

## ◎ 논문

# 비정렬 격자계에서 격자계 구성방법에 따른 계산의 정확도와 효율에 관한 연구

김 사 량<sup>\*1</sup>, Z. J. Wang<sup>\*2</sup>

## On the Accuracy and Efficiency of Calculation with Respect to the Grid Construction Methods for Unstructured Meshes

S. R. Kim and Z. J. Wang

The numerical simulations with unstructured mesh by cell-centered and vertex-centered approaches were performed for the quadrilateral and triangular meshes. For 2-D inviscid supersonic vortex flow, the simulation results and the analytic solution were compared and the accuracy was assessed. The calculation efficiency was measured by the parameter defined by the consumed CPU time multiplied by absolute error. As a results, equilateral triangular mesh yielded the best accuracy and efficiency among the tested meshes. Cell-centered approach gives a little better efficiency than vertex-centered approach.

**Key Words:** 전산유체역학(CFD), 비정렬 격자(Unstructured Mesh), 초음속 보텍스 유동(Supersonic Vortex Flow), 셀 중심(Cell-centered), 격자점 중심(Vertex-centered)

### 1. 서 론

비정렬 격자계에 유한체적법을 적용한 수치계산과 관련되어서 최근 10여년 동안에 많은 연구가 진행되어 왔다. 유한체적법을 사용하는 경우 검사체적(Control Volume)을 만드는 방법에 따라서, 격자점에서의 물리량을 해로 구하는 격자점 중심방법(Vertex-centered approach)[1-5]과 격자 중심에서의 물리량을 해로 구하는 셀 중심방법(Cell-centered approach)[6-10]의 두 가지로

크게 나눌 수 있으며, Fig. 1에 두 가지 방법에 대한 격자의 구성과 검사체적에 대한 그림을 나타내었다.

Aftosmis 등[1]은 사각형 및 삼각형 격자를 이용하여 격자점 중심 방법에 의해서 용기부가 있는 채널유동, 초음속 보텍스 유동과 익형 주위의

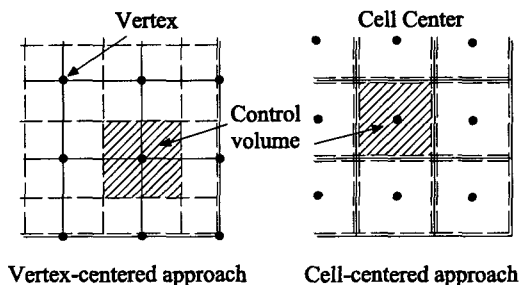


Fig. 1 Grid system

\* 2004년 1월 20일 접수

\*1 정희원, 강릉대학교 정밀기계공학과

\*2 Michigan State University, Dept. of Mechanical Eng.

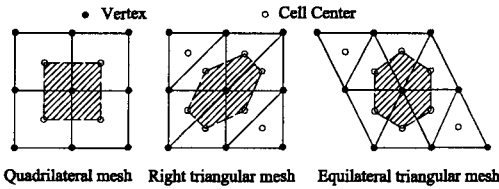


Fig. 2 Quadrilateral and Triangular grids

유동에 대하여 유동장을 해석하여 정확도, 안정성 그리고 Reconstruction 알고리즘에 관한 연구를 하였으며, Wang[6]은 셀 중심 방법에 의해서 여러 가지 격자형상에 대하여 익형 주위의 유동, 초음속 보텍스 유동 및 후향계단 유동 등을 해석하여 개발한 수치해석 코드를 검증한 바 있다.

격자의 수가 증가하면 오차는 줄고 정확도는 증가하므로 어떤 방법을 사용하느냐가 해의 값에 크게 영향을 주지는 않으나, Matrix Solver에서 풀어야 할 변수의 수인 셀의 수와 플럭스 계산이 필요한 면의 수가 다르기 때문에 메모리 사용량과 계산 수행시간에 차이가 난다. 일반적으로 삼각형 격자가 사각형 격자보다 정확한 해를 보인다고 하며[1], 삼각형 격자를 사용하는 경우에 격자점 중심법이 셀 중심법에 비하여 기억장소를 적게 차지하는 것으로 알려져 있다[3,5].

본 연구에서는 두 가지 격자 구성방법을 이용하여 비점성 초음속 보텍스 유동에 대하여 사각형 및 삼각형 격자를 사용한 수치계산을 수행하고 오차와 계산시간을 비교하여 격자모양 및 격자구성방법에 따른 정확도와 계산효율을 비교 검토하도록 한다.

## 2. 수치해석

### 2.1 격자계 및 해석방법

본 연구에서는 Fig. 2에 나타난 것과 같이, 사각형(quadrilateral), 직각삼각형(right triangular) 그리고 이등변삼각형(equilateral triangular) 격자에 대하여 정확도와 계산효율에 대하여 검토하였다. 그림에서 빗금친 부분은 격자점 중심 방법으로 계산하는 경우의 Median dual 셀을 나타낸다.

