문제에 대한 인식을 바꾸는데 매우 중요한 역할을 할 것이다.

1. 머리말

수준이 낮은 학생에게 대학수학을 지도하는데 증명에 관한 내용의 지도는 어려운 일이다. 폭넓게 이해할 수 있는 수업, 흥미를 끄는 수업, 감동과 자극을 줄 수 있는 수업이 되도록 하며 숫자 속에서 미와 우아함을 느끼도록 접근해보기 위해(김병무, 1997), 수학을 단지 계산으로만 여기는 학생에게 흥미있게 수학적귀납법을 지도하는 방법을 알아보려고 한다. 합리적으로 생각하고 판단하며 사고력을 기르는데 증명만큼 도움을 주는 길은 없다고 생각된다. 또 남을 설득하는데 증명의 과정이 중요함을 수학교육의 목표는 강조하고 있다(이중권, 2002). 어렵지만 지도를 대학수준의 수학에서 지도하여야 하고 학생들은 그 능력을 길러야 한다. 여기서는 증명방법중 수학적귀납법에 관심을 가지려고 한다.

대학수학에서 다루는 수학적귀납법에 대해 내용을 소개하고 흥미있는 문제를 찾아내어 연습(Don Hancock, 2000)을 통해 익힐 기회를 마련하는 장을 열어보겠다. 체계적인 접근과 Mathematica를 이용한 결과를 통해 명제를 만드는 과정을 알아보고 수학적귀납법으로 참임을 보이려고 한다.

수학적귀납법의 원리에 대해 알아보면, 자연수 n에 대해 문장이나 식 P_n이 있을 때 다음 두 조건이 만족되면 P_n은 모두 참이다. (i) P_1이 참이다. (ii) P_k가 참이되는 모든 자연수 k에 대하여 P_{k+1}도 참이다. 따라서 수학적귀납법의 원리를 적용할 때, 다음 두 단계를 따른다. 1) P_1이 참임을 보인다. 2) P_k가 참임을 가정하고 P_{k+1}이 참임을 증명한다. 한편 j가 정수(자연수)일 때, P_n이 모든 $n \geq j$에 대해 참임을 보이기 위해 다음 단계를 이용한다. (i) P_j가 참임을 보인다. (ii) $k \geq j$인 P_k가 참임을 가정하고 P_{k+1}이 참임을 증명한다. 이 방법은 확장된 수학적귀납법의 원리라고 한

1) 이 논문은 2003학년도 충주대학교 연구비 지원에 의해 수행되었음.

다. 이들에 대한 증명은 집합론을 참고한다.

대학수학 학습에 대한 여러 가지 시도, 좌표에 대한 다양한 접근(Temple H. Fay, 2000), 파이의 계산에 대한 다양한 접근(Osler and Wihelm, 2001), 대학수학에서 Mathematica를 이용한 파이의 계산(김병무, 2001), 대학수학에서 급수의 합에 대한 다양한 접근(김병무, 2002), 변의 길이가 특별한 수열을 이루는 삼각형(김병무, 2002)과 Journal "Mathematics and Computer Education"의 내용들이 대학수학 수업에 흥미를 돋우기 위해 다양한 자료를 제공하고 있다.

진지한 수학문제 풀이는 가장 높은 수준의 지적활동이다. 수학적귀납법을 이용하여 대학수학 수준에서 증명의 한 방법을 완전히 터득하여 앞으로 생활하는데 필요한 상상력과 사고력을 확실하게 키우는 길을 연습해보자. 우선 대학수학 수준에서 접하게 되는 내용을 소개한다.

2. 대학수학의 구체적인 예

많은 공식들이 어떤 수보다 큰 모든 정수 n에 대하여 성립함을 보일 수 있다는 수학적귀납법의 원리를 이용하여 증명해야 하는 간단하고 구체적인 예를 대학수학(김병무, 2002)에서 알아보자.

· 수열의 합을 구하는 경우 : $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$

· 부등식의 경우 : $n!>3^n$ $(n\geq 7)$

· 이항전개식 : $(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k+\cdots+nab^{n-1}+b^n$$

· n차 도함수 구하기 :

$$\frac{d^n}{dx^n}[\sin x],\qquad \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{x(1-x)}\right]=n!\left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}+\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right],$$

$$\frac{d}{dx}(u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n)=\frac{du_1}{dx}+\frac{du_2}{dx}+\cdots+\frac{du_n}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}(uv)=\sum_{r=1}^{n}{}_nC_r\ u^{(n-r)}v^{(r)}$$

· 부정적분의 점화식 :

n>2인 정수에 대해, $\int \tan^n x\,dx=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}-\int \tan^{n-2}x\,dx$,

n>1인 정수에 대해,

$$\int\frac{du}{(u^2+k^2)^n}=\frac{1}{2k^2(n-1)}\frac{u}{(u^2+k^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2k^2(n-1)}\int\frac{du}{(u^2+k^2)^{n-1}},$$

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

· Taylor 급수 공식 : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (x-a)^n$,

$$f(x, y) = f(0,0) + x f_x + y f_y + \frac{1}{2!}(x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy}) +$$

$$+ \frac{1}{3!}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3x y^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy}) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f + \cdots$$

· 행렬의 경우 : $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$

이들을 기초로 하여 연습할 문제를 체계적으로 접근해보고 Mathematica의 도움으로 알아보자.

