동적시스템 확장을 이용한 비선형시스템의 관측기 설계

論 文
53D-11-4

Nonlinear Observer Design using Dynamic System Extension

趙 南 熏†
(Nam-Hoon Jo)

Abstract - In this paper, we propose sufficient conditions under which nonlinear systems can be transformed into nonlinear observer canonical form in the extended state space by virtue of dynamic system extension. The proposed scheme weakens two major restrictions of observer error linearization technique. Once a nonlinear system is transformed into nonlinear observer canonical form using dynamic system extension, a state observer can be easily designed. Two illustrative examples are included in order to compare the proposed scheme and observer error linearization method.

Key Words : Nonlinear System, Observer Error Linearization, Nonlinear Observer Canonical Form, Dynamic System Extension

1. 서 론

비선형 시스템에 대한 제어기 설계기법은 최근 20여년간 매우 활발히 진행되어 온 연구 주제중의 하나이다.[1][2] 이러한 연구결과의 상당수는 시스템의 상태변수에 대한 모든 정보를 알고 있다는 가정하에서 사용될 수 있는 상태 궤환 제어기의 설계기법에 대한 것이다. 하지만, 모든 상태를 측정하는 것은 대부분의 경우에 매우 어려운 문제이고, 또 가능하다고 하더라도 몇몇 센서는 매우 고가이므로 실제 현장에서 모든 상태를 정확히 측정한다는 것은 거의 불가능하다. 따라서 비선형 시스템의 모든 상태를 측정할 필요가 없는 출력궤환 제어기에 대한 연구가 최근 활발히 수행되었으며, 이를 위한 상태관측기의 설계는 매우 중요한 문제이다.[3-10] Krener와 Isidori가 참고문헌 [3]에서 비선형 시스템을 비선형관측기표준형으로 변환하여 관측기를 설계하는 관측오차 선형화(observer error linearization) 기법을 제시한 이 후, 이 결과를 다중출력 시스템에 적용한 결과가 참고문헌 [4]와 [5]에서 제시되었다. 또한, 참고문헌 [6]과 [7]에서는 관측오차 선형화기법을 발전시켜 좀 더 일반적인 비선형을 고려할 수 있는 기법이 제시되었다. 참고문헌 [8]에서는 강인상대차수의 개념을 이용한 상태변환을 사용하여 관측기를 설계하기도 하였다. 최근에는 관측가능하지 않은 비선형시스템에 대한 관측기에 대한 결과가 참고문헌 [9]와 [10]에서 제시되었다. 한편, 동적시스템 확장(dynamic system extension)을 이용하여 n차원 비선형시스템을 n'차원 ($n'\geq n$) 선형시스템으로 변환한 후 제어기를 설계하는 기법이 참고문헌 [11]과 [12]에서 제시되었다. 이들이 제안한 기법은 기존의 궤환선형화기법(feedback linearization)을 적용하기 위하여 만족되어야 하는 조건들을 상당부분 완화시켰으며, 결과적으로 더욱 많은 비선형시스템에 대한 제어기설계가 가능하게 되었다.

본 논문에서는 동적시스템 확장기법을 이용한 관측오차 선형화기법을 제시하고자 한다. 즉, n 차원 비선형시스템을 n' 차원 ($n'\geq n$) 비선형관측기표준형으로 변환한 후 관측기를 설계하는 기법을 제안한다. 동적시스템 확장을 이용할 경우 제어기 설계에 매우 유용했던 것처럼[11][12], 제안될 기법은 기존의 관측오차 선형화기법이 필요로 하는 조건을 상당부분 완화시킬 수 있다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 2장에서는 참고문헌 [4][5]에서 제안한 비선형 시스템의 관측가능성과 관측오차 선형화를 이용한 비선형 관측기 설계기법을 소개한다. 3장에서는 동적시스템 확장을 이용한 관측오차 선형화 조건, 즉 주어진 비선형시스템에 안정한 선형시스템을 추가한 확장된 시스템이 관측오차 선형화가능하기 위한 조건을 제시한다. 4장에서는 예제를 통하여 제안된 관측기의 설계방법을 설명하고, 기존 기법에 대해 관측기 설계시 필요로 하는 조건이 매우 완화되었음을 보인다. 마지막으로 5장에서는 본 논문에 대한 결론을 제시한다.

시작하기 전에, 본 논문에서 사용되는 주요 용어를 정의하도록 한다 : 모든 고유치(eigenvalue)가 음의 실수부인 행렬을 Hurwitz행렬이라고 한다. 어떤 벡터장(vector field) f에 대해서, 미분방정식 $\dot{x}=f(x)$의 해가 모든 $t\in R$에 대해서 존재하면 벡터장 f를 완전(complete)하다고 한다. 어떤 벡터장 f: $R^n\rightarrow R^n$와 평활한 함수 $h: R^n\rightarrow R$에 대해서 $L_fh=\frac{\partial h}{\partial x}f$ 이고 $L_f^ih=L_f(L_f^{i-1}h)$, $i\geq 2$ 이다. 두 벡터장 $f: R^n\rightarrow R^n$와 $g: R^n\rightarrow R^n$의 Lie Bracket은 $[f,g]=\frac{\partial g}{\partial x}f-\frac{\partial f}{\partial x}g$ 로 정의된다. 두 벡터장 $f: R^n\rightarrow R^n$와 $g: R^n\rightarrow R^n$에 대해서 $ad_f^0g=g$ 이고 $ad_f^kg=[f, ad_f^{k-1}g]$, $i\geq 1$이다.

† 교신저자, 正會員 : 崇實大 工大 電氣制御시스템工學部 助敎授
E-mail : nhjo@ssu.ac.kr

接受日字 : 2004年 7月 22日
最終完了 : 2004年 10月 11日

2. 준비 지식

본 논문에서는 다음과 같은 다중입력 다중출력 비선형 시스템을 고려한다 :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x) \end{aligned} \qquad (1)$$

여기서, $x \in R^n$는 상태벡터, $u \in R^l$은 입력, $y \in R^m$은 출력이고 $f(0)=0,\ h(0)=0,\ g(x,0)=0,\ \forall x \in R^n$을 만족한다. 입력이 존재하는 시스템의 관측기 설계문제는 입력이 존재하지 않을 때와 큰 차이가 없으므로 여기서는 입력은 존재하지 않는 것으로 가정한다 [13]. 다중출력 비선형 시스템의 관측기를 설계하기 위해서는 우선, 시스템의 관측지수와 관측가능성에 대한 정의가 필요하다. 시스템 (1)에 대해서

$$\begin{aligned} s_0 &= \operatorname{rank}\{dh_i : 1 \le i \le m\} \\ &\ \vdots \\ s_k &= \operatorname{rank}\{dh_i, \cdots, d(L_f^k h_i) : 1 \le i \le m\} \\ &\quad - \operatorname{rank}\{dh_i, \cdots, d(L_f^{k-1} h_i) : 1 \le i \le m\} \\ &\ \vdots \\ s_{n-1} &= \operatorname{rank}\{dh_i, \cdots, d(L_f^{n-1} h_i) : 1 \le i \le m\} \\ &\quad - \operatorname{rank}\{dh_i, \cdots, d(L_f^{n-2} h_i) : 1 \le i \le m\} \end{aligned} \qquad (2)$$

를 정의하고, (2)를 이용하여 다시

$$k_i = \operatorname{card}\{s_j \ge i : 0 \le j \le n-1\} \qquad (3)$$

를 정의한다. (3)식으로부터 k_i는 항상 $k_1 \ge k_2 \ge \cdots \ge k_m$을 만족함을 알 수 있다.

