

비선형 시스템의 동적 출력 궤환 수동화와 유연 관절 로봇에의 적용

Dynamic Output Feedback Passivation of Nonlinear Systems with Application to Flexible Joint Robots

손 영 익, 김 갑 일*, 임 승 철
(Young-Ik Son, Kab-Il Kim, and Seungchul Lim)

Abstract : Output feedback passivation problem is studied when the given system is not minimum-phase or does not have relative degree one. Using a parallel connection with an additional dynamics, the authors provide a dynamic output feedback control law which renders the composite system passive. Sufficient conditions are presented under which the composite system is output feedback passive. As an application of the dynamic passivation scheme, a point-to-point control law for a flexible joint robot is presented when only the position measurements are available. This provides an alternative way of replacing the role of the velocity measurements for the proportional-derivative (PD) feedback law. The performance of the proposed control law is illustrated in the simulation studies of a manipulator with three revolute elastic joints.

Keywords : (feedback) passivity, parallel feedforward compensation, output feedback, flexible joint robot, PD control

I. 서론

수동(passive) 시스템 이론과 궤환 입력을 통한 수동화(passivation) 이론은 비선형 시스템의 제어기 및 관측기 설계를 비롯한 다양한 적용 범위를 가지고 있다[1-5]. 수동적인 시스템에 대해서는 수동성에 기반한 제어기가 효과적임이 밝혀져 있고, 제어 결과로 얻어진 시스템이 강인한 안정성을 지닌다는 것이 그러한 제어기의 주된 장점 중 하나이다[4]. 대상 시스템이 수동적이지 않은 경우에는 적절한 보상을 통해 시스템을 수동화하는 제어기를 이용할 수 있다. 이 때, 대상 시스템은 상대 차수(relative degree) 1을 가지고 약한 최소 위상(weakly minimum phase)이라는 조건을 만족시켜야 상태 궤환[1] 또는 출력 궤환[6]을 통해 페루프 시스템을 수동화할 수 있다. 하지만, 많은 시스템에 대해 이 조건들은 만족되지 않으며, 이러한 구조적인 문제를 극복하기 위한 연구들이 행해져 오고 있다 (예를 들어[3]).

한편, 참고문헌 [3]에서 소개된 방법들과는 달리 시스템의 상태 변수 정보를 모두 사용하지 않고 주어진 출력만을 고려하는 수동화 방법으로 병렬 보상기(parallel feedforward compensator)를 설계하여 수동화하는 방법이 있다[7,8,9]. 이는 시스템의 상태를 다 알 수 없는 경우 출력 정보만을 이용한다는 점에서 출력 궤환 제어기 구성에 있어 다른 방법들에 비해 장점을 지니고, 수동성이 입출력간의 관계란 점에 미루어보면 상태 궤환 수동화보다 더 실제적인 문제할 수 있다[10].

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2004. 10. 25., 채택확정 : 2004. 11. 11.

손영익, 김갑일 : 명지대학교 전기공학과

(sonyi@mju.ac.kr/kkl@mju.ac.kr)

임승철 : 명지대학교 기계공학부(slim@mju.ac.kr)

※ 본 연구는 한국과학재단 목적기초연구 (KOSEF-R-01-2003-000-10014-0) 및 지역대학우수과학자 지원사업 (KOSEF-R05-2003-000-10624-0)으로 이루어졌으며 이에 감사드립니다.

본 논문은 비선형 시스템에 대한 동적 출력 궤환 제어기 설계 방법을 제시한 참고 문헌 [9]의 연속된 연구로서, 논문의 첫 부분에서는 1) 단일입력 단일출력 시스템에 대한 결과를 다중 입출력 시스템의 경우로 확장하고, 2) 추가 시스템을 연결한 시스템이 출력 궤환 수동적이기 위한 충분조건을 보다 완화된 형태로 제시한다[6,9]. 이렇게 함으로써 비선형 시스템에 대한 동적 출력 궤환 수동화의 개념을 소개한 참고문헌 [7]에 대해 보다 엄밀한 해석 방법을 제공하게 된다.

로봇 시스템을 비롯한 많은 실제 시스템들은 입력에서 일반화된(generalized) 속도 출력까지가 수동적이다[4]. 이러한 성질은 강인한 제어기 구성에 중요한 역할을 하고 있고, 그 결과로 얻어진 제어기는 기본적으로 비례-미분(Proportional-Derivative, PD) 제어기이다[4].

본 논문의 두 번째 부분은 앞부분에서 제안된 수동화 방법의 적용으로서 유연 관절 로봇[11,12]의 제어 문제를 속도 정보를 사용하지 않는 경우에 대해 다룬다. 이 때, 추가 시스템과 로봇이 결합된 시스템은 상대 차수 1을 가지고, 그 영 동특성이 PD 제어기를 사용했을 때의 페루프 시스템과 같도록 추가 시스템을 설계한다. 이 방법은 기존의 위치 정보만을 이용하는 제어기 설계 방법과는 전혀 다른 방법이다[13-16]. 참고문헌 [11,12]의 회전 유연 관절 로봇에 대한 모의실험을 통해 제안된 제어 규칙이 미분 항을 효과적으로 대체할 수 있음을 확인한다.

용어 정의 : 행렬 I_n 은 $n \times n$ 단위행렬을 뜻한다. 행렬 A 의 가장 작은 고유치는 $\lambda_m(A)$ 로 표시하고, 행렬의 가장 큰 특이값(singular value)은 $\|A\|$ 로 나타내었다. 벡터 x 에 대하여 x_i 는 그 i -번째 원소를 의미하고 $|x|$ 는 $\sqrt{x^T x}$ 를 뜻한다. 미분 가능한 함수가 k 번 연속적으로 미분가능이면 C^k 라고 하며, 평활한 함수는 C^∞ 이다.

벡터장 $f: R^n \rightarrow R^n$ 와 평활한 함수 $h: R^n \rightarrow R$ 에 대하여 $L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x)$ 이다. 함수 $V: R^n \rightarrow R$ 가 $V(0) = 0$ 이고, $x \neq 0$ 에서 $V(x) > 0$ 이면 양한정이라 하고, 임의의 수 $a \in R$ 에 대해 집합 $V^{-1}([0, a]) = \{x \in R^n: 0 \leq V(x) \leq a\}$ 이 콤팩트(compact)하면 V 는 고유 함수(proper function)이다.