3. 새로운 명제 만들기

계산에 약한 학생은 $abc-1$를 $(a-1)(b-1)(c-1)$로 인수분해 할지도 모른다.

더 일반으로 $n>1$과 자연수 $1<a_1<a_2<\cdots<a_n$에 대해 어떤 학생은 $a_1a_2\cdots a_n-1$을 $(a_1-1)(a_2-1)\cdots(a_n-1)$로 인수분해를 시도했을지도 모른다. 물론 이와 같은 결론은 거짓이다. 실제로 $a_1a_2a_3\cdots a_n-1>(a_1-1)(a_2-1)\cdots(a_n-1)$이다.

그러나 이것은 다음 흥미있는 질문에 대한 약간의 동기를 제공할 것이다.

$a_1a_2a_3\cdots a_n-1$이 $(a_1-1)(a_2-1)(a_3-1)\cdots(a_n-1)$로 어느 경우 나누어지는가?

곱기호를 이용하면 이 식은 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} a_i - 1}{\prod_{i=1}^{n}(a_i-1)} \quad \cdots (1)$$

어떤 n 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$에 대해 식(1)은 자연수가 되는가? 대학수학 수준에서 작은 n에 대해 이것을 즐길 학생을 찾을 수 있었으면 한다. 수학적 귀납법을 이용하여 학생들이 이런 기회를 이용하길 바라며, 이런 형태의 문제를 기술하고 증명하며 관련된 미해결 문제를 생각해 보려고 한다.

4. 체계적인 패턴 발견과 Mathematica의 도움

1) 체계적인 접근

논의를 단순화하기 위해 N을 자연수의 집합이라 하고 Q를 다음과 같이 정의한다.

$$Q=Q(a_1, a_2, \cdots, a_n)=\frac{\prod_{i=1}^{n} a_i-1}{\prod_{i=1}^{n}(a_i-1)} \quad \cdots (2)$$

이 기호로 식(1)은 $Q \in N$ 인 n순서쌍 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$을 찾는 것을 의미한다.

이와 같은 n순서쌍을 식(1)의 해라고 부를 것이다. 두 개의 기본적인 사실들이 이제부터 자주 이용될 것이다. 첫째 사실은 다른 변수가 고정될 때 편도함수 $\frac{\partial Q}{\partial a_i}=Q_{a_i}$가 음수이므로 Q가 임의의 변수 a_i에 대해 감소하고 있다. 둘째 사실은 $Q(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in N$이면, 각 $a_i (i=1,2,\cdots,n)$는 같은 기우성(parity)을 갖는다. 이것을 갖기 위해 a_i의 하나가 짝수이면 $(\prod_{i=1}^{n} a_i)-1$은 홀수이다. 그러나 홀수는 홀수로만 나누어진다. 그래서 각 a_i가 짝수라고해도 $\prod_{i=1}^{n}(a_i-1)$은 홀수임에 틀림없고, $n=2$일 때 식(1)의 해가 없음을 보이는 것으로 시작하려고 한다.

$Q(a_1, a_2)=\frac{a_1a_2-1}{(a_1-1)(a_2-1)}$에서 a_1, a_2가 모두 홀수라면 $1<Q(a_1, a_2) \le Q(3,5)<2$

한편, a_1, a_2가 짝수라면, $Q(a_1, a_2)$는 $1<Q(a_1, a_2) \le Q(2,4)<3$인 홀수인 값이므로 두 경우에 $Q(a_1, a_2)$가 N에 속한다는 것은 불가능함을 알 수 있다.

$n \ge 3$인 경우는 문제에 대한 적어도 2개의 해가 있다는 것을 궁극적으로 알게되므로 다르다.

우선 세 개의 변수가 있고 $Q(a_1, a_2, a_3)=\frac{a_1a_2a_3-1}{(a_1-1)(a_2-1)(a_3-1)}$라고 가정하자. a_1, a_2, a_3가 모두 짝수이고 $Q \in N$ 이면, Q는 홀수이고 $1<Q(a_1, a_2, a_3) \le Q(2,4,6)<4$이다.

따라서, 유일하게 가능한 Q의 정수값은 3이다. 실제로 $Q(2,4,8)=3$임을 알 수 있다. Q의 감소 성질 때문에 $(2,4,8)$은 짝수성분을 갖는 유일한 해가 된다. 바꾸어 a_1, a_2, a_3가 모두 홀수라고 하면, $1<Q(a_1, a_2, a_3) \le Q(3,5,7)<3$이므로 유일하게 가능한 Q의 정수값은 2이다. $Q(5,7,9)<2$이므로 $a_1=3$일때만 해가 가능하다. 그러나 $Q(3,7,9)<2$는 a_2가 5임을 알려준다. Q는 감소하므로 세 번째 성분에 홀수를 차례대로 대입해가면 $(3,5,15)$가 홀수 성분을 갖는 유일한 해임을 알 수 있다. 따라서 $n=3$일 때 두 개의 해는 오직 $(2,4,8)$과 $(3,5,15)$임을 보였다. 앞

으로 참고하기 위해, 이들 해는 a_1은 2 또는 3인 경우 $a_2=a_1+2$와 $a_3=a_1a_2$인 두 개의 모양을 갖고 있음을 유의한다.