정의 2.1 [4][13] 원점(origin) 근방(neighborhood) U가 존재하여 $s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}$가 원점 근방 U에서 상수이면, $(k_1, \cdots, k_m)$를 시스템 (1)의 **관측지수**라고 부른다. □

정의 2.2 [4][13] 원점 근방 U가 존재하여 $s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}$가 U에서 상수이고 출력 $y_1, \cdots, y_m$을 서로 적절히 교환한 후

$$\operatorname{rank}\{L_f^{j-1}(dh_i) : i=1,\cdots,m\ ; j=1,\cdots,k_i\} = n,\ \forall x \in U$$

이 만족되면, 시스템 (1)이 원점에서 **관측가능**하다고 한다. □

비선형 시스템의 관측가능성은 관측기를 설계하는데 반드시 필요한 조건으로, 대부분의 관측기 설계기법이 이 조건을 필요로 하고 있다. 이 중, 연구자들로부터 많은 관심을 받고 있는 관측오차 선형화 기법을 소개한다.

정의 2.3 [4][5] 원점 근방 U와 상태변환 $z=T(x)$가 존재하여, 출력 $y_1, \cdots, y_m$을 서로 적절히 교환한 후 U에서 시스템 (1)이 **비선형 관측기 표준형**

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + \gamma(y) \\ y &= Cz \end{aligned} \qquad (4)$$

으로 변환가능하면, 시스템 (1)이 **관측오차 선형화 가능 (observer error linearizable)**하다고 한다. 여기서

$$A = \text{block diag}[A_1, \cdots A_m]$$
$$C = \text{block diag}[c_1, \cdots, c_m]$$

이고 $A_i \in R^{k_i \times k_i}$, $c_i \in R^{1 \times k_i}$는 (5)와 같은 Brunovsky 표준 행렬이며 $(k_1, \cdots, k_m)$은 정의 2.1의 관측지수이다.

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5)$$
$$c_i = [0\ 0\ \cdots\ 0\ 1]$$

□

비선형 시스템 (1)이 상태변환 $z=T(x)$에 의하여 비선형 관측기 표준형 (4)로 변환가능한 경우, 비선형 관측기를 다음과 같이 간단히 설계할 수 있다. 관측기

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= A\hat{z} + \gamma(y) + K(y - C\hat{z}) \\ \hat{x} &= T^{-1}(\hat{z}) \end{aligned} \qquad (6)$$

에 대해서 관측오차를

$$e = \hat{z} - z$$

로 정의하면, (4)와 (6)으로부터 관측오차는

$$\dot{e} = (A - KC)e$$

를 만족한다. 따라서, 관측기 이득 K를 행렬 $(A-KC)$가 Hurwitz가 되도록 선정하면, 관측오차는 0으로 수렴하게 된다. 즉, 관측오차 선형화가능하면 비선형시스템의 관측기를 간단히 설계할 수 있음을 알 수 있다. 한편, 관측오차 선형화가능하기 위한 필요충분 조건이 참고문헌 [5][13]에서 제시되었는데, 이를 소개하기 위해서 출력 $y_1, \cdots, y_m$에 대해서 다음을 정의하자.

$$\begin{aligned} Q &= \{L_f^{j-1}(dh_i) : i=1,\cdots,m; j=1,\cdots,k_i\} \\ Q_j &= \{dh_i, \cdots, L_f^{k_i-1}(dh_i) : 1 \le i \le m,\ i \ne j\} \\ &\quad \cup \{dh_j, \cdots, L_f^{k_j-2}(dh_j)\} \end{aligned} \qquad (7)$$

정리 2.4 [5][13] 시스템 (1)이 관측오차 선형화 가능하기 위한 필요충분 조건은 다음을 만족하는 원점 근방 U가 존재하는 것이다.

(i) $s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}$이 U에서 상수이고, 출력 $y_1, \cdots, y_m$을 서로 적절히 교환하면

$$\operatorname{rank} Q = n,\ \forall x \in U$$

(ii) (i)의 교환된 출력 $y_1, \cdots, y_m$과 $j=1,\cdots,m$에 대해서

$$\operatorname{span} Q_j = \operatorname{span} Q \cap Q_j,\ \forall x \in U$$

(iii) (8)과 (9)를 만족하는 벡터장 $\tau_1, \cdots, \tau_m$이 존재한다.

$$L_{\tau_i} L_f^{k-1} h_j = \delta_{i,j} \delta_{k,k_i},\quad \begin{aligned} &1 \le i, j \le m \\ &1 \le k \le k_i \end{aligned} \qquad (8)$$

$$[ad_f^k \tau_i, ad_f^l \tau_j] = 0,\quad \begin{aligned} &1 \le i, j \le m \\ &0 \le k \le k_i - 1 \\ &0 \le l \le k_j - 1 \end{aligned} \qquad (9)$$

□

첨언 2.5 관측지수가 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m$인 경우에는 정리 2.4의 조건 (ii)가 항상 성립한다는 것을 보일 수 있다. 실제로, 관측지수가 $k_1 \ge k_2 \ge \cdots \ge k_m$를 항상 만족한다는 성질을 이용하면 $Q_j \cap Q$는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\begin{aligned} Q_j \cap Q &= \{ d(L_f^k h_i) : 0 \le k \le k_j - 1,\ 1 \le i < j \} \\ &\cup \{ d(L_f^k h_i) : 0 \le k \le k_i - 1,\ j < i \le m \} \\ &\cup \{ dh_j, \cdots, d(L_f^{k_j - 2} h_j) \} \end{aligned}$$

따라서, $k_1 = k_2 = \cdots = k_m$ 인 경우에는 모든 $1 \le j \le m$에 대해서

$$\begin{aligned} Q_j &= \{ dh_i, \cdots, L_f^{k_i - 1}(dh_i) : 1 \le i \le m,\ i \ne j \} \\ &\cup \{ dh_j, \cdots, L_f^{k_j - 2}(dh_j) \} \end{aligned}$$

이므로 항상 $Q_j \subset Q$이 성립하고 $Q_j \subset Q \cap Q_j$임을 알 수 있다. □

마지막으로 3장의 주요정리의 증명에서 필요한 보조정리를 소개하며, 증명은 간단하여 생략한다.