II. 동적 출력 제환 수동화

다음과 같은 다중입력 다중출력 비선형 시스템을 고려한다.

$$(P): \begin{cases} \frac{d}{dt} x = f(x) + g(x)u, & x \in R^n, u \in R^m \\ y = h(x), & y \in R^m \end{cases} \quad (1)$$

여기서 x 는 상태 벡터; u 는 제어 입력; y 는 출력이고, 평활한 벡터장 f, g, h 에 대하여 $f(0) = 0, h(0) = 0$ 이다. 본 논문에서는 주어진 출력 y 의 정보만으로 원하는 제어 입력을 구성하는 문제를 생각한다.

먼저 수동성에 관한 간단한 정의를 소개한다. 보다 자세한 내용은 다른 참고 문헌을 참조한다(예를 들어 [1,3]).

정의 1 : ((17)) 시스템 (1)에 대해 양수 $\rho > 0$ 와 상수 β 가 존재하여 다음 부등식이 $\forall t \geq 0$ 동안 만족되면, 시스템 (1)은 엄밀히 출력 수동적 (output strictly passive, OSP)이라 한다.

$$\int_0^t u^T(\tau)y(\tau) d\tau + \beta \geq \rho \int_0^t y^T(\tau)y(\tau) d\tau. \quad (2)$$

(2)에서 $\rho = 0$ 이면, 시스템 (1)은 수동적(passive)이라 한다.

상태 제환 입력에 의해 수동적으로 바뀔 수 있는 시스템을 제환 수동적 (feedback passive)이라 하고, 그 과정을 수동화(passivation)라고 한다. 앞서 언급했듯이 제환 수동적이기 위한 필요충분조건은 대상 시스템이 주어진 입출력 쌍에 대해 상대 차수 1을 가지고 약한 최소 위상이라는 것이다[1].

이제, 동적 출력 제환에 의한 수동화 문제를 생각한다. 상대 차수가 1보다 큰 경우에 대한 수동화 방법을 다룰 것이므로, 시스템 (1)에 대해 다음과 같이 가정한다. 이것은 단일입력 단일출력 시스템에 관한 참고문헌 [9]의 가정을 다중 입출력의 경우로 바꾼 것이다.

가정 1 : $L_g h_i(x) = 0, \forall x \in R^n, 1 \leq i, j \leq m$.

가정 1하에서 다음과 같이 상대 차수 1을 갖는 추가 시스템을 생각하자.

$$(V): \begin{cases} \frac{d}{dt} \eta = k(\eta) + m(\eta)u, & \eta \in R^p, u \in R^m \\ y_\eta = l(\eta), & y_\eta \in R^m. \end{cases} \quad (3)$$

위에서 행렬 $\frac{\partial l}{\partial \eta} m(\eta)$ 는 $\forall \eta \in R^p$ 에 대하여 가역이다. 두 시스템을 병렬 연결하면 (그림 1) 다음 시스템을 얻는다.

$$(C): \begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ k(\eta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(x) \\ m(\eta) \end{pmatrix} u \\ y = \nu(y) + l(\eta). \end{cases} \quad (4)$$

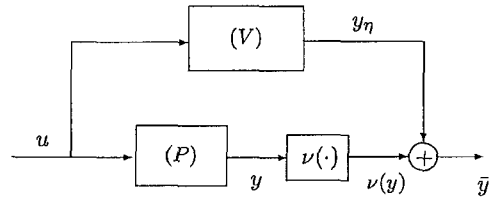


그림 1. 수동화를 위한 병렬연결.
Fig. 1. Parallel connection for passivation.

함수 $\nu(\cdot)$ 는 출력의 함수이며 위에서 결정한다. 시스템 (4)는 상대 차수 1을 가지고, 적절한 좌표 변환을 통해 다음과 같은 정규형태로 다시 쓸 수 있다[9,18]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} z = q_0(z) + q_1(z, \bar{y})\bar{y}, & z \in R^{n+p-m} \\ \frac{d}{dt} \bar{y} = b(z, \bar{y}) + a(z, \bar{y})u, & \bar{y} \in R^m. \end{cases} \quad (5)$$

이때 $a(z, \bar{y}) = L_m l(\eta)$ 이며, (5)의 영동특성은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{d}{dt} z = q_0(z), \quad z \in R^{n+p-m}. \quad (6)$$

시스템 (5)가 전역적으로 약한 최소 위상이면 (globally weakly minimum-phase) 모든 $z \in R^{n+p-m}$ 에 대하여 $L_{q_0} W(z) \leq 0$ 를 만족하는 $C^r(r \geq 2)$ 인 양한정 고유 함수 $W(z)$ 가 존재하고, 더 나아가 최소 위상이면 (minimum phase) 시스템 (6)의 평형점 $z = 0$ 가 점근적으로 안정하다. 추가 시스템 (3)의 상태 변수는 제어기 구성에 사용될 수 있으므로, 시스템 (5)의 상태 변수 중 z 는 $[z_1^T z_2^T]^T$ 로 구분하여 쓴다. 이때, z_2 는 상태 변수 η 와 y 로부터 얻어진 것으로 제어기 구성에 사용될 수 있는 상태 변수이다.

다음과 같은 가정 하에서 시스템 (5)를 수동화하는 제어 입력을 구성할 수 있다. 이 가정들은 참고문헌 [6,9]의 결과들을 확장한 것들이다.

가정 2 : 가역 행렬 함수 $a(z, \bar{y})$ 에 대하여, 두 평활한 $m \times m$ 행렬 $a_1(z, \bar{y}) > 0$ 과 $a_0(z_2, \bar{y})$ 가 존재하여 모든 (z, \bar{y}) 에서 $a(z, \bar{y}) = a_1(z, \bar{y})a_0(z_2, \bar{y})$ 이다.