격자점 중심법을 사용한 경우는 Median dual 셀에 대한 정보를 격자에 대한 입력으로 사용하였다. 이 경우에 경계에 접한 격자에서는 격자

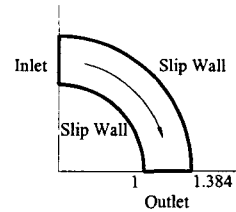


Fig. 3 Vortex flow

점 중심법을 사용하여 해석한 경우와 차이가 날 수 있으나, 해석 프로그램이 다르므로 인하여 발생하는 오차를 제거하고 단지 격자 구성방법의 차이에 의한 영향만을 고려하기 위하여 모든 경우에 셀 중심 방법을 사용한 해석 프로그램 하나만을 사용하였다.

### 2.2 초음속 보텍스 유동해석

정확도 및 오차를 비교하기 위해서 해석해가 있는 2차원 비점성 초음속 등엔트로피 보텍스 유동(Fig. 3)에 대하여 계산을 수행하였다

#### 2.2.1 해석해

유동장의 원주속도( $V_\theta$ )는 반경에 반비례한다. 에너지 방정식, 등엔트로피 관계식, 음속( $a$ )의 정의를 적용하면, 해석해는 다음과 같이 밀도,  $\rho$ 를 반경,  $r$ 의 함수로 나타낼 수 있다[1,6,11,12].

$$2\pi r V_\theta = const.$$

$$a^2/(\gamma-1) + V_\theta^2/2 = const.$$

$$p/\rho^\gamma = const.$$

$$a^2 = \gamma(p/\rho)$$

$$\rho(r) = \rho_i \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2 \left( 1 - \left( \frac{r_i}{r} \right)^2 \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (1)$$

여기에서,  $r_i$ 는 보텍스의 안쪽 반지름이고,  $M_i$ 는  $r=r_i$ 에서의 마하 수(Mach number)이다.

#### 2.2.2 지배방정식

2차원 비점성 초음속 유동에 대한 지배방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y = 0 \quad (2)$$

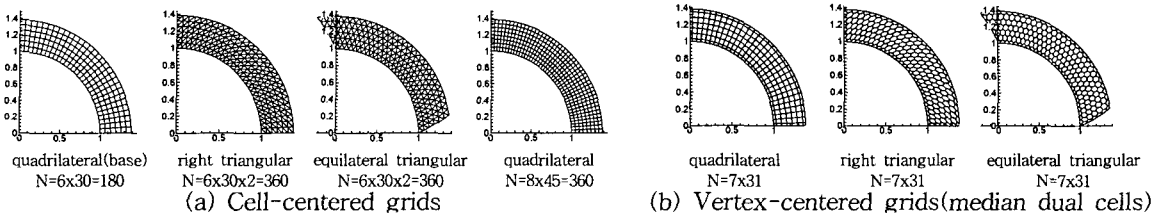


Fig. 4 Meshes for the simulation of 2-D inviscid supersonic vortex flow

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ u(p+e) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ v(p+e) \end{pmatrix}$$

여기에서,  $\rho$ 는 밀도,  $p$ 는 정압,  $u$ ,  $v$ 는 각각  $x$  방향,  $y$  방향의 속도이다. Total energy,  $e$ 는 완전기체의 상태방정식으로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$e = \frac{p}{(\gamma-1)} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (3)$$

이 방정식들을 Roe의 Approximate Riemann Solver[13]를 사용하여 풀었다. 시간 적분에는 음해법의 일종인 LU-SGS를 사용하였다.

### 2.2.3 Reconstruction

$i$ 번째 검사체적의 경계면에서 변수  $\phi$ 의 플럭스를 구할 때에 필요한 구배  $\phi_x$ 와  $\phi_y$ 의 값을 구하기 위해서 다음과 같은 Least square reconstruction method[6]를 사용하였다.

$$\phi(x, y) = \phi_i + \phi_x(x-x_i) + \phi_y(y-y_i) \quad (4)$$

$$\phi_x = \frac{1}{\Delta} [ I_{yy} \sum_n (\phi_n - \phi_i)(x_n - x_i) - I_{xy} \sum_n (\phi_n - \phi_i)(y_n - y_i) ]$$

$$\phi_y = \frac{1}{\Delta} [ -I_{xy} \sum_n (\phi_n - \phi_i)(x_n - x_i) + I_{xx} \sum_n (\phi_n - \phi_i)(y_n - y_i) ]$$

$$I_{xx} = \sum_n (x_n - x_i)^2$$

$$I_{yy} = \sum_n (y_n - y_i)^2$$

$$I_{xy} = \sum_n (x_n - x_i)(y_n - y_i)$$

$$\Delta = I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2$$

여기에서,  $n$ 은  $i$ 번째 검사체적에 이웃한 모든 셀을 나타낸다.

수치해의 진동을 방지하기 위해 리미터 ( $\Psi$ )[1,6]를 사용하는 경우는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi(x, y) = \phi_i + \Psi[\phi_x(x-x_i) + \phi_y(y-y_i)] \quad (5)$$

초음속 보텍스 유동은 비교적 간단하고 교란이 크지 않은 유동이므로, 본 연구에서는 리미터를 사용하지 않았으며,  $\Psi=0$ (1차 정확도, 1st order accuracy)과  $\Psi=1$ (2차 정확도, 2nd order accuracy)인 경우에 대하여 수치계산을 수행하여 결과를 비교하였다.