보조 정리 2.5 R^n에서 정의된 벡터장 $a : R^n \to R^n$, $b : R^n \to R^n$와 R^n에서 정의된 평활한 함수 $\alpha : R^n \to R^q$, $\beta : R^n \to R^q$에 대해서, R^{n+q}상의 벡터장

$$Y = \begin{bmatrix} a(x) \\ \cdots\cdots \\ \alpha(x) \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} b(x) \\ \cdots\cdots \\ \beta(x) \end{bmatrix}$$

이 $[Y, Z] = 0$이기 위한 필요충분조건은

$$\begin{aligned} [a(x), b(x)] &= 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} b - \frac{\partial \beta}{\partial x} a &= 0 \end{aligned}$$

이다. □

3. 동적확장에 의한 관측기 설계

이제, 비선형 시스템 (1)에 안정한 선형시스템을 추가하여 얻은 동적 확장된 시스템이 관측오차 선형화가능하기 위한 조건을 제시하고자 한다. 시스템 (1)의 j번째 출력 y_j을 입력으로 하고 시스템 차수 q_j인 다음과 같은 선형 시스템을 시스템 (1)에 추가하자.

$$\begin{aligned} \dot{w}_1^j &= -w_1^j + h_j(x) \\ \dot{w}_2^j &= -w_2^j + w_1^j \\ &\ \vdots \\ \dot{w}_{q_j}^j &= -w_{q_j}^j + w_{q_j - 1}^j \end{aligned} \tag{10}$$

물론, 위에서 하나의 출력뿐만 아니라 여러 개의 출력과 관련된 선형 시스템을 구성할 수 있으며, 이러한 출력들 y_j에 대해서는 $q_j \ge 1$가 된다. 앞으로의 편의를 위하여

$$w = [w_1^j, \cdots, w_{q_j}^j : 1 \le j \le m,\ q_j \ge 1]^T$$

를 정의하고 시스템 (10)을

$$\dot{w} = \alpha(w, y)$$

로 표시하자. 또한, 시스템 (10)에 대해서

$$v_j = \begin{cases} y_j(t), & \text{if } q_j = 0 \\ w_{q_j}^j, & \text{if } q_j \ge 1 \end{cases}$$

$$v = [v_1 \ \cdots \ v_m]^T \tag{11}$$

를 정의하자. (11)에서 정의되는 신호 v는 본 논문에서 가상출력(virtual output)이라고 부르며, 동적확장을 이용하여 설계된 관측기에서 사용된다. 추가되는 선형시스템의 전체차수

$$q = q_1 + \cdots q_m$$

와 집합

$$\begin{aligned} I^-(k) &= \{ i : 1 \le i \le m,\ q_i \le k \} \\ I(k) &= \{ i : 1 \le i \le m,\ q_i = k \} \\ I^+(k) &= \{ i : 1 \le i \le m,\ q_i \ge k \} \end{aligned} \tag{12}$$

을 정의하면 비선형 시스템 (1)에 선형시스템 (10)을 추가한 동적 확장된 시스템은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_E &= F(x_E) \\ v &= H(x_E) = [H_1, \cdots, H_m]^T \end{aligned} \tag{13}$$

여기서

$$\begin{aligned} x_E &= [x^T \ w^T]^T \\ w &= [w_1^j, \cdots, w_{q_j}^j : j \in I^+(1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x_E) &= \bar{f}(x) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \in I^+(1)}}^{m} [-w_1^j + h_j(x)] \frac{\partial}{\partial w_1^j} \\ &\quad + \sum_{\substack{j=1 \\ j \in I^+(2)}}^{m} \sum_{k=2}^{q_j} [-w_k^j + w_{k-1}^j] \frac{\partial}{\partial w_k^j} \end{aligned}$$

$$H_j(x_E) = \begin{cases} h_j, & \text{if } j \in I(0) \\ w_{q_j}^j, & \text{if } j \in I^+(1) \end{cases}$$

이고 $\bar{f}$는 확장된 상태공간 x_E에서 정의된 벡터장 f를 의미한다. 즉, 확장된 상태공간 x_E에서 정의된 $\bar{f}(x_E)$는

$$\bar{f}(x, w) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{q_j} 0 \ \frac{\partial}{\partial w_k^j}$$

이다. $1 \le k \le n + q - 1$에 대해서

$$\begin{aligned} \bar{s}_0 &= \mathrm{card}\{ q_i > 0 : 1 \le i \le m \} \\ &\quad + \mathrm{rank}\{ dh_i(x) : i \in I(0) \} \\ \bar{s}_k &= \mathrm{card}\{ q_i > k : 1 \le i \le m \} \\ &\quad + \mathrm{rank}\{ dh_i(x) \cdots, d(L_f^{k - q_i} h_i)(x) : i \in I^-(k) \} \\ &\quad - \mathrm{rank}\{ dh_i(x) \cdots, d(L_f^{k - q_i - 1} h_i)(x) : i \in I^-(k-1) \} \end{aligned} \tag{14}$$

를 정의하고, 확장된 시스템에서의 관측지수

$$\bar{k}_i = \mathrm{card}\{ \bar{s}_k \ge i : k \ge 0 \},\ 1 \le i \le m \tag{15}$$

를 정의한다. 또한, 확장된 시스템에서의 상태변환을 구할 때 필요한 함수

$$\phi_j^k = \begin{cases} L_f^{k-1} h_j & , j \in I(0) \\ \displaystyle\sum_{s=0}^{k-1} (-1)^{k-1-s} \binom{k + q_j - 2 - s}{q_j - 1} L_f^s h_j & , j \in I^+(1) \end{cases} \tag{16}$$

를 정의하고, (16)를 이용하여 벡터장 $\tau_1, \cdots, \tau_m$을 R^n에서

$$L_{\tau_i} \phi_j^k = \delta_{i,j} \delta_{k, \bar{k}_j - q_j},\ \ 1 \le i, j \le m,\ \ 1 \le k \le \bar{k}_i - q_j \tag{17}$$

로 정의하며, 다시 $\tau_1, \cdots, \tau_m$을 이용하여 ζ_i^k를 R^q에서 $k = 0, 1, 2, \cdots$ 에 대해서 귀납적으로 정의한다 :

$$\zeta_i^k = [\zeta_{i11}^k, \cdots, \zeta_{i1q_1}^k, \cdots, \zeta_{im1}^k, \cdots, \zeta_{imq_m}^k]^T \in R^q \tag{18}$$

여기서

$$\zeta_i^0 = 0_q \tag{19}$$

이고 $k \ge 1$인 경우에는

$$\zeta_{ijs}^k = \begin{cases} L_f \zeta_{ij1}^{k-1} + \zeta_{ij1}^{k-1} - L_{ad_f^{k-1} \tau_i} h_j, & s = 1 \\ L_f \zeta_{ijs}^{k-1} + \zeta_{ijs}^{k-1} - \zeta_{ij(s-1)}^{k-1}, & 2 \le s \le k \\ 0, & k < s \le q_j \end{cases} \tag{20}$$

이다. 이제, 다음 정리는 동적 확장된 시스템 (13)이 관측오차 선형화 가능하기 위한 조건을 제시한다.

정리 3.1 시스템 (1)에 대해서 원점 근방(neighborhood of the origin) U 와 정수 $q_1\geq 0,\cdots,q_m\geq 0$ 가 존재하여 U에서 아래의 조건 (i)과 (ii)를 만족하면, 비선형 시스템 (1)은 동적 확장에 의해 관측오차 선형화 가능하다.