가정 3 : 시스템 (5)가 전역적으로 약한 최소 위상이며, 함수 $\phi_0(z_2, \bar{y})$ 와 $\psi(z, \bar{y})$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$L_{q_1} W(z, \bar{y})\bar{y} + \bar{y}^T a_1^{-1}(z, \bar{y})b(z, \bar{y}) + \frac{1}{2} \bar{y}^T \frac{d}{dt} \{a_1^{-1}(z, \bar{y})\} \bar{y} =: \bar{y}^T \phi_0(z_2, \bar{y}) + \psi(z, \bar{y}). \quad (7)$$

이때, 함수 $\psi(z, \bar{y})$ 는 영 이상의 값을 갖는 함수 $\phi_1(z, \bar{y}), \phi_2(z, \bar{y})$ 와 양수 $\gamma_i (1 \leq i \leq m)$ 에 의해 모든 (z, \bar{y}) 와 $0 < k < 1$ 에 대해 아래 식과 같이 제한된다.

$$|\psi(z, \bar{y})| \leq \sum_{i=1}^m \gamma_i |\bar{y}_i| + |\bar{y}|^2 \phi_1(z_2, \bar{y}) + (|\bar{y}| \phi_2(z_2, \bar{y}) |L_{q_0} W(z)|^{\frac{1}{2}} + (1-k)|L_{q_0} W(z)|). \quad (8)$$

첨언 1 : 위의 가정들에 대해 다음과 같이 첨언한다.

- i) 참고문헌 [6]에서는 가정 2의 행렬을 $a(z, y) = a_1(z)a_0(y)$ 와 같이 가정한다. 즉, a_1 은 변수 z 에만, a_0 는 변수 y 에만 각각 의존하고 있다. 본 논문의 가정이 보다 일반적인 형태임을 알 수 있다.
- ii) 가정 3은 참고문헌 [6]의 가정과 같지 않고, 논문 [19, Assumption 3]의 변형된 형태이다. 즉, 이전 결과들에서는 $|L_{a_0}W(z)|^{\frac{1}{2}}$ 나 $|L_{a_0}W(z)|$ 중에서 한가지만을 사용하고 있다. 조건 (8)은 둘 다 사용함으로써 보다 일반적인 조건임을 알 수 있다([19, Remark 2] 참조).

정리 1 : 가정 1-3 하에서, 시스템 (4)(혹은 (5))는 아래와 같은 출력 궤환 제어 입력에 의해 v 로부터 \bar{y} 까지 엄밀한 출력 수동성 (OSP)을 갖는다.

$$u = a_0^{-1}(z_2, \bar{y}) \left\{ -\rho \bar{y} - \phi_0(z_2, \bar{y}) - \Gamma \operatorname{sgn}(\bar{y}) - \bar{y} \left(\phi_1(z_2, \bar{y}) + \frac{1}{2k} \phi_2^2(z_2, \bar{y}) \right) + v \right\} \quad (9)$$

단, $\Gamma = \operatorname{diag} \{ \gamma_i \}$ 이고, ρ 는 임의의 양수이다.

증명 : 아래의 양한정 고유 함수 $V(z, \bar{y})$ 를 페루프 시스템 (5)-(9)를 따라 미분하면 엄격한 출력 수동성을 증명할 수 있다.

$$V(z, \bar{y}) = W(z) + \frac{1}{2} \bar{y}^T a_1^{-1}(z, \bar{y}) \bar{y}$$

즉,

$$\frac{d}{dt} V(z, \bar{y}) = L_{a_0}W(z) + L_{a_1}W(z, \bar{y})\bar{y} + \bar{y}^T a_1^{-1}b + \frac{1}{2} \bar{y}^T \frac{d}{dt} \{ a_1^{-1}(z, \bar{y}) \} \bar{y} + \bar{y}^T a_0 u. \quad (10)$$

(8)과 다음 Young의 부등식을 이용하면

$$|\bar{y}| \phi_2(\cdot) |L_{a_0}W|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2k} |\bar{y}|^2 \phi_2^2(\cdot) + \frac{k}{2} |L_{a_0}W|, \quad (11)$$

제어 입력 (9)에 의해 다음 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V &\leq -|L_{a_0}W| + \bar{y}^T \phi_0 + \sum_{i=1}^m \gamma_i |\bar{y}_i| + |\bar{y}|^2 \phi_1 \\ &\quad + |\bar{y}| \phi_2 |L_{a_0}W|^{\frac{1}{2}} + (1-k) |L_{a_0}W| + \bar{y}^T a_0 u \quad (12) \\ &\leq -|L_{a_0}W| + \frac{k}{2} |L_{a_0}W| + (1-k) |L_{a_0}W| \\ &\quad - \rho \bar{y}^T \bar{y} + \bar{y}^T v \\ &\leq -\frac{k}{2} |L_{a_0}W| - \rho \bar{y}^T \bar{y} + \bar{y}^T v. \end{aligned}$$

위의 마지막 부등식의 좌우 변을 적분하면, 입력 v 에 대해 부등식 (2)를 얻을 수 있다. ■

전체 궤환 제어기는 추가 시스템 (3)과 입력 (9)로 구성됨을 알 수 있다. 따라서 위의 결과는 동적 출력 궤환 수동화 문제에 대한 한 가지 해를 제공한 것이다. 참고문헌 [20]의 방법을 사용하면 제어 입력 (9)에서 부호 함수 $\operatorname{sgn}(\cdot)$ 의 사용을 피할 수 있다.

따름 정리 1 : 가정 1-3 하에서, 시스템 (4)(혹은 (5))는 아래와 같은 출력 궤환 제어 입력에 의해 v 로부터 \bar{y} 까지 수동성을 갖는다.

$$u = a_0^{-1}(z_2, \bar{y}) \left\{ -\rho \bar{y} - \phi_0(z_2, \bar{y}) - r - \bar{y} \left(\phi_1(z_2, \bar{y}) + \frac{1}{2k} \phi_2^2(z_2, \bar{y}) \right) + v \right\} \quad (13)$$

단, $\rho > 0$ 이고, r 은 r_i 로 이루어지는 벡터이고,

$$r_i = \frac{\bar{\gamma}_i \bar{y}_i}{|\bar{y}_i| + \epsilon} \quad (1 \leq i \leq m)$$

에서 임의의 양수 ϵ_0 와 c_0 일 때 $\epsilon = \epsilon_0 e^{-c_0 t}$ 이다.

