

## ◎ 논문

## Kriging 방법을 이용한 2차원 날개 형상 최적설계에 대한 연구

가재도<sup>\*1</sup>, 권장혁<sup>\*2</sup>

### A Study on 2-D Airfoil Design Optimization by Kriging

Jae Do Ka and Jang Hyuk Kwon

Recently with growth in the capability of super computers and parallel computers, shape design optimization is becoming easible for real problems. Also, Computational Fluid Dynamics(CFD) techniques have been improved for higher reliability and higher accuracy. In the shape design optimization, analysis solvers and optimization schemes are essential. In this work, the Roe's 2nd-order Upwind TVD scheme and DADI time march with multigrid were used for the flow solution with the Euler equation and FDM(Finite Differenciation Method), GA(Genetic Algorithm) and Kriging were used for the design optimization. Kriging were applied to 2-D airfoil design optimization and compared with FDM and GA's results. When Kriging is applied to the nonlinear problems, satisfactory results were obtained. From the result design optimization by Kriging method appeared as good as other methods.

**Key Words:** 메타모델(metamodel), Kriging, 최적화(optimization), 날개 형상 설계(airfoil design)

### 1. 서론

항공기 설계라고 하면 일반적으로 사람들은 항공기의 형상을 디자인 하는 도면작성(drawing)을 생각한다. 완전히 틀린 말은 아니지만 항공기를 설계하는 사람은 머릿속에 특정한 형태의 항공기 밑그림을 떠올리면서 항공기를 설계하지는 않는다. 올바른 설계(design)란 설계자가 어떠한 생각을 가지고 항공기를 설계하느냐에 초점이 맞춰지는 중요한 문제이다. 따라서 현재 운용되는 모든 항공기의 작은 부품 하나에도 설계자(designer)의 생각이 내재되어 있는 것은 두말할 나위도 없

다. 현대에 이르면서 항공기는 단지 하늘을 나는 물체에 국한 되지 않고 다목적으로 사용되고 있다. 항공기가 다목적으로 이용되면서 요구되는 사항도 또한 복잡, 다양해지고 있는데 이러한 요구사항과 시대적 추세를 설계자(designer)는 충족시켜 줄 수 있어야 한다.

현대에는 여러 가지 방법으로 항공기 설계를 시도하고 있는데 이러한 것을 가능하게 한 것이 바로 컴퓨터의 발달이며 이에 발맞추어 발전한 것이 전산 유체역학이다. 이러한 이유가 현대에 이르러서는 전산 유체역학을 비행체 혹은 기계 부품을 설계하는데 있어서 설계의 문제점과 개선점 및 성능을 해석하는데 사용하게 하였다.

따라서 본 연구에서는 컴퓨터를 이용한 날개 형상 최적화를 위한 많은 방법들이 가지고 있는 문제점 중의 하나인 계산시간을 줄이기 위한 방

\* 2004년 1월 13일 접수

\*1 학생회원, 한국과학기술원 항공우주공학과

\*2 정회원, 한국과학기술원 항공우주공학과

법을 연구하게 되었다. 계산시간의 대부분이 유동장 해석에 따른 것이므로 최적설계를 진행해 나가는 동안 유동장 해석을 하지 않는 Kriging 방법이 2차원 날개 형상 최적화에 대한 또 다른 방법으로 적합함을 제시하고자 하였다. 본 연구에서는 현재까지 적용되어지고 있는 많은 최적화 방법 중 BFGS와 GA(Genetic Algorithm) 방법을 택하여 Kriging 방법을 이용한 최적설계 결과와 비교하였다.

## 2. Kriging

### 2.1 Kriging의 일반적 개념

Kriging 방법은 프랑스의 지질수학자인 Georges Matheron이 1950년대 남아프리카의 채광학자 D. G. Krige가 적용했던 경험적인 방법을 수학적으로 정립하면서 사용되기 시작하였다. 지질 통계학분야에서 출발한 Kriging 모델이 공학 분야에 적용되기 시작한 것은 1989년 Sacks 등이 컴퓨터 실험에 적합하도록 수정하여 적용하면서 부터이다. Sacks는 지질 통계학에서 Kriging이 variogram을 사용해 국부적인 부분을 묘사하던 것을 공분산 함수(covariance function)로 표시하였다[1].

Kriging 모델의 형태는 다음과 같다.

$$\hat{y}(x) = f(x) + Z(x) \quad (1)$$

여기서  $f(x)$ 는 임의의 모델 함수로서 다항식 또는 상수가 될 수 있다.  $Z(x)$ 는 Gaussian random function을 통해 계산되는 값을 말하며 Simpson의 논문[2]에 의하면  $f(x)$ 는 전역적 설계공간을 근사화 하는 부분이고  $Z(x)$ 는 국부적 설계공간을 근사화 하는 부분으로 말하고 있다.  $Z(x)$ 는 평균이 0이고 다음 식과 같은 공분산을 가지는 것으로 가정한다.