(i) $\bar{s}_0,\bar{s}_1,\cdots,\bar{s}_{n+q-1}$이 상수이고 $\bar{k}_1=\cdots=\bar{k}_m$이며

$$\mathrm{rank}\{dh_i,\cdots,d(L_f^{\bar{k}_i-1}h_i):\ 1\leq i\leq m\} = n+q \tag{21}$$

(ii) (17), (22), (23)을 만족하는 벡터장 $\tau_1,\cdots\tau_m$이 존재한다 :

$$[ad_f^k\tau_i,\ ad_f^l\tau_j]=0,\quad \begin{array}{l}1\leq i,j\leq m\\ 0\leq k\leq \bar{k}_i-1\\ 0\leq l\leq \bar{k}_j-1\end{array} \tag{22}$$

$$\frac{\partial\zeta_i^k}{\partial x}ad_f^l\tau_j=0,\quad \begin{array}{l}1\leq i,j\leq m\\ 0\leq k\leq \bar{k}_i-1\\ 0\leq l\leq \bar{k}_j-1\\ (i,k)\neq(j,l)\end{array} \tag{23}$$

□

증명 : 주어진 시스템 (1)에 보조 시스템 (10)을 추가한 동적 확장 시스템 (13)이 정리 2.4의 모든 가정을 만족함을 보이도록 하자. 우선 확장 시스템 (13)에 대한 관측지수를 구하기 위하여 확장 시스템 (13)의 $s_0,s_1,\cdots,s_{n+q-1}$를 구해보자.

$$\begin{aligned}s_0 &= \mathrm{rank}\{dH_i(x_E):1\leq i\leq m\}\\ &= \mathrm{rank}\{dw^i_{q_i}:\ i\in I^+(1)\}+\mathrm{rank}\{dh_i(x):\ i\in I(0)\}\\ &= \mathrm{card}\{q_i>0\ :\ 1\leq i\leq m\}+\mathrm{rank}\{dh_i(x):\ i\in I(0)\}\\ &= \bar{s}_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_k &= \mathrm{rank}\{dH_i,\cdots,d(L_F^kH_i)\ :1\leq i\leq m\}\\ &\qquad -\mathrm{rank}\{dH_i,\cdots,d(L_F^{k-1}H_i)\ :1\leq i\leq m\}\\ &= \mathrm{rank}\big(\{dw^i_{q_i},\cdots,dw^i_{q_i-k}:\ i\in I^+(k+1)\}\\ &\qquad\quad \cup\{dw^i_{q_i},\cdots,dw^i_1:\ i\in I^-(k)\}\big)\\ &\quad +\mathrm{rank}\{dh_i(x),\cdots,d(L_f^{k-q_i}h_i)(x):\ i\in I^-(k)\}\\ &\quad -\mathrm{rank}\big(\{dw^i_{q_i},\cdots,dw^i_{q_i-k+1}:\ i\in I^+(k)\}\\ &\qquad\quad \cup\{dw^i_{q_i},\cdots,dw^i_1:\ i\in I^-(k-1)\}\big)\\ &\quad -\mathrm{rank}\{dh_i(x),\cdots,d(L_f^{k-q_i-1}h_i)(x):\ i\in I^-(k-1)\}\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}&\{dw^i_{q_i},\cdots,dw^i_{q_i-k+1}:\ i\in I^+(k)\}\\ &= \{dw^i_{q_i},\cdots,dw^i_{q_i-k+1}:\ i\in I^+(k+1)\}\\ &\qquad \cup\{dw^i_{q_i},\cdots,dw^i_{q_i-k+1}:\ i\in I(k)\}\\ &= \{dw^i_{q_i},\cdots,dw^i_{q_i-k+1}:\ i\in I^+(k+1)\}\\ &\qquad \cup\{dw^i_{q_i},\cdots,dw^i_1:\ i\in I(k)\}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}s_k &= \mathrm{rank}\big(\{dw^i_{q_i},\cdots,dw^i_{q_i-k}:\ i\in I^+(k+1)\}\\ &\qquad\quad \cup\{dw^i_{q_i},\cdots,dw^i_1:\ i\in I^-(k)\}\big)\\ &\quad +\mathrm{rank}\{dh_i(x),\cdots,d(L_f^{k-q_i}h_i)(x):\ i\in I^-(k)\}\\ &\quad -\mathrm{rank}\big(\{dw^i_{q_i},\cdots,dw^i_{q_i-k+1}:\ i\in I^+(k+1)\}\\ &\qquad\quad \cup\{dw^i_{q_i},\cdots,dw^i_1:\ i\in I^-(k)\}\big)\\ &\quad -\mathrm{rank}\{dh_i(x),\cdots,d(L_f^{k-q_i-1}h_i)(x):\ i\in I^-(k-1)\}\\ &= \mathrm{rank}\{dw^i_{q_i-k}:\ i\in I^+(k+1)\}\\ &\quad +\mathrm{rank}\{dh_i(x),\cdots,d(L_f^{k-q_i}h_i)(x):\ i\in I^-(k)\}\\ &\quad -\mathrm{rank}\{dh_i(x),\cdots,d(L_f^{k-q_i-1}h_i)(x):\ i\in I^-(k-1)\}\\ &= \mathrm{card}\{q_i\geq k+1\ :1\leq i\leq m\}\\ &\quad +\mathrm{rank}\{dh_i(x),\cdots,d(L_f^{k-q_i}h_i)(x):\ i\in I^-(k)\}\\ &\quad -\mathrm{rank}\{dh_i(x),\cdots,d(L_f^{k-q_i-1}h_i)(x):\ i\in I^-(k-1)\}\\ &= \bar{s}_k,\quad 0<k\leq n+q-1\end{aligned}$$

이다. 따라서 가정 (i)에 의하여 확장 시스템 (13)의 $s_0,\cdots,s_{n+q-1}$은 U에서 상수이고, 결과적으로 확장 시스템 (13)의 관측지수 $\bar{k}_1,\cdots,\bar{k}_m$도 상수이며, (21)에 의하여 확장 시스템 (13)이 정리 2.4의 가정 (i)을 만족한다. 또한, 가정 (i)에 의하여 $\bar{k}_1=\cdots=\bar{k}_m$이므로 첨언 2.5에 의하여 정리 2.4의 가정 (ii)를 만족함을 쉽게 알 수 있다.