증명 : 정리 1의 증명과 같이 함수 $V(z, \bar{y})$ 를 미분하고 정리하면, 위의 제어 입력 (13)에 의해 아래 식을 얻는다.

$$\frac{d}{dt} V \leq -\frac{k}{2} |L_{a_0}W| + \sum_{i=1}^m \gamma_i \epsilon_0 e^{-c_0 t} - \rho \bar{y}^T \bar{y} + \bar{y}^T v. \quad (14)$$

위 부등식의 좌우 변을 적분하면 부등식 (2)를 얻을 수 있다. 이때, $\beta = V(0) + \sum_{i=1}^m \frac{\gamma_i \epsilon_0}{c_0}$ 이다. ■

다음 절에서는 위 결과를 적용하여 위치 출력을 이용한 유연 관절 로봇의 동적 출력 궤환 수동화 문제를 다룬다.

III. 유연 관절 로봇의 수동화

다음과 같이 표현된 유연 관절 로봇을 생각한다 [13,15,16].

$$\begin{cases} D(q_1) \ddot{q}_1 + C(q_1, \dot{q}_1) \dot{q}_1 + g(q_1) = K(q_2 - q_1) \\ J \ddot{q}_2 + K(q_2 - q_1) = u \end{cases} \quad (15)$$

식에서 $q_1 \in R^n$ 과 $q_2 \in R^n$ 는 각각 링크와 모터의 관절 위치 벡터이며, $q = [q_1^T \ q_2^T]^T$; $D(q_1)$ 은 강체 링크의 관성 행렬이고, J 는 구동기의 회전 관성으로 모두 양한정 행렬이다. $C(q_1, \dot{q}_1) \dot{q}_1$ 는 원심력 항과 Coriolis 항; $g(q_1)$ 은 중력 벡터이며, 위치에너지 $U_1(q_1)$ 일 때,

$$g(q_1) = \partial U_1 / \partial q_1$$

이다. 행렬 $K = \operatorname{diag} [k_1, \dots, k_n]$ 이고, k_i 는 i -번째 관절의 강성도를 뜻하는 양수이며, $u \in R^n$ 는 토크 벡터이다. 시스템 (15)의 중요한 성질로서 ($D-2C$)가 왜 대칭행렬 (skew-symmetric)이고, 행렬 $g(q_1)$ 는 선형함수와 삼각함수들로 구성된다. 로봇 모델에 관한 더 자세한 내용은 다른 참고 문헌들을 참조할 수 있다(예를 들어, [4,11,21]).

시스템 (15)는 입력 u 로부터 속도 출력 \dot{q}_2 까지 상대 차수 1을 가진다. 이 때, 적절한 에너지 함수와 제동력 주입으로 얻어진 PD 제어를 통해 입력으로부터 속도 출력까지 수동성을 갖도록 만들 수 있고, 이는 위치 제어 문제에 대한 해를 제공한다[4]. 본 논문에서는 속도 정보를 얻기 어려운 상황에서 위치 정보만으로 동적 출력 궤환 제어를 설계한다. 먼저, PD 제어를 통한 수동화 및 위치 제어를 간단히 소개한다.

1. 속도 정보를 이용한 수동화 - PD 제어기

다음과 같은 제어 입력을 생각하자.

$$u = -K_p(q_2 - q_{2d}) - K_d \dot{q}_2 + g(q_{1d}) + v. \quad (16)$$

여기서, K_p 와 K_d 는 양한정 대각 행렬이고, 상수 벡터 q_{1d} 는 q_1 의 목표 값, q_{2d} 는 아래 식으로 결정된다.

$$K(q_{1d} - q_{2d}) = -g(q_{1d}). \quad (17)$$

벡터 $q_d = [q_{1d}^T \quad q_{2d}^T]^T$ 일 때, 변수

$$\tilde{q} = q - q_d = [\tilde{q}_1^T \quad \tilde{q}_2^T]^T$$

라고 정의한다. 위 행렬들에 대해 다음 부등식이 성립한다고 가정하자.

$$\min\{\lambda_m(K), \lambda_m(K_p)\} > 2\alpha \quad (18)$$

단,

$$\left\| \frac{\partial g(q_1)}{\partial q_1} \right\| \leq \alpha, \quad \forall q_1 \in R^n. \quad (19)$$

조건 (18)이 만족되면, $\tilde{q} = 0$ 는 페루프 시스템 (15)-(16)의 유일한 평형점이며 ($v = 0$ 일 때), 이 점에서 다음 함수 $P_1(q)$ 은 유일한 최소값을 갖는다(부록 참조).

$$P_1 = \frac{1}{2} \tilde{q}^T x \tilde{q} + U_1(q_1) - q_1^T g(q_{1d}) \quad (20)$$

단, $x := \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K + K_p \end{bmatrix}$.

또한, 다음 함수 $V(q, \dot{q})$ 는 $\tilde{q} = \dot{q} = 0$ 에 대하여 양한정이고 고유함을 알 수 있다.

$$V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}_1^T D(q_1) \dot{q}_1 + \frac{1}{2} \dot{q}_2^T J \dot{q}_2 + P_1(q) - P_1(q_d). \quad (21)$$

페루프 시스템 (15),(16)을 따라 (21)식을 미분하면 아래와 같다. 아래 식은 페루프 시스템이 v 로부터 $y = \dot{q}_2$ 에 대해 엄밀히 출력 수동적임을 뜻한다.

$$\frac{d}{dt} V(q, \dot{q}) \leq -\dot{q}_2^T K_d \dot{q}_2 + \dot{q}_2^T v. \quad (22)$$

또한, $v = 0$ 일 때, 페루프 시스템은 전역적으로 점근적 안정성을 가진다[11].

2. 위치 정보를 이용한 동적 출력 궤환 수동화

시스템 (15)는 위치 출력 $y = q_2$ 에 대해 상대 차수 2를 갖는다. 우리는 II절에서와 같이 먼저 추가 시스템을 이용하여 전체 시스템이 상대 차수 1을 갖게 함과 동시에 그 영동특성이 페루프 시스템 (15),(16)과 같게 하여 수동화 한다.