### 2.2.4 경계조건

반지름  $r_i$ 에서의 입구 마하수는 2.25이며 바깥쪽 반지름  $r_o$ 는  $1.384r_i$ 이다. 안쪽 반지름  $r_i$ 는 1이고, 입구에서의 밀도는  $1(=\rho_{in})$ , 압력은  $1/\gamma(=p_{in})$ 이다. 안쪽 및 바깥쪽 반경의 경계면에는 미끄럼 벽(Slip wall)조건을 주었고, 출구에는 외삽조건을 주었다(Fig. 3).

### 2.2.5 계산격자

계산에 사용한 격자를 Fig. 4에 나타내었다. Fig. 4(a)는 셀 중심 방법으로 만든 격자이며, Fig. 4(b)는 격자점 중심 방법으로 만든 격자의 Median dual 셀이다. 그림에서  $N$ 은 검사체적의 수이다. 셀 중심 방법에 대한 계산을 위하여, 그림의 제일 처음에 나타난 것과 같이, 기본(Base) 격자는 사각형 격자로서 셀 수가  $180(=6 \times 30)$ 개이며, 삼각형 격자는 이를 둘로 나누어서 만들었으므로 격자의 수는 사각형 격자의 두 배(360개)

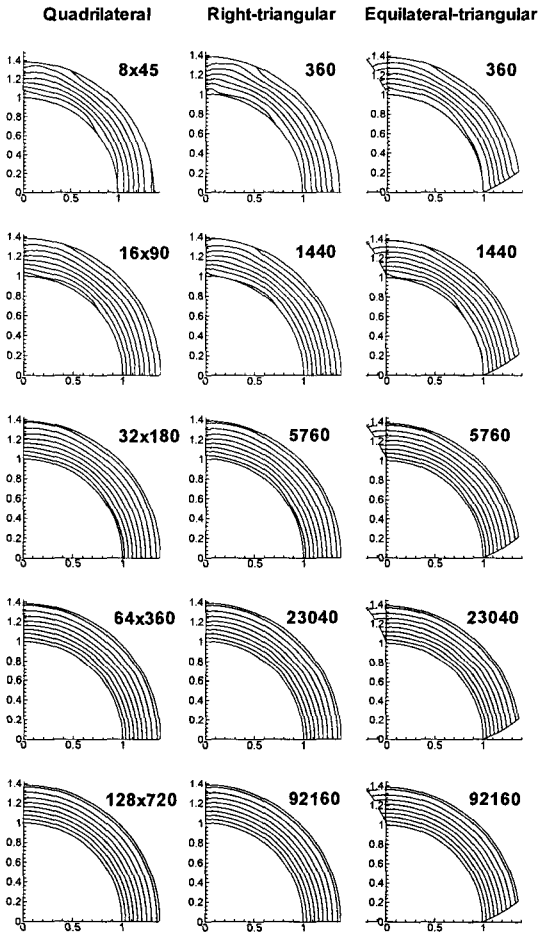


Fig. 5 Density contours from cell-centered calculation(1st order accuracy)

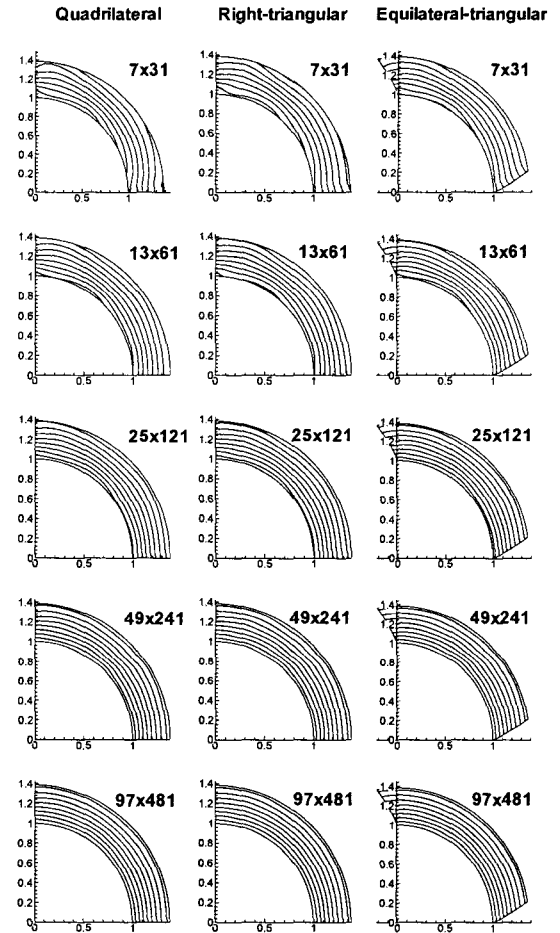


Fig. 6 Density contours from vertex-centered calculation(1st order accuracy)

이다. 그러므로 사각형 격자와 비교하기 위하여 격자수가 같은( $8 \times 45 = 360$ ) 사각형 격자를 포함하여 고찰하였다. 그러나, 격자점 중심방법으로 계산하는 경우 격자점 수를 기준으로 하면 사각형 격자(기본격자)와 삼각형 격자의 격자점 수는  $217 = (7 \times 31)$ 개로서 동일하며, 검사체적의 모양은 Fig. 4(b)와 같아진다. 이 기본격자의 수를 각각 4배, 16배, 64배, 256배로 늘려가면서 모든 격자를 구성하였으며, 계산결과와 해석해와의 오차와 계산실행시간을 측정하여 계산의 정확도와 효율에 대하여 고찰하였다.