마지막으로 확장 시스템 (13)이 정리 2.4의 가정 (iii)을 만족하는 것을 보이도록 하자. 먼저

$$\begin{aligned}W_j^k(w) &= \sum_{s=0}^{\min(q_j,k)-1}(-1)^{k-1-s}\binom{k-1}{s}w^j_{q_j-s},\quad k\geq 1\\ X_j^k(x) &= \sum_{s=q_j}^{k-1}(-1)^{k-1-s}\binom{k+q_j-2-s}{q_j-1}L_f^{s-q_j}h_j,\quad k\geq q_j+1\end{aligned} \tag{24}$$

을 정의하면 $j\in I(0)$에 대해서

$$L_F^{k-1}H_j=L_f^{k-1}h_j,\quad k\geq 0$$

을 얻을 수 있고, $j\in I^+(1)$에 대해서는 약간의 계산을 통하여

$$L_F^{k-1}H_j=\begin{cases}W_j^k(w), & 1\leq k\leq q_j\\ X_j^k(x)+W_j^k(w), & k\geq q_j+1\end{cases}$$

을 얻을 수 있다. 새로운 벡터장 $\bar{\tau}_i,\ 1\leq i\leq m$

$$\bar{\tau}_i=\begin{bmatrix}\tau_i\\ \cdots\\ 0_q\end{bmatrix} \tag{25}$$

을 정의하면($0_q\in R^q$는 $0_q=[0\ \ 0\ \cdots\ 0]^T$), $j\in I(0)$에 대해서 $q_j=0$이므로

$$\begin{aligned}L_{\bar{\tau}_i}L_F^{k-1}H_j &= \left[\frac{\partial L_f^{k-1}h_j}{\partial x}\ \ \frac{\partial L_f^{k-1}h_j}{\partial w}\right]\begin{bmatrix}\tau_i\\ 0_q\end{bmatrix}\\ &= L_{\tau_i}L_f^{k-1}h_j\\ &= \delta_{i,j}\delta_{k,\bar{k}_j-q_j}\\ &= \delta_{i,j}\delta_{k,\bar{k}_j},\qquad 1\leq i\leq m\end{aligned}$$

이다. 또한, $j\in I^+(1)$에 대해서는 $1\leq k\leq q_j$일 때

$$\begin{aligned}L_{\bar{\tau}_i}L_F^{k-1}H_j &= \left[\frac{\partial W_j^k(w)}{\partial x}\ \ \frac{\partial W_j^k(w)}{\partial w}\right]\begin{bmatrix}\tau_i\\ 0_q\end{bmatrix}\\ &= \left[0_n^T\ \ \frac{\partial W_j^k(w)}{\partial w}\right]\begin{bmatrix}\tau_i\\ 0_q\end{bmatrix}\\ &= 0,\qquad 1\leq i\leq m\end{aligned}$$

이며, $q_j+1\leq k$일 때

$$\begin{aligned}L_{\bar{\tau}_i}L_F^{k-1}H_j &= \left[\frac{\partial X_j^k(x)}{\partial x}\ \ \frac{\partial W_j^k(w)}{\partial w}\right]\begin{bmatrix}\tau_i\\ 0_q\end{bmatrix}\\ &= L_{\tau_i}X_j^k(x)\\ &= L_{\tau_i}\psi_j^{k-q_i},\qquad 1\leq i\leq m\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$L_{\bar{\tau}_i}L_F^{k-1}H_j=\delta_{i,j}\delta_{k,\bar{k}_j},\quad \begin{array}{l}1\leq i,j\leq m\\ 1\leq k\leq \bar{k}_i\end{array} \tag{26}$$

이다. 이제, 모든 $k=0,1,\cdots,\bar{k}_i-1$에 대해서

$$ad_F^k\bar{\tau}_i=\begin{bmatrix} ad_f^k\tau_i \\ \cdots\cdots \\ \zeta_i^k \end{bmatrix} \tag{27}$$

이 성립함을 보이도록 하자. 먼저 $k=0$인 경우에는 (25)에 의하여

$$\begin{aligned} ad_F^0\bar{\tau}_i &= \bar{\tau}_i \\ &= \begin{bmatrix} \tau_i \\ \cdots \\ 0_q \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이고, (19)를 사용하면

$$\begin{bmatrix} ad_f^0\tau_i \\ \cdots\cdots \\ \zeta_i^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_i \\ \cdots \\ 0_q \end{bmatrix}$$

이므로 (27)이 성립함을 알 수 있다. $k\geq 1$인 경우에 대해서 (27)를 보이기 위하여 귀납법을 사용한다. 즉,

$$ad_F^k\bar{\tau}_i=\begin{bmatrix} ad_f^k\tau_i \\ \cdots\cdots \\ \zeta_i^k \end{bmatrix} \tag{28}$$

이고

$$\frac{\partial\zeta_i^k}{\partial w}=0$$

라고 가정할 때

$$ad_F^{k+1}\bar{\tau}_i=\begin{bmatrix} ad_f^{k+1}\tau_i \\ \cdots\cdots \\ \zeta_i^{k+1} \end{bmatrix}$$

이고

$$\frac{\partial\zeta_i^{k+1}}{\partial w}=0$$

임을 보이도록 하자.

$$\begin{aligned} ad_F^{k+1}\bar{\tau}_i &= \left[\begin{bmatrix} f(x) \\ \cdots\cdots \\ \alpha(x,w) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ad_f^k\tau_i \\ \cdots\cdots \\ \zeta_i^k \end{bmatrix}\right] \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial ad_f^k\tau_i}{\partial x} & \dfrac{\partial ad_f^k\tau_i}{\partial w} \\ \dfrac{\partial\zeta_i^k}{\partial x} & \dfrac{\partial\zeta_i^k}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \cdots \\ \alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial w} \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial x} & \dfrac{\partial\alpha}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ad_f^k\tau_i \\ \cdots\cdots \\ \zeta_i^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial ad_f^k\tau_i}{\partial x} & 0_{n\times q} \\ \dfrac{\partial\zeta_i^k}{\partial x} & 0_{q\times q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \cdots \\ \alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & 0 \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial x} & \dfrac{\partial\alpha}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ad_f^k\tau_i \\ \cdots\cdots \\ \zeta_i^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial ad_f^k\tau_i}{\partial x} f \\ \dfrac{\partial\zeta_i^k}{\partial x} f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} ad_f^k\tau_i \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial x} ad_f^k\tau_i + \dfrac{\partial\alpha}{\partial w}\zeta_i^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ad_f^{k+1}\tau_i \\ \dfrac{\partial\zeta_i^k}{\partial x} f - \dfrac{\partial\alpha}{\partial x} ad_f^k\tau_i - \dfrac{\partial\alpha}{\partial w}\zeta_i^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이므로 $n+1$번째 행은

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\zeta_{i1}^k}{\partial x} f - \frac{\partial h_i}{\partial x} ad_f^k\tau_i - [-1\ \ 0\ \cdots 0]\,\zeta_i^k \\ &= L_f\zeta_{i1}^k + \zeta_{i1}^k - L_{ad_f^k\tau_i}h_i \end{aligned}$$

이고 $n+s$ $(s\geq 2)$번째 행은

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\zeta_{is}^k}{\partial x} f - [0\ \ 1\ \ -1\ \cdots 0]\,\zeta_i^k \\ &= L_f\zeta_{is}^k + \zeta_{is}^k - \zeta_{i(s-1)}^k \end{aligned}$$