다음과 같이 간단한 추가 시스템을 생각한다.

$$(V): \begin{cases} \frac{d}{dt} \eta = E\eta + u, & \eta \in R^n, u \in R^n \\ y_\eta = \eta, & y_\eta \in R^n. \end{cases} \quad (23)$$

그림 1과 같이 얻어진 새로운 출력과 그 미분은 다음과 같다.

$$\bar{y} = \nu(q_2) + \eta, \quad \frac{d}{dt} \bar{y} = \frac{d}{dt} \nu(q_2) + E\eta + u. \quad (24)$$

행렬 $F = K_d,$

$$G = -K_d q_{2d} - K_p K_p^{-1} g(q_{1d}),$$

$$E = -K_p K_d^{-1}$$

를 이용하여 출력 함수를 다음과 같이 결정하면

$$\nu(q_2) = Fq_2 + G, \quad (25)$$

$$-\frac{d}{dt} \nu(q_2) + E\nu(q_2) = -K_p \tilde{q}_2 - K_d \dot{q}_2 + g(q_{1d}). \quad (26)$$

(26)은 바로 $v = 0$ 일 때의 PD 제어기 (16)이다. 결국, 전체 시스템은 다음과 같이 표현된다

$$\begin{cases} D(q_1) \ddot{q}_1 + C(q_1, \dot{q}_1) \dot{q}_1 + g(q_1) = K(q_2 - q_1) \\ J \dot{q}_2 + K(q_2 - q_1) = u \\ \dot{\eta} = -K_p K_d^{-1} \eta + u \\ \bar{y} = K_d q_2 + \eta + G. \end{cases} \quad (27)$$

정규 형태로 쓰기 위해 다음의 좌표 변환을 이용하면

$$\begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q}_2 - J^{-1} \bar{y} \\ K_d q_2 + \eta + G \end{pmatrix}, \quad (28)$$

시스템 (27)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{cases} D(q_1) \ddot{\xi} + C(q_1, \dot{q}_1) \dot{\xi} + g(q_1) = K(q_2 - q_1) \\ J \xi = -K(q_2 - q_1) - K_p \tilde{q}_2 - K_d \xi + g(q_{1d}) \\ \quad + (K_p K_d^{-1} - K_d J^{-1}) \bar{y} \\ \frac{d}{dt} \bar{y} = K_p \tilde{q}_2 + K_d \xi - g(q_{1d}) \\ \quad + (K_d J^{-1} - K_p K_d^{-1}) \bar{y} + u. \end{cases} \quad (29)$$

시스템 (29)는 상대 차수 1을 가지고, $\bar{y} \equiv 0$ 일 때 $\xi \equiv \dot{q}_2$ 이므로, 영동특성이 페루프 시스템 (15),(16)과 같아서 최소 위상임을 알 수 있다.

수동화 제어기 설계를 위해 양한정 고유 함수를 다음과 같이 잡는다.

$$V(q, \dot{q}_1, \xi, \bar{y}) = V_1(q, \dot{q}_1, \xi) + V_2(\bar{y}) \quad (30)$$

단,

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} \dot{q}_1^T D(q_1) \dot{q}_1 + \frac{1}{2} \xi^T J \xi + P_1(q) - P_1(q_d) \\ V_2 &= \frac{1}{2} \bar{y}^T \bar{y}. \end{aligned} \quad (31)$$

편의상,

$K_d^{-1} K_p - J^{-1} K_d + K_d =: Q$ 이고, $J^{-1}(K + K_p) + K_p =: R$ 라 둔다. 시스템 (29)를 따라 V 를 미분하면 다음 식을 얻는다.

$$\frac{d}{dt} V = -\xi^T K_d \xi + \bar{y}^T Q \xi + \bar{y}^T (K_d J^{-1} - K_p K_d^{-1}) \bar{y} + \bar{y}^T (R \tilde{q}_2 - J^{-1} K \tilde{q}_1 - g(q_{1d}) + u). \quad (32)$$

먼저, 아래 제어 입력을 사용하여 소거하면

$$u = -K_d J^{-1} \dot{\bar{y}} - R \bar{q}_2 + g(q_{1d}) + u_2, \quad (33)$$

$$\frac{d}{dt} V = -\xi^T K_d \xi + \bar{y}^T Q \xi - \bar{y}^T K_p K_d^{-1} \bar{y} + \bar{y}^T (-J^{-1} K \bar{q}_1 + u_2). \quad (34)$$

행렬 Q 가 양한정 행렬일 때 $K_d - \sigma Q > 0$ 인 양수 $\sigma > 0$ 로 아래 부등식을 이용하면

$$\bar{y}^T Q \xi = \bar{y}^T \sqrt{Q} \sqrt{Q} \xi \leq \frac{1}{4\sigma} \bar{y}^T Q \bar{y} + \sigma \xi^T Q \xi \quad (35)$$

(34)로부터

$$\frac{d}{dt} V \leq -\xi^T (K_d - \sigma Q) \xi + \frac{1}{4\sigma} \bar{y}^T Q \bar{y} - \bar{y}^T K_p K_d^{-1} \bar{y} + \bar{y}^T (-J^{-1} K \bar{q}_1 + u_2). \quad (36)$$

로봇의 위치 제어 문제를 생각하면, 적절한 양수 $b_i > 0$ 에 의해 $|(q_{1i})| = |(q_1)_i - (q_{1d})_i| \leq b_i, 1 \leq i \leq n$ 이다.

행렬 $B_q := \text{diag}\{b_i\}$ 라 정의하고,

$$\text{함수 } (\text{sgn}(\bar{y}))_i = \text{sgn}(\bar{y}_i)$$

이다. 이를 이용하여 아래 결과를 얻는다.

정리 2 : 시스템 (27)에 대해 다음과 같은 제어 입력을 생각한다.

$$u = -R \bar{q}_2 + g(q_{1d}) - \left(\frac{1}{4\sigma} Q + K_d J^{-1}\right) \bar{y} - J^{-1} K B_q \text{sgn}(\bar{y}) + v. \quad (37)$$

부등식 (18)이 만족될 때, 페루프 시스템은 v 에서 \bar{y} 까지 엄밀히 출력 수동적 (OSP)이다. 또한, $v=0$ 일 때, 유일한 평형점 $[\bar{q}^T \dot{\bar{q}}^T \bar{y}^T]^T = 0$ 에 대해 전역적으로 점근적 안정성을 가진다.