다음 $n=4$인 경우를 알아보자. a_1, a_2, a_3, a_4가 모두 짝수이면, $Q(a_1, a_2, a_3, a_4)$는 홀수의 비값이고 $1<Q(a_1, a_2, a_3, a_4)\le Q(2,4,6,8)<4$이다. 따라서 $Q=3$이 유일한 정수값이다.

더욱이 $Q(4, a_2, a_3, a_4)\le Q(4,6,8,10)<3$은 $a_1=2$를 보이는 반면 $Q(2,8,a_3,a_4)\le Q(2,8,10,12)<3$은 $a_2=4$ 또는 $a_2=6$이 되는 것을 보인다. 그러나 $Q(2,6,8,10)>3$과 $Q(2,6,8,12)<3$이므로 $a_2=4$를 생각하는 것만 남는다.

왜냐하면 이 경우에

$$Q(2,4,8,a_4)\ge\frac{2\cdot4\cdot8\cdot a_4}{1\cdot3\cdot7\cdot(a_4-1)}-\frac{1}{1\cdot3\cdot7\cdot9}>\frac{2\cdot4\cdot8}{1\cdot3\cdot7}-\frac{1}{1\cdot3\cdot7\cdot9}>3$$

이고, $Q(2,4,18,a_4)\le Q(2,4,18,20)<3$이므로 $10\le a_3\le16$이다. 이들 a_3 각각에 대해 a_4를 대입하여 $Q(2,4,a_3,a_4)$를 풀어도 좋다. $a_3=10$과 $a_4=80$일때가 유일한 정수해이다.

한편, a_1, a_2, a_3, a_4는 모두 홀수라고 하면 $1<Q(a_1, a_2, a_3, a_4)\le Q(3,5,7,9)<3$이고 유일한 정수값으로 $Q=2$임을 알 수 있다. 게다가 $Q(5, a_2, a_3, a_4)\le Q(5,7,9,11)<2$는 $a_1=3$을 보이는 반면 $Q(3,11,a_3,a_4)\le Q(3,9,13,15)<2$는 a_2가 5, 7또는 9임을 보인다.

더욱이 $a_4>13$에 대해 $Q(3,9,11,13)>2$이고 $Q(3,9,a_3,a_4)\le Q(3,9,11,15)<2$는 a_2가 9일 수 없음을 보인다. $a_2=7$에 대해 알아보면 $Q(3,7,15,a_4)\le Q(3,7,15,17)<2$는 a_3는 9, 11또는 13임을 의미한다. 그러나 이들 a_3 각 값에 대해, a_4를 대입하여 $2=Q(3,7,a_3,a_4)$를 푸는 것은 정수값을 보장하지 않는다. 따라서 a_2는 7일 수 없다. $a_2=5$에 대해 생각하자. 왜냐하면 식 (2)로부터 $Q(3,5,15,a_4)\ge\dfrac{3\cdot5\cdot15\cdot a_4}{2\cdot4\cdot14\cdot(a_4-1)}-\dfrac{1}{2\cdot4\cdot14\cdot16}>\dfrac{3\cdot5\cdot15}{2\cdot4\cdot14}-\dfrac{1}{2\cdot4\cdot14\cdot16}>2$

반면, $Q(3,5,31,a_4)\le Q(3,5,31,33)<2$이므로 $17\le a_3\le29$이어야 한다. 이들 고정된 a_3 각각에 대해서, a_4를 대입하여 $Q(3,5,a_3,a_4)=2$를 푸는 것은 $a_3=17$과 $a_4=255$일 때 정수값을 보장한다. 따라서, $n=4$일 때 정확히 또 한번 $(2,4,10,80)$, $(3,5,17,255)$의 두 개의 해가 존재한다. 흥미롭게도 두 해의 성분에 대한 단순한 모양 $a_1=2$ 또는 3인 경우 $a_2=a_1+2$, $a_3=a_1a_2+2$, $a_4=a_1a_2a_3$이 됨을 알 수 있다. 이 모양은 $n=3$인 경우에 대해 앞에서 관찰했던 것과 유사한 해의 모양을 생각하게 한다.

같은 방법으로 식(1)의 해를 구하기 위해 n이 증가함에 따라 더 어려워짐을 알아보려고 한다. 변수의 수가 작은 경우에는 컴퓨터 프로그램의 도움으로 해를 찾는데 학생들이 흥미를 가질 수 있었다. 그러나 $n\ge3$인 경우 적어도 2개의 해가 존재함을 보이는데 변수가 셋과 넷인 경우에 해를 분석

다. 그러나 $n \geq 3$인 경우 적어도 2개의 해가 존재함을 보이는데 변수가 셋과 넷인 경우에 해를 분석하는 동안 발견했던 방법을 일반화하려고 한다. 귀납적인 접근은 도움이 될 것이다. 다섯 개의 변수가 주어진 경우 $a_1 = 2$ 또는 3, $a_2 = a_1 + 2$, $a_3 = a_1 a_2 + 2$, $a_4 = a_1 a_2 a_3 + 2$이고 $a_5 = a_1 a_2 a_3 a_4$이면 앞의 관찰 $Q(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in N$이 됨을 추측하게 할 것이다. 이것은 다행히 Q값이 3과 2 각각에 대해 $(2, 4, 10, 82, 6560)$과 $(3, 5, 17, 257, 65535)$의 두 가지 예비답을 준다.