이다. 따라서 $k\geq 1$에 대해서 (27)이 성립함이 증명되었다. 자기자신과의 Lie Bracket은 항상 0 이라는 사실을 이용하고 가정 (ii)의 (22), (23)을 보조정리 2.5에 적용하면

$$\left[\begin{bmatrix} ad_f^k\tau_i \\ \cdots\cdots \\ \zeta_i^k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ad_f^l\tau_j \\ \cdots\cdots \\ \zeta_j^l \end{bmatrix}\right]=0, \quad \begin{aligned} &1\leq i,j\leq m \\ &0\leq k\leq \bar{k}_i-1 \\ &0\leq l\leq \bar{k}_j-1 \end{aligned}$$

이고 (27)을 이용하면

$$[ad_F^k\bar{\tau}_i, ad_F^l\bar{\tau}_j]=0, \quad \begin{aligned} &1\leq i,j\leq m \\ &0\leq k\leq \bar{k}_i-1 \\ &0\leq l\leq \bar{k}_j-1 \end{aligned}$$

이다. 윗식과 (26)으로부터 확장 시스템 (13)이 정리 2.4의 가정 (iii)을 만족하고, 결국 확장 시스템 (13)이 관측오차 선형화 가능하여

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az+\gamma(v), \quad z\in R^{n+q} \\ v &= Cz, \quad v\in R^m \end{aligned} \tag{29}$$

로 변환가능하다. 여기서 A, C는 정의 2.3에서의 A, C와 동일한 형태의 행렬이다. □□□

정리 3.1에서 제안된 기법은 기존의 관측오차 선형화기법이 필요로 하는 조건을 상당부분 완화시킬 수 있다. 실제로, 4장에서는 예제를 통하여 제안된 관측기의 설계방법을 설명하고, 기존 기법과 비교하여 관측기 설계시 필요로 하는 조건이 매우 완화되었음을 보일 것이다.

첨언 3.2 비선형 시스템 (1)이 동적확장에 의해 관측오차 선형화 가능한 경우, 관측기 설계방법은 다음과 같다. 동적 확장된 시스템 (13)이 상태변환 $z=T(x,w)$에 의하여 R^{n+q} 상의 비선형 관측기 표준형 (29)로 변환된다면, 시스템 (1)의 비선형 관측기는

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= A\hat{z}+\gamma(v)+K(v-C\hat{z}) \\ v &= H(w,y) \\ \dot{w} &= \alpha(w,y) \\ \hat{x} &= S(\hat{z}) \end{aligned} \tag{30}$$

로 주어진다. 여기서 $S(z): R^{n+q}\to R^n$는 $z=T(S(z),w)$ 를 만족하는 함수이고 관측기 이득 K은 행렬 $A-KC$이 Hurwitz가 되도록 선정한다. (29)와 (30)으로부터 확장된 공간에서의 관측오차 $e_E=\hat{z}-z$는 $\dot{e}_E=(A-KC)e_E$를 만족하고 $A-KC$가 Hurwitz이므로 e_E는 시간이 증가함에 따라 0으로 수렴하게 된다. □

첨언 3.3 주어진 시스템을 비선형 관측기 표준형으로 변환해주는 상태변환 $z=T(x_E)$를 구하기 위해서는

$$\frac{\partial T}{\partial x_E}=[\bar{\tau}_1, ad_{(-F)}\bar{\tau}_1,\cdots, ad_{(-F)}^{\bar{k}_1-1}\bar{\tau}_1,\cdots,\bar{\tau}_m,\cdots, ad_{(-F)}^{\bar{k}_m-1}\bar{\tau}_m]^{-1}$$

를 만족하는 편미분 방정식을 풀어야 한다.[5][13] □

시스템 (1)의 $s_0, s_1,\cdots,s_{n-1}$이 상수인 경우에는(즉, k_1이 상수인 경우), 정리 3.1을 사용할 때 추가되는 선형시스템의 차수를 사전에 알 수 있어서 정리 3.1의 조건을 확인하는 것이 훨씬 용이하다.

보조정리 3.4 $s_0, s_1,\cdots,s_{n-1}$가 상수인 시스템 (1)에 대해

원점 근방 U와 정수 $q_1 \geq 0, \cdots, q_m \geq 0$(단, $q_1 + \cdots + q_m = mk_1 - n$)가 존재하여 U에서 아래의 조건 (i)-(ii)를 만족하면, 비선형 시스템 (1)은 동적 확장에 의해 관측오차 선형화 가능하다.

(i) $\bar{s}_0, \bar{s}_1, \cdots, \bar{s}_{n+q-1}$이 U에서 상수이고

$$\bar{s}_0 = \bar{s}_1 = \cdots = \bar{s}_{k_1-1} = m$$

(ii) (17), (22), (23) ($\bar{k}_i$, $1 \leq i \leq m$ 대신 k_1을 사용함)을 만족하는 벡터장 $\tau_1, \cdots \tau_m$이 존재한다. □

증명 : 정리 3.1의 증명과 마찬가지 방법으로 확장 시스템 (13)의 $s_0, \cdots, s_{n+q-1}$은 U에서 항상 상수이다. 또한 확장 시스템 (13)의 관측지수 $\overline{k_1}, \cdots, \overline{k_m}$를 계산하면

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 &= \mathrm{card}\{\bar{s}_j \geq 1\} = k_1 \\ &\vdots \\ \bar{k}_m &= \mathrm{card}\{\bar{s}_j \geq m\} = k_1 \end{aligned} \tag{31}$$

이고 U에서

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}\, Q &= \bar{s}_0 + \bar{s}_1 + \cdots + \bar{s}_{k_1-1} \\ &= m + m + \cdots + m \\ &= mk_1 \\ &= n + q \end{aligned}$$

이므로 확장 시스템 (13)이 정리 2.4의 가정 (i)을 만족한다. 또한, (31)에 의하여 $\bar{k}_1 = \cdots = \bar{k}_m$이므로 첨언 2.5에 의하여 정리 2.4의 가정 (ii)를 만족함을 쉽게 알 수 있다. 마지막으로 (31)과 가정 (ii)을 사용하면 정리 2.4의 가정 (iii)을 만족하므로, 확장 시스템(13)이 관측오차 선형화 가능함을 알 수 있다. □□□

4. 설계예제

본 절에서는 3절에서 제안된 기법이 관측오차 선형화가능하기 위한 조건을 매우 완화시킬 수 있다는 것을 예제를 통하여 보인다. 즉, 정리 2.4의 가정 (i)의 $s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}$가 U에서 상수가 아니거나, 또는 가정 (ii)의 span Q_j= span $Q \cap Q_p$ $\forall x \in U$를 만족하지 않는 경우에 대해서도 동적확장에 의해 관측오차 선형화가능하다는 것을 보이도록 하자.