### 3. 결과 및 검토

#### 3.1 1차 정확도 계산 결과

##### 3.1.1 격자계에 따른 계산 결과

Fig. 5와 Fig. 6에 격자 구성방법에 따라 1차 정확도로 계산한 결과로서 밀도 분포를 나타내었다. 각 등밀도선의 값은 0.2 간격으로 그렸다. 격자의 수가 증가하면서 등밀도선이 점점 원형으로 변화해 가는 것을 볼 수 있다. 격자의 수가 적을때 등밀도선이 안쪽 벽을 향하는 경향을 볼 수 있으며, 이는 Aftosmis 등[1]의 결과와 일치한다. 격자 구성방법의 차이에서 오는 밀도분포의 차이는 크지 않은 것으로 보인다.

수치계산 결과와 해석해와의 절대오차분포를 격자 구성방법에 따라 Fig. 7과 Fig. 8에 나타내었다. 등오차선의 간격은 0.05이다. 셀 중심 방법의 경우, 셀의 수가 모두 같으므로 오차는 거의 비슷한 분포를 보이면서도, 사각형 격자와 직

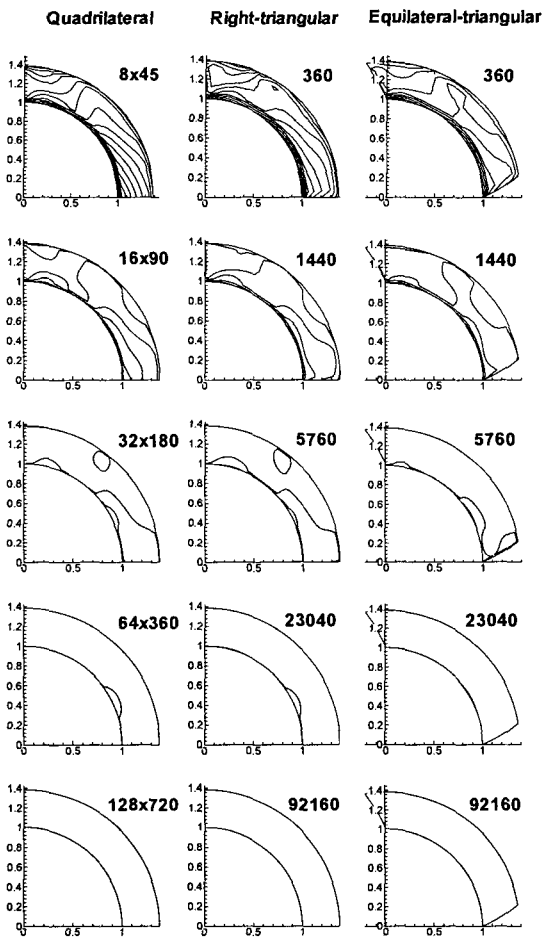


Fig. 7 Absolute error contours from cell-centered calculation(1st order accuracy)

각삼각형 격자의 경우가 비슷한 경향을 보이며, 삼각형 격자의 경우는 직각 삼각형보다 이등변 삼각형의 경우에 오차가 더 작아지는 것을 볼 수 있다. 격자점 중심 방법의 경우는 삼각형이나 사각형 격자의 경우에 격자점의 수가 같지만, 오차는 삼각형 격자의 경우가 사각형 격자의 경우보다 작고, 이등변 삼각형 격자가 직각 삼각형 격자보다 작은 것을 볼 수 있다.

격자점 중심 격자를 이용하면 셀 중심 격자에 비하여 약 1/2의 검사체적을 가지고 계산을 할 수 있으므로 경제적이기는 하나 오차는 약간 큰 것을 볼 수 있다.