같은 방법으로 여섯 개의 변수에 대해서도,

$$(2, 2+2, 2 \cdot 4+2, 2 \cdot 4 \cdot 10+2, 2 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 82+2, 2 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 82 \cdot 6562)$$
$$= (2, 4, 10, 82, 6562, 43046720)$$

과

$$(3, 3+2, 3 \cdot 5+2, 3 \cdot 5 \cdot 17+2, 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257+2, 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257 \cdot 65537)$$
$$= (3, 5, 17, 257, 65537, 4294967295)$$가 해임을 알 수 있다.

Mathematica를 이용하여 변수가 일곱 개인 경우를 계산해보면, $(2, 2+2, 2 \cdot 4+2, 2 \cdot 4 \cdot 10+2, 2 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 82+2, 2 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 82 \cdot 6562+2, 2 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 82 \cdot 6562 \cdot 43046722) = (2, 4, 10, 82, 6562, 43046722, 1853020188851840)$과 $(3, 3+2, 3 \cdot 5+2, 3 \cdot 5 \cdot 17+2, 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257+2, 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257 \cdot 65537+2, 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257 \cdot 65537 \cdot 4294967297) = (3, 5, 17, 257, 65537, 4294967297, 18446744073709551615)$이다. 이제 우리의 모양(pattern)이 의미 있다는 강한 증거를 얻었다. 지금까지의 과정을 Mathematica를 이용하여 확인하고 더 많은 정보를 얻을 수 있나 알아보자. 증명할 명제를 만들고 수학적귀납법을 이용하여 확인해보려고 한다.

2) Mathenatica의 도움으로 규칙 만들기

Mathematica의 도움(김병무,2001)으로 지금까지의 과정을 정리해본다.
a, b, c, d, e, f, g, h는 $1 < a < b < c < d < e < f < g < h$인 정수이다.

In[1] := Clear $[Q, a, b]$

In[2] := $Q[a\_, b\_] := \dfrac{ab-1}{(a-1)(b-1)}$

In[3] := $Q[2, 4]$

Out[3]= $\dfrac{7}{3}$

In[4] := $Q[3, 5]$

Out[4]= $\dfrac{7}{4}$

In[5] := $Q[a\_, b\_, c\_] := \dfrac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$

In[6] := Solve [$Q[2, b, c] == 3, c$]

Out[6]= $\left\{\left\{c \to \dfrac{-4+3b}{-3+b}\right\}\right\}$

부정방정식을 만들어 정수해를 구하면

$(b-3)(c-3)=5$에서

$b-3=1$, $c-3=5$이다.

따라서, $b=4$, $c=8$을 얻는다.

In[7] := $Q[2, 4, 8]$

Out[7]= 3

또 다른 해를 구해보자.

In[8] := Solve [$Q[3, b, c] == 2, c$]

Out[8]= $\left\{\left\{c \to \dfrac{-5+4b}{-4+b}\right\}\right\}$

부정방정식을 만들어 정수해를 구하면

$(b-4)(c-4)=11$에서

$b-4=1$, $c-4=11$이다.

따라서, $b=5$, $c=15$를 얻는다.

In[9] := $Q[3, 5, 15]$

Out[9]= 2

In[10] := $Q[a\_, b\_, c\_, d\_] := \dfrac{abcd-1}{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)}$

In[11] := Solve [$Q[2, 4, c, d] == 3, d$]

Out[11]= $\left\{\left\{d \to \dfrac{-10+9c}{-9+c}\right\}\right\}$

부정방정식을 만들어 정수해를 구하면

$(c-9)(d-9)=71$에서

$c-9=1$, $d-9=71$이다.

따라서, $c=10$, $d=80$을 얻는다.

In[12] := $Q[2, 4, 10, 80]$

Out[12]= 3

In[13] := Solve [$Q[3, 5, c, d] == 2, d$]

Out[13]= $\left\{\left\{d \to \dfrac{-17+16c}{-16+c}\right\}\right\}$

부정방정식을 만들어 정수해를 구하면

$(c-16)(d-16)=239$에서, 239의 약수를 찾아보자.

In[14] := Divisor [239]

Out[14]= {1, 239}

따라서, $c-16=1$, $d-16=239$이고

$c=17$, $d=255$이다.