예제 4.1 다음 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 x_3 \qquad y_1 = x_1 \\ & \qquad\qquad\quad\;\; y_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_2 \end{aligned} \tag{32}$$

즉, $f = [x_2 \quad x_2x_3 \quad x_2]^T$이다. 우선 이 시스템은 s_0, s_1, s_2가 상수이고 $(k_1, k_2) = (2,1)$ 이지만 정리 2.4의 가정 (ii)를 만족하지 않아서 관측오차 선형화 가능하지 않다는 것이 알려져 있는 유명한 예제이다.[5][13] 이제, 보조정리 3.4를 적용하면, $q_1 + q_2 = 4 - 3 = 1$이므로 $q_1 = 0$, $q_2 = 1$이거나 또는 $q_1 = 1$, $q_2 = 0$일 수밖에 없다. $q_1 = 1$, $q_2 = 0$로 정하면 (14)에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{s_0} &= \mathrm{card}\{q_i > 0 : 1 \leq i \leq 2\} + \mathrm{rank}\{dh_i : q_i = 0\} \\ &= \mathrm{card}\{q_1\} + \mathrm{rank}\{dh_2\} \\ &= 1 + \mathrm{rank}[0 \ 0 \ 1] \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{s_1} &= \mathrm{card}\{q_i > 1 : 1 \leq i \leq 2\} + \mathrm{rank}\{dh_1, \ dh_2 \ , dL_f h_2\} \\ &\qquad - \mathrm{rank}\{dh_2\} \\ &= 0 + \mathrm{rank}\{[1 \ 0 \ 0], [0 \ 0 \ 1], [0 \ 1 \ 0]\} - \mathrm{rank}\{[0 \ 0 \ 1]\} \\ &= 0 + 3 - 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

를 얻을 수 있고 보조정리 3.4의 가정 (i)을 만족함을 알 수 있다. 한편, 가정 (ii)을 만족하는지 확인하기 위해서는 τ_1, τ_2를 구해야 하고, 이를 위해서 ϕ_j^k이 필요하다. (16)에 의하여, $\phi_1^1 = h_1 = x_1$, $\phi_2^1 = h_2 = x_3$, $\phi_2^2 = L_f h_2 = x_2$이므로 (17)로부터

$$\begin{bmatrix} d\phi_1^1 \\ d\phi_2^1 \\ d\phi_2^2 \end{bmatrix} \tau_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} d\phi_1^1 \\ d\phi_2^1 \\ d\phi_2^2 \end{bmatrix} \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

을 얻을 수 있고,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tau_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \tau_1 &= [1 \quad 0 \quad 0]^T \\ \tau_2 &= [0 \quad 1 \quad 0]^T \end{aligned} \tag{33}$$

이고

$$\begin{aligned} ad_f\tau_1 &= [0 \quad 0 \quad 0]^T \\ ad_f\tau_2 &= [-1 \quad -x_3 \quad -1]^T \end{aligned} \tag{34}$$

이다. Lie Bracket의 성질로부터

$$[\tau_1, \tau_1] = [\tau_2, \tau_2] = [ad_f\tau_1 ad_f\tau_1] = [ad_f\tau_2, ad_f\tau_2] = 0$$

이고 (33)과 (34)로부터

$$\begin{aligned} [\tau_1, \tau_2] &= [\tau_1, ad_f\tau_1] = [\tau_1, ad_f\tau_2] = 0 \\ [\tau_2, ad_f\tau_1] &= [\tau_2, ad_f\tau_2] = 0 \\ [ad_f\tau_1, ad_f\tau_2] &= 0 \end{aligned}$$

을 얻을 수 있어서 (22)를 만족함을 알 수 있다. 또한,

$$\begin{aligned} \zeta_1^0 &= 0 \\ \zeta_1^1 &= [\zeta_{111}^1] = L_f\zeta_{111}^0 + \zeta_{111}^0 - L_{ad_f^0\tau_1} h_1 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_2^0 &= 0 \\ \zeta_2^1 &= [\zeta_{211}^1] = L_f\zeta_{211}^0 + \zeta_{211}^0 - L_{ad_f^0\tau_2} h_1 = 0 \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{\partial \zeta_i^k}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, \quad k = 0, 1 \tag{35}$$

이다. 따라서

$$\frac{\partial \zeta_i^k}{\partial x} ad_f^l\tau_j = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad k, l = 0, 1$$

이므로 (23)을 만족하여 보조정리 3.4의 가정 (ii)도 만족된다. 결과적으로, 보조정리 3.4에 의하여 시스템 (32)는 동적확장에 의하여 적응관측기 표준형으로 변환가능하다. 즉, 시스템 (32)를 동적 확장한 시스템

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2x_3 \qquad v_1 = w \\ \dot{x}_3 &= x_2 \qquad\quad\; v_2 = x_3 \\ \dot{w} &= -w + x_1 \end{aligned} \tag{36}$$

이 비선형 관측기 표준형으로 변환가능하며, 이때의 상태변환은 첨언 3.3과 (27)에 의하여

$$\frac{\partial T}{\partial x_E} = [\overline{\tau_1}, ad_{(-F)}\overline{\tau_1}, \overline{\tau_2}, ad_{(-F)}\overline{\tau_2}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

을 만족한다. 따라서 상태변환은

$$z = T(x, w) = [x_1 - x_3 \quad w \quad x_2 - \frac{1}{2}x_3^2 \quad x_3]$$

로 계산되고, 새로운 좌표계에서 시스템 (36)은

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_3 = 0 \\ \dot{z}_2 &= \dot{w} = z_1 + (v_2 - v_1) \\ \dot{z}_3 &= \dot{x}_2 - x_3\dot{x}_3 = 0 \\ \dot{z}_4 &= \dot{x}_3 = z_3 + \frac{1}{2}v_2^2 \end{aligned}$$

로 표현되며 최종적인 비선형 관측기는 첨언 3.2로부터

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_1 &= k_{11}(v_1 - \hat{z}_2) \\ \dot{\hat{z}}_2 &= \hat{z}_1 + (v_2 - v_1) + k_{12}(v_1 - \hat{z}_2) \\ \dot{\hat{z}}_3 &= k_{21}(v_2 - \hat{z}_4) \\ \dot{\hat{z}}_4 &= \hat{z}_3 + \frac{1}{2}v_2^2 + k_{22}(v_2 - \hat{z}_4) \\ v_1 &= w \\ v_2 &= x_3 \end{aligned}$$

$$[\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad \hat{x}_3 \quad \hat{w}] = [\hat{z}_1 + \hat{z}_4 \quad \hat{z}_3 + \frac{1}{2}\hat{z}_4^2 \quad \hat{z}_4 \quad \hat{z}_2]$$

로 주어진다. 여기서 관측기 이득은

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ k_{12} & 0 \\ 0 & k_{21} \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이 Hurwitz행렬이 되도록 선정한다.