### 3.1.2 계산의 정확도

계산의 정확도를 알아보기 위하여 해석해와 수치해와의 평균오차를 먼저 구하였다. 평균 오

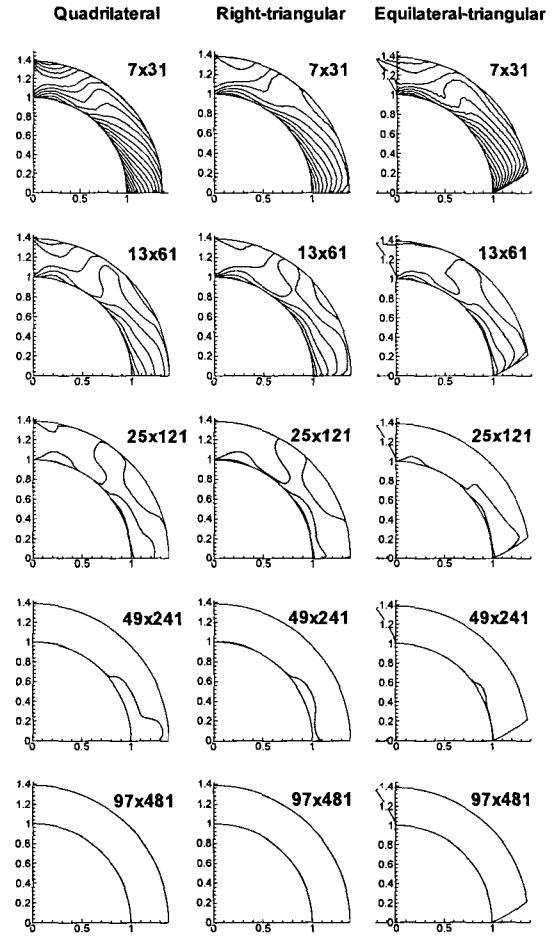


Fig. 8 Absolute error contours from vertex-centered calculation(1st order accuracy)

차는 다음 식으로 나타낼 수 있다[6,14,15].

$$L_p = \left[ \int \frac{(\phi_i - \phi_{exact})^p dA}{A} \right]^{1/p} \quad (6)$$

여기서  $p$ 는 order이다.

Fig. 9에 계산에 사용한 검사체적의 수(셀 중심 방법에서는 셀의 수, 격자점 중심 방법에서는 격자점의 수)와  $L_1$ 과의 관계를 나타내었다. 모두 1st order의 기울기를 가지고 있으며, 격자점 중심 방법이 조금 더 기울기가 크다. 오차의 크기는 격자 구성방법에 관계없이 사각형과 직각 삼각형격자의 경우는 비슷하다. 이등변 삼각형 격자의 경우가 가장 작은 것을 볼 수 있는데, 이는 검사체적의 면의 수가 사각형 격자보다 많고, 경계면이 셀 중심에 수직하기 때문에 플럭스 계

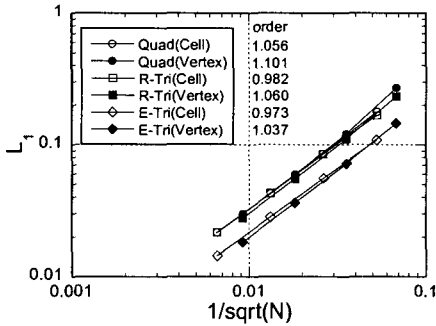


Fig. 9 The relation of  $L_1$  with respect to the inverse of the square root of number of control volumes(1st order accuracy).

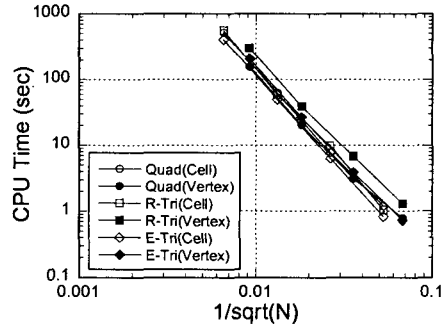


Fig. 10 The relation of CPU Time with respect to the inverse of the square root of number of control volumes(1st order accuracy).

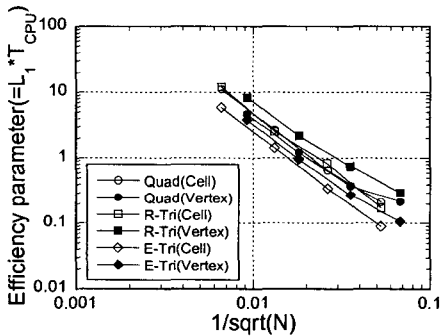


Fig. 11 The relation of efficiency parameter with respect to the inverse of the square root of number of control volumes(1st order accuracy).

산이 더 정확하게 되기 때문으로 설명할 수 있다.

### 3.1.3 계산소요시간(CPU Time)

Fig. 10에 계산에 소요된 시간(CPU Time)을 검사체적의 수에 대하여 그래프로 나타내었다. 계산에는 레드햇 리눅스 7.3을 설치한 Pentium 4, 2GHz, RAM 512MB, PC를 사용하였다. 격자점 중심 방법을 사용한 직각삼각형 격자의 경우가 계산에 비교적 많은 시간이 걸리는 것을 볼 수 있으며, 셀 중심 방법을 사용한 이등변 삼각형 격자의 경우가 가장 시간이 적게 걸렸다.

### 3.1.4 계산의 효율

수치계산을 하는데 있어서, 오차는 작으면 작을수록 좋고 계산시간은 짧으면 짧을수록 좋을 수 있다. 계산의 효율을 정의하는 방법이 여러가지가 있겠지만, 본 연구에서는 계산 결과를 비교하기 위한 하나의 파라미터로서 단순히 정확

도와 소요시간(CPU 시간)의 함수의 곱으로 다음과 같이 정의하여 시도해 보았다.

$$\begin{aligned} \text{효율 파라메터} &= \text{평균오차} \times \text{소요시간} \quad (7) \\ &= L_1 \times T_{CPU} \end{aligned}$$

따라서, 이 효율 파라메터가 작을수록 좋다고 말할 수 있을 것이다. 이 효율 파라메터의 값을 Fig. 11에 나타내었으며, 이등변 삼각형 격자의 경우(특히 셀 중심 방법을 사용한 경우)가 가장 아랫부분에 있으므로 가장 효율이 좋다고 말할 수 있을 것이다.