$$Cov[Z(x^i), Z(x^j)] = \sigma^2 R[x(x^i, x^j)] \quad (2)$$

$\sigma^2$ 은 random process의 분산을 의미하고  $x^i, x^j$ 는 표본에서의  $i$ 번째,  $j$ 번째 설계변수 벡터를 의미하고,  $R(x^i, x^j)$ 는  $x^i$ 와  $x^j$  사이의 상

관성(correlation)을 계산하는 상관함수(correlation function)를 말한다.  $R$ 은 상관행렬(correlation matrix)로서 상관함수 값인  $R(x^i, x^j)$ 를  $x^i, x^j$  열의 성분으로 가진다. 본 논문에서는 변수들 간의 관계가 해석적이고 반응표면이 매끄러운 것으로 알려져 있는 Gaussian correlation function을 사용하였다. 설계변수의 개수가  $n_v$ 이고 표본 내 점의 개수가  $n_s$ 일때 Kriging 방법에 사용된 Gaussian correlation function은 다음과 같다.

$$R(x^i, x^j) = \exp\left[-\sum_{k=1}^{n_v} \theta_k |x_k^i - x_k^j|^2\right] \quad (3)$$

$\theta_k$ 는 설계변수들 사이의 상관관계를 나타내는 인자로서 값이 클수록 설계변수들 간의 상관성이 크다. Kriging을 통하여 예상되는 값은 얻는 식은 다음과 같이 유도된다.

$$\hat{y}(x) = \hat{\beta} + \gamma^T R^{-1}(y - J\hat{\beta}) \quad (4)$$

여기서

$$\gamma^T(x) = [R(x, x^1), R(x, x^2), \dots, R(x, x^{n_s})]$$

$$\hat{\beta} = (F^T R^{-1} F)^{-1} F^T R^{-1} y$$

$\gamma$ 는  $n_s$ 의 길이를 가지는 벡터로 Kriging을 이용해 예측하려는 점과 표본간의 상관벡터를 의미하고  $F$ 는 길이가  $n_s$ 이고 모든 요소가 1인 벡터를 의미하며  $y$ 는 표본에서의 반응들로 이루어진 길이가  $n_s$ 인 벡터이다[3,4,5].

### 2.2 테스트 함수에의 적용

반응표면 혹은 모델이란 복잡한 원래의 함수를 설계자가 정한 차수의 반응표면을 근사화, 간략화시킨 결과라고 할 수 있다. 따라서 선택된 메타모델 방법이 어떻게, 얼마나 정확하게 모델을 만드는지에 대한 검증이 필요하다.

본 연구에서는 5개의 함수를 이용하였으며 모두 2개의 설계변수를 사용하여 Kriging 방법으로 시험하였다. 이유는 실제의 함수를 시각화하는데

편리 했기 때문이며 모델 형성에 사용된 database 는 무작위로 100개의 임의의 점들을 선정했다. Kriging 방법을 위한 테스트 함수로서 사용된 함수는 다음과 같다.

$$f(x)_1 = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

$$f(x)_2 = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$$

$$f(x)_3 = x_1^2 + 2x_2^2 - 0.3 \cos(3\pi x_1) - 0.4 \cos(4\pi x_2) + 0.7$$

$$f(x)_4 = (30 + x_1 \sin(x_1))(4 + \exp(-x_2^2))$$

$$f(x)_5 = \sin(\pi x_1 / 12) \cos(\pi x_2 / 16)$$

### 2.3 테스트 함수의 결과 및 고찰

Kriging 모델을 적용하는데 있어서 가장 중요한 것은 반응표면을 얼마나 정확하게 표현하는가, 즉 얼마나 신뢰할 수 있는 모델을 형성하는가에 초점이 맞추어 진다. Table 1은 5개의 테스트 함수에 Kriging을 적용했을 때 실제 함수와의 오차를 정리한 것이고 Fig. 1은 실제의 함수를 Kriging이 어떻게 묘사를 하고 있는지를 그림으로 도시한 것이다. Table 1과 Fig. 1은 5개의 다양한 비선형성 문제에 Kriging 방법을 적용한 결과로써 실제의 함수들을 모두 잘 묘사하고 있다는 결론을 얻게 되었으며 이를 토대로 하여 2차원 날개 형상과 같은 비선형성이 강한 문제에 Kriging 방법을 적용하는 것이 적합하다는 결론을 얻게 되었다.