In[15] := Q[3, 5, 17, 255]

Out[15]= 2

In[16] := Q[a_ , b_ , c_ , d_ , e_] := $\dfrac{abcde-1}{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)(e-1)}$

In[17] := Solve [Q[2, 4, 10, d, e] == 3, e]

Out[17]= $\left\{\left\{e \rightarrow \dfrac{-82+81d}{-81+d}\right\}\right\}$

부정방정식을 만들어 정수해를 구하면

$(d-81)(e-81)=6479$에서, 6479의 약수를 구하면

In[18] := Divisors [6479]

Out[18]= {1, 11, 19, 31, 209, 341, 589, 6479}

따라서, 다음 식으로부터 정수해의 쌍을 얻는다.

$d-81=1$, $e-81=6479$, $d=82$, $e=6560$

$d-81=11$, $e-81=589$, $d=92$, $e=670$

$d-81=19$, $e-81=341$, $d=100$, $e=422$

$d-81=31$, $e-81=209$, $d=112$, $e=290$

In[19] := Q[2, 4, 10, 82, 6560]

Q[2, 4, 10, 92, 670]

Q[2, 4, 10, 100, 422]

Q[2, 4, 10, 112, 290]를 계산하면 모두 3이 나온다.

Out[19]= 3

또 다른 정수해의 쌍을 구해보자.

In[20] := Solve [Q[3, 5, 17, d, e] == 2, e]

Out[20]= $\left\{\left\{e \rightarrow \dfrac{-257+256d}{-256+d}\right\}\right\}$

부정방정식을 만들면,

$(d-256)(e-256)=65279$에서 65279의 약수를 알아보자.

In[21] := Divisors [65279]

Out[21]= {1, 29, 2251, 65279}

따라서, 다음 식에서 정수해의 쌍을 얻는다.

$d-256=1,\ e-256=65279,\qquad d=257,\ e=65535$

$d-256=29,\ e-256=2251,\qquad d=285,\ e=2507$

다음 값은 모두 2이다.

In[22] := Q[3, 5, 17, 257, 65535]

Q[3, 5, 17, 285, 2507]

Out[22]= 2

In[23] := $Q[a\_, b\_, c\_, d\_, e\_, f\_] := \dfrac{abcdef-1}{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)(e-1)(f-1)}$

In[24] := Solve [Q[2, 4, 10, 82, e, f]==3, f]

Out[24]= $\left\{\left\{f \to \dfrac{-6562+6561e}{-6561+e}\right\}\right\}$

부정방정식을 만들면,

$(e-6561)(f-6561)=43040159$에서, 43040159의 약수를 구하자.

In[25] := Divisors [43040159]

Out[25]= {1, 5879, 7321, 43040159}

따라서, 다음 식에서 정수해의 쌍을 얻는다.

$e-6561=1,\ f-6561=43040159,\qquad e=6562,\ f=43046720$

$e-6561=5879,\ f-6561=7321,\qquad e=12440,\ f=13882$

다음을 계산하면 모두 3이 된다.

In[26] := Q[2, 4, 10, 82, 6562, 43046720]

Q[2, 4, 10, 82, 12440, 13882]

Out[26]= 3

In[27] := Solve [Q[3, 5, 17, 257, e, f]==2, f]

Out[27]= $\left\{\left\{f \to \dfrac{-65537+65536e}{-65536+e}\right\}\right\}$

부정방정식을 만들어 정수해를 구해보자.

$(e-65536)(f-65536)=4294901759$에서, 4294901759의 약수를 구하자.

In[28] := Divisors [4294901759]

Out[28]= {1, 19, 181, 3439, 1248881, 23728739, 226047461, 4294901759}

다음 식으로부터 정수해의 쌍을 얻는다.

$e-65536=1$, $f-65536=4294901759$, $e=65537$, $f=4294967295$
$e-65536=19$, $f-65536=226047461$, $e=65555$, $f=226112997$
$e-65536=181$, $f-65536=23728739$, $e=65717$, $f=23794275$
$e-65536=3439$, $f-65536=1248881$, $e=68975$, $f=1314417$

다음을 계산하면 2가 된다.

In[29] := Q[3, 5, 17, 257, 65537, 4294967295]
Q[3, 5, 17, 257, 65555, 226112997]
Q[3, 5, 17, 257, 65717, 23794275]
Q[3, 5, 17, 257, 68975, 1314417]

Out[29]= 2

In[30] := $Q[a\_, b\_, c\_, d\_, e\_, f\_, g\_]$:=

$$\frac{abcdefg-1}{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)(e-1)(f-1)(g-1)}$$

In[31] := Solve [Q[2, 4, 10, 82, 6562, f, g] == 3, g]

Out[31]= $\left\{\left\{g \rightarrow \frac{-43046722+43046721f}{-43046721+f}\right\}\right\}$

부정방정식을 만들어 정수해를 구해보자.

$(f-43046721)(g-43046721)=1853020145805119$

1853020145805119의 약수를 구해보자.

In[32] := Divisors [1853020145805119]

Out[32]=

{1, 59, 8069, 476071, 3892318889, 229646814451, 31407121115341, 1853020145805119}

다음 식으로부터 정수해의 쌍을 얻는다.

$f-43046721=1$, $g-43046721=1853020145805119$, $f=43046722$, $g=1853020188851840$
$f-43046721=59$, $g-43046721=31407121115341$, $f=43046780$, $g=31407164162062$
$f-43046721=8069$, $g-43046721=229646814451$, $f=43054790$, $g=229689861172$
$f-43046721=476071$, $g-43046721=3892318889$, $f=43522792$, $g=3935365610$

다음을 계산하면 3이 된다.