증명 : 앞 절에서와 같이 조건 (18)이 만족되면 페루프 시스템은 유일한 평형점 $[\bar{q}^T \dot{\bar{q}}^T \bar{y}^T]^T = 0$ 을 갖는다. 다음 부등식이 성립하므로

$$-\bar{y}^T J^{-1} K \bar{q}_1 \leq \sum_{i=1}^n k_i b_i J_i^{-1} |\bar{y}_i|$$

(36)으로부터 아래 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dt} V \leq -\xi^T (K_d - \sigma Q) \xi - \bar{y}^T K_p K_d^{-1} \bar{y} + \bar{y}^T v. \quad (38)$$

위 식은 페루프 시스템이 v 로부터 \bar{y} 까지 엄밀히 출력 수동적임을 의미한다. 또한, $v=0$ 일 때, LaSalle의 불변 정리 (Invariance Principle)에 의해 평형점 $[\bar{q}^T \dot{\bar{q}}^T \bar{y}^T]^T = 0$ 이 전역적으로 점근적 안정성을 가짐을 알 수 있다 [2,11].

첨언 2 : 정리 2를 앞 절의 정리 1과 비교하면, $a(z, \bar{y}) = I_3$ 이고 (7)의 $\phi_0(z_2, \bar{y})$ -항은 제어 입력 (33)에 의해 소거된다. 또한, $\psi(z_2, \bar{y})$ -항은 제어 입력 (37)의 나머지 부분으로 제한됨을 알 수 있다. 이때, $\Gamma = J^{-1} K B_q$ 이다.

첨언 3 : 불연속 함수인 ‘sgn’는 실제 사용에서 참고 문헌

[22]에서와 같이 미분 가능한 함수로 대체된다. 다음 절의 모의실험에서 우리는 ‘tanh’-함수를 ‘sgn’ 대신 이용하기로 한다. 즉, $\sigma=1$ 일 때, 다음과 같다.

$$u = -R \bar{q}_2 + g(q_{1d}) - \left(\frac{1}{4} Q + K_d J^{-1}\right) \bar{y} - J^{-1} K B_q \tanh(\bar{y}). \quad (39)$$

IV. 모의실험

제안된 제어기의 성능 평가를 위해 참고문헌[11,12]의 3축 회전 관절 로봇에 대해 모의실험을 행하였다. 또한, 속도 정보를 사용하지 않는 참고문헌 [13]의 제어기와 비교하였다.

로봇 (15)에서 $D(q_1), C(q_1, \dot{q}_1), g(q_1) = [g_1 \ g_2 \ g_3]^T, K = \text{diag}\{k_1, k_2, k_3\}, J = \text{diag}\{J_1, J_2, J_3\}$, 들은 다음과 같다. 여기서, $q_{1,i}$ 는 q_1 의 i -번째 원소이다.

$$D_{11} = a_1 + a_2 \cos^2(q_{1,2}) + a_3 \cos^2(q_{1,2} + q_{1,3}) + a_4 \cos(q_{1,2}) \cos(q_{1,2} + q_{1,3}),$$

$$D_{22} = a_5 + a_4 \cos(q_{1,3}), \quad D_{23} = a_8 + a_7 \cos(q_{1,3}),$$

$$D_{32} = D_{23}, \quad D_{33} = a_8,$$

$$J_1 = a_{10}, \quad J_2 = a_{11}, \quad J_3 = a_{10},$$

$$k_1 = 14210, k_2 = 29800, k_3 = 14210,$$

$$g_1 = 0, \quad g_2 = a_{12} \cos(q_{1,2}) + a_{13} \cos(q_{1,2} + q_{1,3}),$$

$$g_3 = a_{13} \cos(q_{1,2} + q_{1,3}),$$

$$C_{11} = -\frac{1}{2} [r(q_1) \sigma_{1,2} + s(q_1) \sigma_{1,3}], \quad C_{12} = -\frac{1}{2} r(q_1) \dot{q}_{1,1},$$

$$C_{13} = -\frac{1}{2} s(q_1) \dot{q}_{1,1}, \quad C_{21} = \frac{1}{2} r(q_1) \dot{q}_{1,1},$$

$$C_{22} = -\frac{1}{2} t(q_1) \dot{q}_{1,3}, \quad C_{23} = -\frac{1}{2} t(q_1) (\dot{q}_{1,2} + \dot{q}_{1,3}),$$

$$C_{31} = \frac{1}{2} s(q_1) \dot{q}_{1,1}, \quad C_{32} = \frac{1}{2} t(q_1) \dot{q}_{1,2}, \quad C_{33} = 0.$$

단, $r(q_1) = 2a_2 \sin(q_{1,2}) \cos(q_{1,2}) + a_3 \sin(2q_{1,2} + 2q_{1,3}) + a_4 \sin(2q_{1,2} + q_{1,3}),$

$$s(q_1) = a_3 \sin(2q_{1,2} + 2q_{1,3}) + a_4 \cos(q_{1,2}) \sin(q_{1,2} + q_{1,3}),$$

$$t(q_1) = a_4 \sin(q_{1,3}) \text{이다. 그리고 각 파라미터들은,}$$

$$a_1 = 0.0840, \quad a_2 = 9.2063, \quad a_3 = 2.4515, \quad a_4 = 5.4000,$$

$$a_5 = 11.743, \quad a_6 = 2.6274, \quad a_7 = 2.7000, \quad a_8 = 2.4817,$$

$$a_{10} = 23.296, \quad a_{11} = 70.656, \quad a_{12} = 189.17, \quad a_{13} = 52.928$$

이다[11,12].