예제 4.2 본 예제의 목적은 비선형시스템

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_4 & y_1 &= x_1 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_4 + x_2^2 & y_2 &= x_3 \\ \dot{x}_4 &= x_1^2 \end{aligned} \tag{37}$$

이 정리 2.4의 조건 (i)를 만족하지 않아 원점근방에서 관측오차 선형화 가능하지 않지만, 본 논문에서 제안한 동적확장에 의해 관측오차 선형화가능하다는 것을 보이는 것이다. 먼저,

$$\begin{bmatrix} dh_1 \\ dL_f h_1 \\ dL_f^2 h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dh_2 \\ dL_f h_2 \\ dL_f^2 h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 2x_2 & 0 & x_1 \\ 3x_1^2 & 3x_4 & 0 & 3x_2 \end{bmatrix}$$

이므로

$$\begin{aligned} s_0 &= 2 \\ s_1 &= 1 + \text{rank}\{[x_4 \quad 2x_2 \quad 0 \quad x_1]\} \\ s_2 &= 1 + \text{rank}\{[3x_1^2 \quad 3x_4 \quad 0 \quad 3x_2]\} \end{aligned}$$

이어서 정리 2.4의 조건 (i)을 만족하지 않는다. 이제, 정리 3.1을 적용하기 위하여 $q_1 = 0$, $q_2 = 2$로 정하면 약간의 계산에 의하여 $\overline{s_0} = 2$, $\overline{s_1} = 2$, $\overline{s_2} = 2$와 $\overline{k_1} = \overline{k_2} = 3$을 얻을 수 있어 조건 (i)을 만족함을 알 수 있다. 이제, 조건 (ii)를 확인하기 위하여 (17)을 만족하는 벡터장 τ_1과 τ_2를 구하자. (16)과 (17)로부터

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tau_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

을 얻을 수 있고,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \\ \tau_2 &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T \end{aligned} \tag{38}$$

로 정할 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned} ad_f\tau_1 &= [0 \quad -1 \quad -x_1 \quad 0]^T \\ ad_f\tau_2 &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} ad_f^2\tau_1 &= [1 \quad 0 \quad x_2 \quad 0]^T \\ ad_f^2\tau_2 &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \end{aligned} \tag{40}$$

이고, 약간의 계산에 의하여 (22)를 만족함을 확인할 수 있다. 또한, 간단한 계산에 의하여 $\zeta_1^0 = [0\ 0]^T$, $\zeta_1^1 = [0\ 0]^T$, $\zeta_1^2 = [x_1 \quad 0]^T$, $\zeta_2^0 = [0\ 0]^T$, $\zeta_2^1 = [-1\ 0]^T$, $\zeta_2^2 = [-1\ 1]^T$을 얻을 수 있고, 이로부터 (23)을 만족함을 확인할 수 있다. 따라서, 정리 3.1로부터 시스템 (37)은 동적확장에 의하여 관측오차 선형화 가능하고, 상태변환을 구하는 식은 첨언 3.3으로부터

$$\frac{\partial T}{\partial x_E} = [\overline{\tau_1}, ad_{(-F)}\overline{\tau_1}, ad_{(-F)}^2\overline{\tau_1}, \overline{\tau_2}, ad_{(-F)}\overline{\tau_2}, ad_{(-F)}^2\overline{\tau_2}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & -x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이다. 결국, 시스템 (37)의 동적 확장된 시스템

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_4 + x_2^2 & v_1 &= x_1 \\ \dot{x}_4 &= x_1^2 & v_2 &= w_2 \\ \dot{w}_1 &= -w_1 + x_3 \\ \dot{w}_2 &= -w_2 + w_1 \end{aligned} \tag{41}$$

을 관측기 표준형으로 변환시켜주는 상태변환은

$$z = T(x, w) = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_1 \\ -x_1x_2 + x_3 \\ -\frac{1}{2}x_1^2 + w_1 + w_2 \\ w_2 \end{bmatrix} \tag{42}$$

이고, 시스템 (41)은 새로운 좌표계에서 비선형 관측기 표준형

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= v_1^2 \\ \dot{z}_2 &= z_1 \\ \dot{z}_3 &= z_2 \\ \dot{z}_4 &= 0 \\ \dot{z}_5 &= z_4 - v_2 \\ \dot{z}_6 &= z_5 - 2v_2 + \frac{1}{2} v_1^2 \end{aligned}$$

으로 표현된다. 최종적인 관측기 설계는 예제 4.1과 유사하므로 생략하도록 한다.

5. 결 론

본 논문에서는 주어진 비선형 시스템에 선형 동적 시스템을 추가한 후 비선형 관측기 표준형(nonlinear observer canonical form)으로 변환하는 기법을 제안하고, 이를 이용하여 비선형 시스템의 관측기를 설계할 수 있음을 제시하였다. 특히, 두개의 예제를 통하여 기존의 관측오차 선형화기법의 첫 번째 두 가지 조건을 만족하지 않는 경우에도, 제안된 기법이 적용 가능함을 입증하였다. 차후의 연구과제로는 본 연구 결과를 실제 시스템에 적용할 때 발생할 수 있는 문제점에 대한 추가적인 연구가 필요할 것으로 보인다.

감사의 글

본 연구는 숭실대학교 교내연구비 지원으로 수행되었음.

참 고 문 헌

[1] A. Isidori, Nonlinear Control Systems, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[2] H. Nijmeijer and A.J. van der Schaft, Nonlinear Dynamical Control Systems. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[3] A. J. Krener, and A. Isidori, "Linearization by output injection and nonlinear observers," Systems and Control Letters, vol. 3, pp. 47-52, 1983.

[4] A. J. Krener and W. Respondek, "Nonlinear observers with linearizable error dynamics," SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 23, pp. 197-216, 1985.

[5] X. H. Xia and W. B. Gao, "Nolinear observer design by observer error linearization," SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 27, pp. 199-216, 1989.

[6] J. Rudolph and M. Zeitz, "A block triangular nonlinear observer normal form," Systems and Control Letters, vol. 23, pp. 1-8, 1994.

[7] G. Besancon, "On output transformations for state linearization up to output injection," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 44, pp. 1975-1981, 1999.

[8] N. H. Jo, and J. H. Seo, "A state observer for nonlinear systems and its application to ball and beam systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 45, pp. 968-973, 2000.

[9] N. H. Jo, and J. H. Seo, "Input output linearization approach to state observer design for nonlinear systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 45, pp. 2388-2393, 2000.

[10] N. H. Jo and J. H. Seo, "Observer design for nonlinear systems that are not uniformly observable," Int. J. Contr., vol. 75, no. 5, pp. 369-380, 2002.

[11] B. Charlet, J. Levine, and R. Marino, "Sufficient Conditions for Dynamic State Feedback Linearization," SIAM J. Control Optim., vol. 29, no. 1, pp. 38-57, 1991.

[12] M. Guay, P.J. Mclellan, and D.W. Bacon, "A condition for dynamic feedback linearization of control-affine nonlinear systems," Int. J. Contr., vol. 68, pp. 87-106, 1997.

[13] R. Marino and P. Tomei, Nonlinear Control Design (Prentice Hall, London: 1995)

저 자 소 개

조 남 훈(趙 南 薰)

1992년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 2000년 서울대 대학원 전기공학부 졸업(공박). 2000년~2001년 서울대 자동화시스템공동연구소 연구원. 2001년~2002년 삼성전자 DVS사업부 책임연구원. 2002년~현재 숭실대학교 전기제어시스템공학부 조교수.

Tel : 02-820-0643

E-mail : nhjo@ssu.ac.kr

Homepage : http://ee.ssu.ac.kr/~nhjo