## 3.2 2차 정확도 계산 결과

### 3.2.1 격자계에 따른 계산 결과

Fig. 12와 Fig. 13에 격자 구성방법에 따라 2차 정확도로 계산한 결과로서 밀도분포를 나타내었다. 2차 정확도로 계산한 경우에는 검사체적의 수가 64배 이상으로 많아지면 결과는 거의 눈으로는 구별할 수 없을 정도로 해석해에 가까워 지므로 그 이상에 대한 결과는 나타내지 않았다.

격자 수가 작은 경우에는 격자점 중심 방법을 사용한 경우가 더 좋은 결과를 보이고 있으며, 1차 정확도 계산에서와 같은 등밀도 선이 안쪽 벽으로 향하는 문제가 개선된 것을 볼 수 있다.

해석해와의 절대오차분포를 Fig. 14와 Fig. 15에 나타내었다. 1차 정확도 계산에 비하여 계산 영역 중앙부에서의 오차가 거의 없어지고 경계에 접한 셀에서의 오차가 주를 이루었으며, 격자점 중심 방법으로 계산한 경우가 조금 더 나은 결과

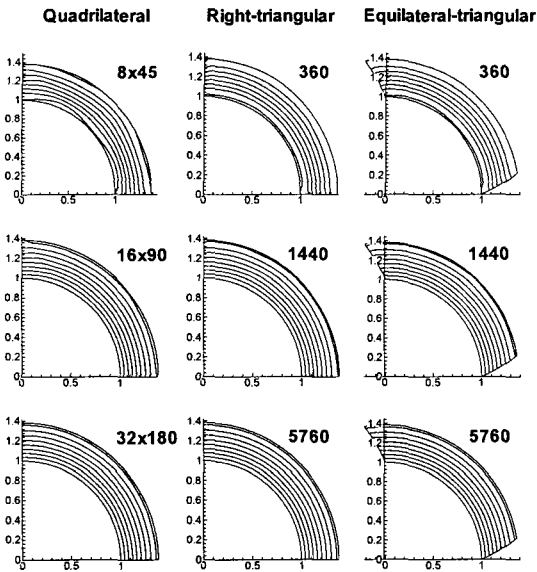


Fig. 12 Density contours from cell-centered calculation(2nd order accuracy)

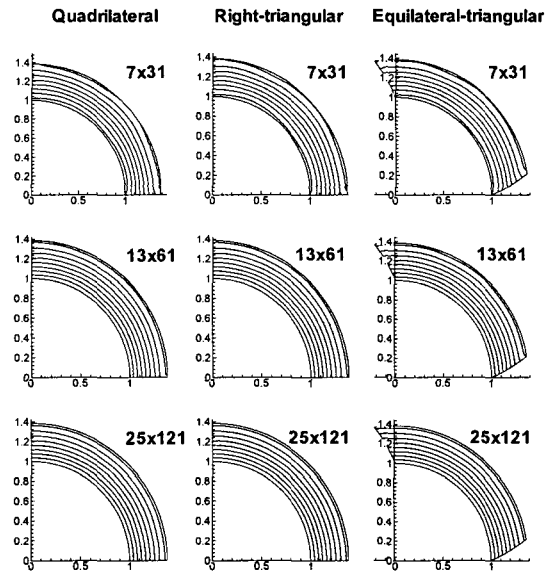


Fig. 13 Density contours from vertex-centered calculation(2nd order accuracy)

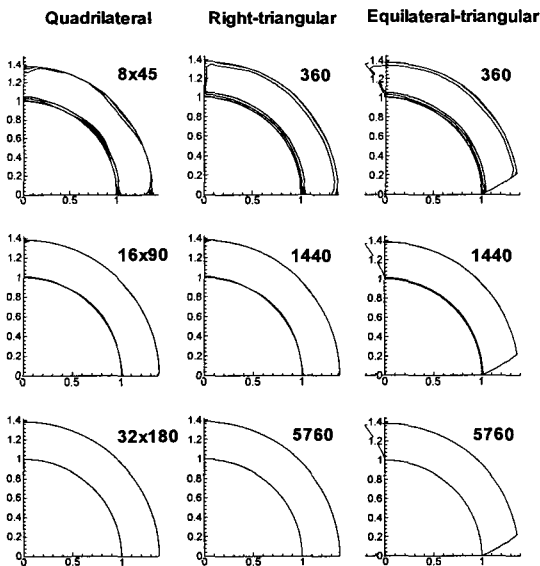


Fig. 14 Absolute error contours from cell-centered calculation (2nd order accuracy)