In[33] := Q[2, 4, 10, 82, 6562, 43046722, 1853020188851840]
Q[2, 4, 10, 82, 6562, 43046780, 31407164162062]
Q[2, 4, 10, 82, 6562, 43054790, 229689861172]
Q[2, 4, 10, 82, 6562, 43522792, 3935365610]

Out[33]= 3

In[34] := Solve [Q[3, 5, 17, 257, 65537, f, g] == 2, g]

Out[34]= $\left\{\left\{g \to \frac{-4294967297+4294967296f}{-4294967296+f}\right\}\right\}$

부정방정식을 만들어 정수해를 구해보자.

$(f-4294967296)(g-4294967296)=18446744069414584319$

18446744069414584319의 약수를 구해보자.

In[35] := Divisors [18446744069414584319]

Out[35]= {1, 11, 71, 79, 781, 869, 1009, 5609, 11099, 61699, 71639, 79711, 788029, 876821, 5659481, 62254291, 296312812709, 3259440939799, 21038209702339, 23408712204011, 231420306725729, 257495834244121, 298979628023381, 1662018566484781, 3288775908257191, 18282204231332591, 21227553589660051, 23619390613847099, 233503089486260561, 259813296752318089, 1676976733583144029, 18446744069414584319}

다음 식으로부터 정수해의 쌍을 얻는다.

$f-4294967296=1$, $g-4294967296=18446744069414584319$,

$f=4294967297$, $g=18446744073709551615$

$f-4294967296=11$, $g-4294967296=1676976733583144029$,

$f=4294967307$, $g=1676976737878111325$

$f-4294967296=71$, $g-4294967296=259813296752318089$,

$f=4294967367$, $g=259813301047285385$

$f-4294967296=79$, $g-4294967296=233503089486260561$,

$f=4294967375$, $g=233503093781227857$

$f-4294967296=781$, $g-4294967296=23619390613847099$,

$f=4294968077$, $g=23619394908814395$

$f-4294967296=869$, $g-4294967296=21227553589660051$,

$f=4294968165$, $g=21227557884627347$

$f-4294967296=1009$, $g-4294967296=18282204231332591$,

$f=4294968305$, $g=18282208526299887$

$f-4294967296=5609$, $g-4294967296=3288775908257191$,

$f=4294972905$, $g=3288780203224487$

$f-4294967296=11099$, $g-4294967296=1662018566484781$,

$f=4294978395$, $g=1662022861452077$

$f-4294967296=61699$, $g-4294967296=298979628023381$,

$f=4295028995$, $g=298983922990677$

$f-4294967296=71639$, $g-4294967296=257495834244121$,

$f=4295038935$, $g=257500129211417$

$f-4294967296=79711$, $g-4294967296=231420306725729$,

$f=4295047007$, $g=231424601693025$

$f-4294967296=788029$, $g-4294967296=23408712204011$,

$f=4295755325$, $g=23413007171307$

$f-4294967296=876821$, $g-4294967296=21038209702339$,

$f=4295844117$, $g=21042504669635$

$f-4294967296=5659481$, $g-4294967296=3259440939799$,

$f=4300626777$, $g=3263735907095$

$f-4294967296=62254291$, $g-4294967296=296312812709$,

$f=4359221587$, $g=300607780005$

다음을 계산하면 모두 2가 된다.

```
In[36] := Q[3, 5, 17, 257, 65537, 4294967297, 18446744073709551615]
          Q[3, 5, 17, 257, 65537, 4294967307, 1676976737878111325]
          Q[3, 5, 17, 257, 65537, 4294967367, 259813301047285385]
          Q[3, 5, 17, 257, 65537, 4294967375, 233503093781227857]
          Q[3, 5, 17, 257, 65537, 4294968077, 23619394908814395]
          Q[3, 5, 17, 257, 65537, 4294968165, 21227557884627347]
          Q[3, 5, 17, 257, 65537, 4294968305, 18282208526299887]
          Q[3, 5, 17, 257, 65537, 4294972905, 3288780203224487]
          Q[3, 5, 17, 257, 65537, 4294978395, 1662022861452077]
          Q[3, 5, 17, 257, 65537, 4295028995, 298983922990677]
          Q[3, 5, 17, 257, 65537, 4295038935, 257500129211417]
          Q[3, 5, 17, 257, 65537, 4295047007, 231424601693025]
          Q[3, 5, 17, 257, 65537, 4295755325, 23413007171307]
          Q[3, 5, 17, 257, 65537, 4295844117, 21042504669635]
          Q[3, 5, 17, 257, 65537, 4300626777, 3263735907095]
          Q[3, 5, 17, 257, 65537, 4357221587, 300607780005]
Out[36]= 2
```

In[37] := $Q[a\_, b\_, c\_, d\_, e\_, f\_, g\_, h\_] :=$

$$\frac{abcdefgh-1}{(a-10(b-1)(c-1)(d-1)(e-1)(f-1)(g-1)(h-1)}$$

In[38] := Solve $[Q[2, 4, 10, 82, 6562, 43046722, g, h]==3, h]$

Out[38]= $\left\{\left\{h \to \frac{-1853020188851842+1853020188851841g}{-1853020188851841+g}\right\}\right\}$

부정방정식을 만들어 정수해를 구해보자.