모의실험은 아래의 초기치 벡터 q_0 로부터 원하는 링크 위치 벡터 q_d 로의 위치 제어 문제이며, 그 값들은 아래와 같다.

$$q_{10} = q_{20} = \left[0 \ \frac{\pi}{2} \ 0\right]^T, \quad \dot{q}_{10} = \dot{q}_{20} = \dot{y}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T;$$

$$q_{1d} = \left[\frac{\pi}{4} \ \frac{\pi}{4} \ \frac{\pi}{4}\right]^T.$$

PD 제어기에 필요한 이득은 [11]에서와 같이 $K_p = 3000I_3$ 이고 $K_d = 1000I_3$ 로 정하였다. 제안된 제어 입력 (39)에서

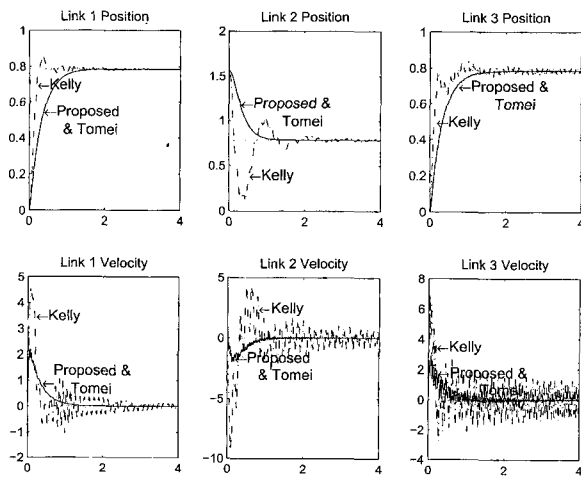


그림 2. 모의실험 결과 비교.

Fig. 2. Simulation results.

$B_q = 2\pi I_3$ 로 하였다. 세 가지 제어 입력 ([11],[13], (39))에 의한 모의 결과를 그림 2에 나타내었다. 참고문헌 [11]의 제어기 (16) (단, $v=0$)은 속도 정보를 이용하고 나머지 둘은 이용하지 않는다. 그림에서 (16)에 의한 결과와 (39)에 의한 결과 사이에는 q_1 에 대해 10^{-4} , \dot{q}_1 에 대해 10^{-2} 단위로 작은 차이가 나므로, 두 결과는 동일한 것처럼 보인다. 제어 입력 역시 상태 변수들로 이루어지므로 입력 (39)는 PD 제어기와 유사한 결과를 나타낸다 (지면 관계로 입력의 궤적은 생략함). 즉, 논문 [13]의 결과에 비해 (39)가 PD 제어기를 보다 더 정확하게 복원함을 알 수 있다.

V. 결론

수동성에 기반을 둔 제어기는 제어 결과 얻어진 페루프 시스템이 강인한 안정성을 지닌다고 알려져 있다. 본 논문에서는 수동성을 갖지 않는 시스템에 대하여 그 출력 정보만이 측정 가능한 경우에 대해 동적 출력 궤환 제어기를 구성하는 문제를 다루었다. 대상 시스템이 비최소 위상이거나 상대 차수가 1보다 큰 경우에 대하여 추가 시스템을 구성하여 전체 시스템이 수동화되기 위한 완화된 충분조건을 제시하였다[6,9].

본 논문의 결과는 비선형 시스템의 상태 관측기를 사용하지 않는 출력 궤환 제어기 설계 방법으로 볼 수 있다. 많은 실제적인 시스템들이 입력에서 속도 출력까지 궤환 수동성을 갖고, 에너지 함수 결정과 제동력 주입이라는 수동화 과정에 의해 PD 제어기가 얻어진다[4]. 본 논문에서 제안된 수동화 방법을 적용하면 위치 정보만이 측정 가능한 즉, 상대 차수가 2인-유연 관절 로봇[11,12]에 대해, 미분 항을 대체하는 방법으로 활용할 수 있음을 확인하였다. 향후 궤적 추종 문제와 불확실한 시스템에 대한 강인한 제어기 설계 연구가 진행될 것이다.

참고문헌

[1] C. I. Byrnes, A. Isidori, and J. C. Willems, "Passivity,

- feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 36, no. 11, pp. 1228-1240, 1991.
- [2] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, 2nd Ed., 1996.
- [3] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P. V. Kokotovic, *Constructive Nonlinear Control*, Springer-Verlag, 1997.
- [4] R. Ortega, A. Loria, P. J. Nicklasson, and H. Sira-Ramirez, *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*, Springer-Verlag, 1998.
- [5] H. Shim, J. H. Seo, and A. R. Teel, "Nonlinear observer design via passivation of error dynamics," *Automatica*, vol. 39, pp. 885-892, 2003.
- [6] Z. P. Jiang and D.J. Hill, "Passivity and disturbance attenuation via output feedback for uncertain nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 43, no. 7, pp. 992-997, 1998.
- [7] H. Kaufman, I. B.-K. and K. Sobel, *Direct Adaptive Control Algorithms. 2nd Ed.*, Springer-Verlag, 1998.
- [8] A. G. Kelkar and S. M. Joshi, "Robust control of non-passive systems via passification", *In Proc. of American Control Conference*, 1997.
- [9] Y. I. Son, H. Shim, and J. H. Seo, "Passification of nonlinear systems via dynamic output feedback", *Journal of KIEE*, pp. 23-28, 2000.
- [10] A. L. Fradkov and D. J. Hill, "Exponential feedback passivity and stabilizability of nonlinear systems," *Automatica*, vol. 34, no. 6, pp. 697-703, 1998.
- [11] P. Tomei, "A simple PD controller for robots with elastic joints," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 36, pp. 1208-1213, 1991.
- [12] P. Tomei, "Adaptive PD controller for robot manipulators," *IEEE Trans. Robotics and Automation*, vol. 7, no. 4, pp. 565-570, 1991.
- [13] R. Kelly, R. Ortega, A. Ailon and A. Loria, "Global regulation of flexible joint robots using approximate differentiation," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, pp. 1222-1224, 1994.
- [14] B. Berghuis and H. Nijmeijer, "Global regulation of robots using only position measurements," *Systems & Control Letters*, vol. 21, pp. 289-293, 1993.
- [15] A. Ailon and R. Ortega, "An observer-based set-point controller for robot manipulators with flexible joints," *Systems & Control Letters*, vol. 21, pp. 329-335, 1993.
- [16] S. Nicosia and P. Tomei, "A tracking controller for flexible robots using only link position feedback," *In Proc. of Conf. on Decision and Control*, pp. 1817-1822, 1994.