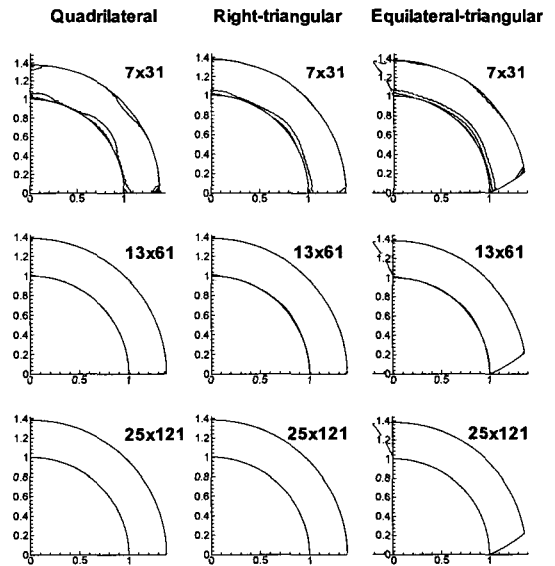


Fig. 15 Absolute error contours from vertex-centered calculation (2nd order accuracy)

를 보인다고 할 수 있다. 격자수가 더 많아지면 등오차선은 거의 보이지 않게 되므로 그림을 생략하였다.

### 3.2.2 계산의 정확도

Fig. 16에 식(6)으로 계산한  $L_1$ 을 나타내었다.

격자점 중심방법에 의한 계산결과는 거의 같은데, 이는 2차 정확도의 계산이 격자의 형상에 의한 오차의 영향을 보완해 주는 것으로 생각된다. 이등변 삼각형 격자의 경우는 격자구성방법에 관계없이 오차가 비슷하며, 이는 1차 정확도 계산의 경우와 일관된 결과를 보인다. 셀 중심 방법

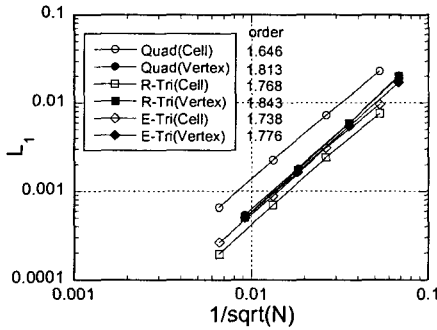


Fig. 16 The relation of  $L_1$  with respect to the inverse of the square root of number of control volumes(2nd order accuracy).

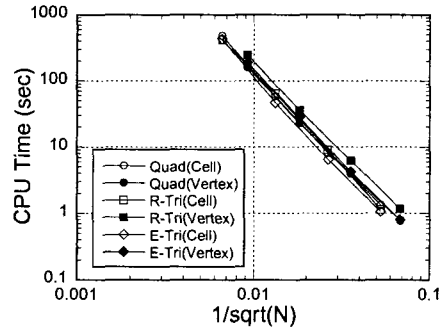


Fig. 17 The relation of CPU Time with respect to the inverse of the square root of number of control volumes(2nd order accuracy).

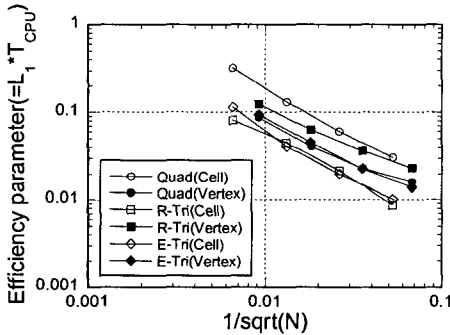


Fig. 18 The relation of efficiency parameter with respect to the inverse of the square root of number of control volumes(2nd order accuracy).

에 의한 계산결과는 모두 차이를 보이며, 직각삼각형 격자의 경우가 가장 작은 오차를 보이고 있는 점이 1차 정확도의 경우와 다르며, 이에 대한 설명은 좀더 많은 연구를 필요로 할 것으로 생각한다.

### 3.2.3 계산소요시간(CPU Time)

Fig. 17에 2차 정확도로 계산한 경우의 계산 소요시간을 나타내었다. 격자점 중심 방법을 사용한 직각삼각형 격자의 경우가 계산에 비교적 많은 시간이 걸렸고, 셀 중심 방법을 사용한 이등변 삼각형 격자의 경우가 가장 시간이 적게 걸렸다. 이는 1차 정확도 계산의 경우와 같다. 그러나 격자수가 많아지면 격자점 중심 방법에 의한 계산 소요 시간이 셀 중심 방법에 의한 계산 시간보다 상대적으로 줄어드는 경향을 보이고 있으므로, 10만개 이상의 더 많은 격자 수에 대해서는 좀 더 연구가 계속되어야 할 것이다.

### 3.2.4 계산의 효율

Fig. 18에 식(7)로 정의한 효율 파라미터를 나타내었다. 셀 중심 방법에 의한 삼각형 격자를 사용한 경우가 효율이 좋으며, 사각형 격자가 가장 나쁘다. 격자점 중심 방법에 의한 계산결과는 중간정도에 위치하는데, 격자수가 본 연구에서 고려한 것 보다 더 많아지면 차이는 점점 줄어들 것으로 보인다. 이는 계산 결과를 로그 그래프로 나타낸 경우에, 오차와 계산 소요시간은 거의 선형적으로 줄어드는데, 격자점 중심 방법이 오차의 기울기는 더 크고, 계산 소요시간의 기울기는 더 작기 때문으로 생각된다.