$(g-1853020188851841)(h-1853020188851841)=3433683820292510631637660237439$

3433683820292510631637660237439의 약수를 구하면

In[39] := Divisors [3433683820292510631637660237439]

Out[39]= {1, 21871, 108289, 271300789, 2368388719, 5343874638029, 5933619556219, 29378891140021, 116875882208332259, 578682840677522381, 642545728123399291, 1449797405614357104881, 1265637240845809199485I, 31708519058191604240852351, 156997111256573116530458609, 3433683820292510631637660237439}

$Q=3$이 되는 경우 (g, h)의 개수는 8이다.

In[40] := Solve $[Q[3, 5, 17, 257, 65537, 4294967297, g, h]==2, h]$

Out[40]= $\left\{\left\{h \to \frac{-18446744073709551617+18446744073709551616g}{-18446744073709551616+g}\right\}\right\}$

부정방정식을 만들어 정수해를 구해보자.

$(g-18446744073709551616)(h-18446744073709551616)$

$=340282366920938463444927863358058659839$

340282366920938463444927863358058659839의 약수를 구해보자.

In[41] := Divisors [340282366920938463444927863358058659839]

Out[41]= {1, 29, 101, 1061, 1741, 2929, 30769, 50489, 107161, 175841, 1847201, 3107669, 5099389, 53568829, 186567301, 5410451729, 62893522383172982457806872591, 1823912149112016491276399305139, 6352245760700471228238494131691, 66730027248546534387733091819051, 109497622469104162459041765180931, 184215127060313665618916329819039, 1935170790207849497244259662752479, 3175431051604020711312211190246999, 6739732752103199973161042273724151, 11059259869379520408363218283274031, 116176977439719516369043312856967791, 195452249810992799221670225938000379, 320718536212006091842533330214946899, 3369132345751865974702256072852065939}

$Q=2$가 되는 (g, h)의 개수는 16이다.

<표> n에 따른 해의 개수

	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
Q=2인 경우	0	1	1	2	4	16	16		
Q=3인 경우	0	1	1	4	2	4	8		
계	0	2	2	6	6	20	24		

해의 개수에 대해서는 주어진 자료로 규칙을 찾을 수 없지만 다른 해를 구하거나 더 많은 n에 대해 해를 구해보면 새로운 명제를 만들 가능성은 열려 있다. 우선 지금까지 알고 있는 정보에 대해 귀납적 증명을 하여보자.

5. 맺는말

1) 귀납적 증명

더 진행하기 전에 추측을 지지하는 많은 예들이 증명을 이루는 것이 아님을 확인하는 것은 가치가 있다. 이를테면, A_1, A_2가 독립인 사건일 때 $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$가 성립한다고 $A_1, A_2, \cdots, A_n$이 서로 독립인 사건일 때, $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\,P(A_2)\cdots P(A_n)$이 성립하는 것은 아니다. 필요하면, 증명기술로서 수학적귀납법 이외의 증명법을 상기해야 한다. 해의 성질에 의해 자극을 받고 고정된 a와 n에 대해 더 찾아 확인하는 것은 각자 해볼 기회를 갖기로 하고 여기서는 필요한 명제를 만들어 증명하는 연습에 수학적귀납법을 이용한다.

$2 \le j \le n-1$, $b_n = \prod_{i=1}^{n-1} b_i$ 에 의해 $b_1 = a$, $b_j = (\prod_{i=1}^{j-1} b_i) + 2$이라고 $(b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n)$을 반복적으로 정의한다. 모든 $n \ge 3$에 대해 $Q(b_1, b_2, \cdots, b_n) = \dfrac{a+1}{a-1}$ 임을 n에 대한 귀납법으로 증명할 것이다. 식(2)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$Q(b_1, b_2, \cdots, b_n) = \frac{(\prod_{i=1}^{n-1} b_i)\, b_n - 1}{(\prod_{i=1}^{n-1}(b_i - 1))(b_n - 1)} = \frac{(b_n)^2 - 1^2}{(\prod_{i=1}^{n-1}(b_i - 1))(b_n - 1)}$$

$$= \frac{b_n + 1}{\prod_{i=1}^{n-1}(b_i - 1)} \quad \cdots (3)$$

$n = 3$일 때, 단순히 계산해도 기본단계를 만드는 식

$Q(b_1, b_2, b_3) = Q(a, a+2, a(a+2)) = \frac{a+1}{a-1}$을 보일 수 있다.