[17] D. J. Hill and P. J. Moylan, "Stability results for nonlinear feedback systems," *Automatica*, vol. 13, pp. 377-382, 1977.

[18] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, 3rd Ed., 1995.

[19] J. Byun, H. Shim, and J. H. Seo, "Output feedback passification for nonlinear systems," *In Proc. of American Control Conference*, pp. 157-158, 2000.

[20] W. S. and L. Xie, "Robust control of nonlinear feedback passive systems," *Systems & Control Letters*, vol. 28, pp. 85-93, 1996.

[21] M. W. Spong and M. Vidyasagar, *Robot dynamics and control*. John Wiley & Sons, Inc, 1989.

[22] C. E. and S. K. Spurgeon, *Sliding Mode Control*, Taylor & Francis, 1998.

부록

보조정리 : 조건 (18)이 만족되면, $\tilde{q} = 0$ 는 페루프 시스템 (15)-(16)의 유일한 평형점이며 ($v = 0$ 일 때), (20)의 함수 $P_1(q)$ 는 이 점에서 유일한 최소값을 갖는다.

증명 : 페루프 시스템의 평형점은 다음 방정식의 근이다.

$$x \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(q_{1d}) - g(q_1) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

편의상 $H(q_1) := \partial g(q_1) / \partial q_1$ 라 정의한다. (40)의 양변에 행렬 $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{bmatrix}$ 를 곱하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K & -K \\ 0 & K_p \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(q_{1d}) - g(q_1) \\ g(q_{1d}) - g(q_1) \end{pmatrix}. \quad (41)$$

윗 식의 아래 행으로부터 $\tilde{q}_2 = K_p^{-1}(g(q_{1d}) - g(q_1))$ 이고, $x_1 := (I_n + KK_p^{-1})^{-1}K$ 라 두면, 아래 식을 얻는다

$$x_1 \tilde{q}_1 = g(q_{1d}) - g(q_1). \quad (42)$$

행렬 $K_p = \text{diag}[p_1, \dots, p_n]$ 이므로 행렬 x_1 도 대각 행렬이며, 그 i -번째 대각 원소는 $k_i p_i / (k_i + p_i)$ 이다. 조건 (18)로부터

$$(k_i + p_i) / (k_i p_i) < 1/\alpha$$

이므로 이것은 $\lambda_m(x_1) > \alpha$ 임을 의미한다. 평균값 정리에 의해 (19)로부터 아래 식을 얻을 수 있고

$$|g(q_1) - g(\bar{q}_1)| \leq \alpha |q_1 - \bar{q}_1|, \quad \forall q_1, \bar{q}_1 \in R^n, \quad (43)$$

모든 $q_1 \neq q_{1d}$ 에 대해 아래 식이 성립한다.

$$|x_1 \tilde{q}_1| \geq \lambda_m(x_1) |\tilde{q}_1| > \alpha |\tilde{q}_1| \geq |g(q_{1d}) - g(q_1)|. \quad (44)$$

따라서, (42)는 유일한 해 $q_1 = q_{1d}$ 를 가지게 되고, 동시에 $q = q_d$ 는 (40)의 유일한 해이다.

이제, P_1 에 대한 증명으로 아래 식을 생각한다.

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial q^2} = x + \frac{\partial}{\partial q} \begin{pmatrix} g(q_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K + H(q_1) & -K \\ -K & K + K_p \end{bmatrix}. \quad (45)$$

모든 $x_1, q_1 \in R^n$ 에 대하여 $x_1^T H(q_1) x_1 \geq -\alpha x_1^T x_1$ 이 성립하므로 아래 식이 주어진다.

$$\begin{pmatrix} x_1^T & x_2^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} K + H(q_1) & -K \\ -K & K + K_p \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq x_1^T (K - \alpha I_n) x_1 - 2x_1^T K x_2 + x_2^T (K + K_p) x_2 \quad (46)$$

단, $x_2 \in R^n$. 행렬 $K_2 := K - \alpha I_n = K_2^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}}$ 라 정의하면, (18)에 의하여 K_2 는 양한정이고 (46)의 우변은 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

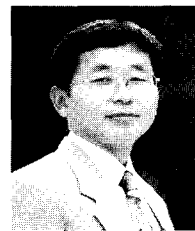
$$|K_2^{\frac{1}{2}} x_1 - K_2^{-\frac{1}{2}} K x_2|^2 + x_2^T (K + K_p - K K_2^{-1} K) x_2. \quad (47)$$

행렬 $(K + K_p - K K_2^{-1} K)$ 는 대각이고, (18)에 의해 i -번째 대각 원소는 양수임을 알 수 있다. 따라서, 행렬 (45)는 양한정이고 이것은 $q = q_d$ 가 $P_1(q)$ 의 유일한 최소점임을 의미한다. ■



손 영 익

1995년 서울대학교 전기공학과 졸업. 동대학원 석사(1997), 동대학원 전기·컴퓨터공학부 박사(2002). 2003년 3월-현재 명지대학교 전기공학과 조교수. 관심 분야는 로보틱스, 비선형 시스템 제어기 및 관측기 설계, 전력 시스템.



김 갑 일

1979년 서울대학교 전기공학과 졸업. KAIST 전기전자공학과 석사(1981), 클램슨 대학교 (미) 전기·컴퓨터공학과 박사(1990). 1981년-1985년 육군 사관학교 전임장사. 1991년-현재 명지대학교 전기공학과 교수. 관심 분야는 로봇공학, 자동화 시스템, 교통 및 통신 시스템, 디지털 제어 시스템, 전력 시스템.



임 승 철

1981년 서울대학교 기계설계학과 졸업.
KAIST 기계공학과 석사(1983), 버지니아 폴리테크닉(미) 기계공학(ESM) 박사(1992). 1983년-1987년 대우조선 기술연구소, 1987년-1993년 삼성중합기술원, 1994년-현재 명지대학교 기계공학과 교수. 관심 분야는 시스템 동력학, 진동 및 제어, 로봇틱스.