## 4. 결론

2D 비점성 초음속 보텍스 유동에 대하여, 셀 중심 방법과 격자점 중심 방법에 의해서 만든 사각형과 삼각형 격자에 대하여 정확도와 소요시간, 그리고 효율에 대해서 비교하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 격자의 수가 증가하면 모든 격자의 경우에 오차는 줄어들지만, 그 중에도 이등변 삼각형 격자의 경우가 오차가 비교적 적음을 알 수 있었다.

(2) 소요시간은 격자에 따른 뚜렷한 차이는 안 나지만 격자점 중심 방법을 사용한 직각삼각형 격자의 경우가 시간이 가장 많이 걸리며, 셀 중심 방법을 사용한 이등변 삼각형의 경우가 시간이 가장 적게 걸림을 알 수 있었다.

(3) 효율은 이등변 삼각형 격자의 경우가 가장



좋았으며, 셀 중심 방법이 조금 더 좋았다. 격자의 수가 더 많아지면 이러한 경향은 바뀔 수 있을 것으로 예측된다. 또한, 수치계산의 효율을 나타내는 좀 더 적절한 파라미터를 고안할 필요가 있다.

(4) 1차 정확도 계산의 경우에는 격자구성방법에 따른 오차의 차이는 거의 없다. 2차 정확도 계산의 경우에는 격자점 중심 방법에 의한 계산 오차는 격자모양에 무관하며, 이는 2차 정확도 계산이 셀 형상에 의한 오차의 영향을 보완하기 때문으로 생각한다. 셀 중심 방법에 의한 계산 결과 중에서는 직각삼각형 격자가 가장 적은 오차를 나타낸다.

## 후 기

본 연구는 2002년도 강릉대학교 장기해외파견 연구지원에 의하여 수행되었으며, 관계자 여러분께 감사 드립니다.

## 참고문헌

- [1] Aftosmis, M., Gaitoned, D. and Tavares, T.S., "On the Accuracy, Stability and Monotonicity of Various Reconstruction Algorithms for Unstructured Meshes," AIAA 94-0415, 32nd Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, Jan. 10-13, Reno, NV, (1994).
- [2] 강동진, 배상수, 주상우, "비압점성유동 해석을 위한 비정렬 유한체적법," *대한기계학회논문집 B권*, 제22권, 제10호, (1998), pp.1410-1421.
- [3] 김종태, 김용모, 맹주성, "비정렬 혼합 격자에서 내재적 방법을 이용한 비압축성 유동해석," *한국전산유체공학회지*, 제3권, 제2호, (1999), pp.17-26.
- [4] 강동진, 배상수, "비정렬 유한체적법을 위한 QUICK법의 수정," *대한기계학회논문집 B권*, 제24권, 제9호, (2000), pp.1148-1156.
- [5] 최형일, 이도형, 맹주성, "전 속도영역 유동을 위한 비정렬격자 압력기반 해법," *대한기계학회논문집 B권*, 제26권, 제11호, (2002), pp.1521-1530.
- [6] Wang, Z.J., "An Adaptive Hybrid (Cartesian - Prism) Grid and Flow Solver for Navier - Stokes Equations," *SBIR Phase I Final Report*, CFD Research Corporation, (1995)
- [7] 문영준, "비구조형 유한체적법을 이용한 Navier-Stokes 해석의 정확도 검증에 관한 연구," *한국항공우주학회지*, 제23권, 제2호, (1995), pp.24-30.
- [8] 권오준, "3차원 비정렬 격자를 사용한 비점성 유동해석," *한국항공우주학회지*, 제24권, 제1호, (1996), pp.46-56.
- [9] 권오준, 노오현, "비정렬 삼각형 격자에서의  $k-\epsilon$  난류 모델을 이용한 점성유동 해석," *한국항공우주학회지*, 제24권, 제4호, (1996), pp. 31-41.
- [10] Lien, F.-S., "A pressure-based unstructured grid method for all-speed flows," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol.33(2000), pp.355- 374.
- [11] Shih-I Pai, *Introduction to the Theory of Compressible Flow*, D. Van Nostrand company, Inc., Princeton, NJ(1959)
- [12] Akira Ogawa, *Vortex Flow*, CRC Press, Inc., (1993), pp. 248-251.2
- [13] Roe, P.L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes," *J. of Computational Physics*, Vol.135, (1997), pp.250-258.
- [14] William J. Coirier and Kenneth G. Powell, "An Accuracy Assessment of Cartesian-Mesh Approaches for the Euler Equations," *J. of Computational Physics*, Vol.117, (1995), pp.121-131.
- [15] Mitchell, C.R., "Improved Reconstruction Schemes for the Navier-Stokes Equations on Unstructured Meshes," *AIAA 94-0642*, 32nd Aerospace Sciences Meeting & Exhibit(Jan. 10-13, 1994, Reno, NV), (1994).