특별한 n에 대해 $Q(b_1, b_2, \cdots, b_n) = \frac{a+1}{a-1}$임을 가정하면, $n+1$에 대해

$$\begin{aligned} & Q(b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}, b_n+2, (\prod_{i=1}^{n-1} b_i)(b_n+2)) \\ &= \frac{(\prod_{i=1}^{n-1} b_i)(b_n+2)+1}{[\prod_{i=1}^{n-1}(b_i-1)][(b_n+2)-1]} \quad (\text{식}(3)\text{에서}) \\ &= \frac{b_n(b_n+2)+1}{(\prod_{i=1}^{n-1}(b_i-1))(b_n+1)} \quad (b_n = \prod_{i=1}^{n-1} b_i \text{ 이므로}) \\ &= \frac{(b_n+1)^2}{(\prod_{i=1}^{n-1}(b_i-1))(b_n+1)} = \frac{b_n+1}{\prod_{i=1}^{n-1}(b_i-1)} \\ &= \frac{a+1}{a-1} \text{이 된다. (식(3)과, 귀납법가정에서)} \end{aligned}$$

수학적귀납법에 의해 모든 $n \geq 3$에 대해 $Q(b_1, b_2, \cdots, b_n) = \frac{a+1}{a-1}$이 따라 나온다. 따라서, 식(1)은 $n \geq 3$에 대해 적어도 두 개의 해를 갖는다는 것을 증명하면 $Q(b_1, b_2, \cdots, b_n)$은 $a=2$ 또는 $a=3$일 때 정확히 정수값이다.

대학수학을 수강하는 대부분의 학생수준에서 귀납적 논리 전개는 쉽지 않지만 이런 기본 방법의 증명에서 얻은 힘이 좋은 경험을 쌓게 하고 새로운 것을 만들 기회를 제공할 것이다.

2) 연구과제

식(1)의 모든 해를 만드는 식을 일반화 할 수 있다면 확실히 즐거운 일이 될 것이다. 그러나 불행하게도 변수가 네 개보다 더 많은 경우는 그렇게 될 필요가 없다. 예를들면 변수가 다섯 개인 경우에 $n=4$인 경우 이용했던 분석 컴퓨터를 이용하면 네 개의 다른 해 (2, 4, 10, 92, 670), (2, 4, 10, 100, 422), (2, 4, 10, 112, 290)과 (3, 5, 17, 285, 2507)가 정확히 있다. 그러나, 이것은 대학수학 수강생에 대한 연구과제로 공개적인 질문을 하도록 한다. 도전적이고 상상력을 풍부하게 하는 문제들이 학생들의 수학에 대한 태도를 긍정적으로 변화시키는데 기여할 것이다(김병무, 2002). 앞의 <표>와 Mathematica로 구한 해에서 확인한 것을 갖고 더 많은 결론을 이끌어 내기를 바라며 다음과 같은 세 개의 질문을 같이 풀어 보았으면 한다.

(i) 변수가 n개일 때 해의 수에 대한 어떤 공식이 있는가?

(ii) Q가 정수값 2나 3이외의 값에 대해 해들이 있는가?

(iii) $n \geq 5$에 대해, 하나 또는 더 많은 해의 성분을 주는 다른 공식이 있는가?

유명한 수학자들은 단지 몇 개의 예를 갖고 일반화 된 명제를 이끌어내고 있지만 보통의 사람들은 많은 예를 통해서도 어떤 명제를 만드는 것이 쉬운 일은 아니다. 컴퓨터의 도움으로 충분히 큰 n에 대해 알아볼수는 있지만 많은 시간과 노력이 투입되어야 한다. 대학수학에 대한 흥미를 얻는 하나의 결실이 되기를 바라며 귀납적인 방법으로 명제를 얻고 증명하는 기회를 공유했으면 한다.

참 고 문 헌

김병무 (1997). 흥미 및 동기유발을 위한 대학수학 수업 자료와 평가, 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육> **36**(2), pp.127-133.

김병무 (2001). 미분적분을 위한 Mathematica 연습, 서울 : 교우사.

김병무 (2002). 대학수학에 대한 태도변화 연구, 충주대학교 산업대학원 대학원논문집 제**3**집, pp491-503.

김병무 (2001). 대학수학에서 Mathematica를 이용한 파이의 계산, 한국수학교육학회지 시리즈E <수학교육 논문집> 제**11**집, pp.307-319.

김병무 (2002). 대학수학에서 급수의 합에 대한 다양한 접근, 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육> **41**(**1**), pp.91-100.

김병무 (2002)., 변의 길이가 특별한 길이틀 이루는 삼각형, 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육> **41**(2), pp.203-213.

김병무 (2002). 공업수학을 위한 미분적분학의 이해, 서울 : 도서출판 신성.

이중권 (2002). Proof in Mathematics Education, 한국수학교육학회지 시리즈D <수학교육연구>, 제**7**권 **1**호, pp.1-12.

Don Hancock (2000). Divisibility of a near-product : an exercise in pattern discovery and proof by induction, *Mathematics and Computer Education*, Vol.**34** No. **1**, pp. 68~73.

Osler, Thomas J. and Wihelm, Michael (2001). Variation on Vieta's and Wallis' Products for π, *Mathematics and Computer Education*, Vol. **35**, No.**3**, Fall, pp.225-232.

Temple H. Fay (2000). An Introduction to Curves in Elliptic Coordinates, **Mathematics and Computer Education**, Vol.**34**, No.**2**, Spring, pp.169-176.