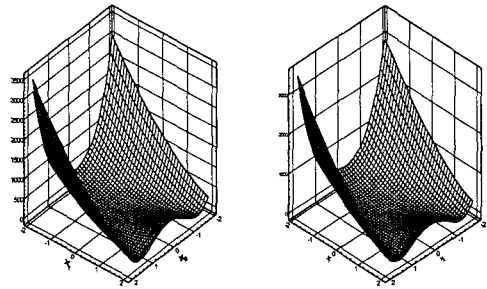
적용한 RMS error와 % error는 다음과 같다.

$$\text{RMS error} = \sqrt{\left[ \sum_{i=1}^{n_s} (y_i - \hat{y}_i)^2 \right] / n_s}$$

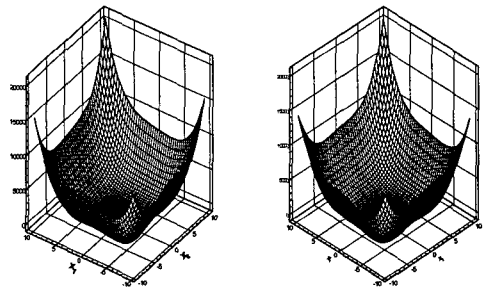
$$\% \text{ error} = [ |y - \hat{y}| \times 100 ] / y$$

Table 1 Error and variable range

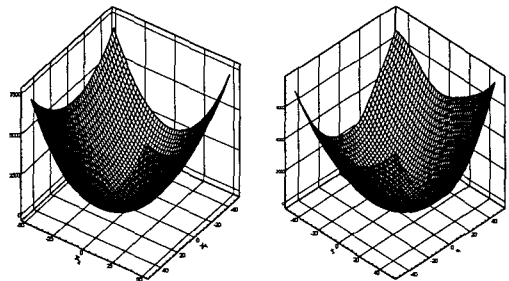
test fn	RMS error	% error	$x_i$ range
$f(x)_1$	7.8	1.76	$-2 \leq x_i \leq 2$
$f(x)_2$	88.5	2.88	$-10 \leq x_i \leq 10$
$f(x)_3$	51.61	2.06	$-50 \leq x_i \leq 50$
$f(x)_4$	8.45	4.79	$0 \leq x_i \leq 8$
$f(x)_5$	0.0016	1.19	$0 \leq x_i \leq 20$



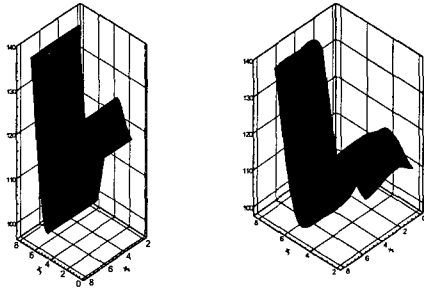
(a) Test function 1



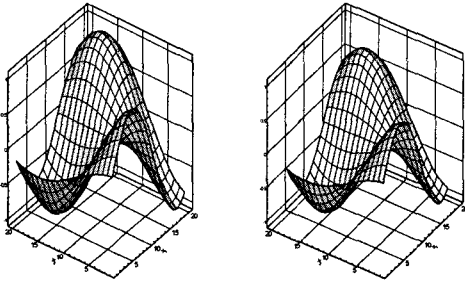
(b) Test function 2



(c) Test function 3



(d) Test function 4



(e) Test function 5

Fig. 1 True surface(left) and approximated surface by Kriging (right)

### 3. Database 형성

대부분의 Kriging은 database를 기초로 하여 모델을 구성하게 되는데 일반적으로는 디자인 공간에 대하여 균등하게 분배할 수 있는 실험계획법(DOE)을 많이 사용한다. 하지만 본 논문에서는 이러한 실험계획법을 사용하지 않고 Kriging 방법을 GA에 결속시켜 database를 형성하게 하였다. 이는 GA가 최적설계를 수행하며 전역최적치를 향해 수렴하는 성질을 이용하려 한 것으로 초기 GA에 의해 최적설계를 수행하면서 탐색하였던 모든 자료들을 저장하도록 하였으며 GA가 수렴해 가는도중 각 세대별 목적함수의 분산을 계산하여 분산이 다시 증가 할때 Kriging 방법으로 전환하게 하였다. 본 논문에서 다루어진 모든 GA는 참고문헌[6,7]에서 다루어진 GA를 이용한 것이다.

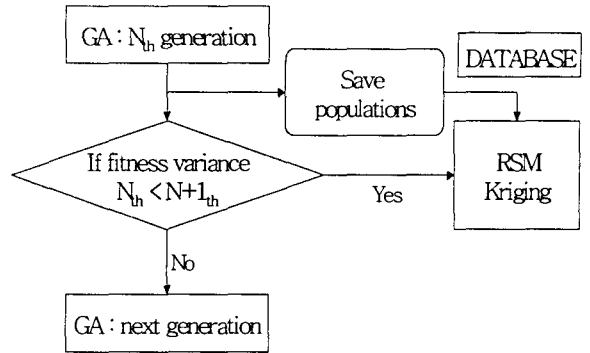


Fig. 2 Database by Kriging with GA

## 4. Flow solver 및 최적설계 조건

### 4.1 Flow solver

2차원 압축성 Euler 방정식을 직교좌표계에서 보존형으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix}$$

여기서, U는 보존변수이고 F와 G는 각각 x방향과 y방향의 대류항이다. 지배방정식의 수치적 해를 얻기 위하여 격자 중심의 유한 체적법(Cell centered FVM)을 사용하였다. 또 격자 경계면의 유속을 계산하기 위해서는 Roe의 FDS 방법과 2차 Upwind TVD 방법을 사용하여 유동을 해석하였으며 자세한 내용은 박태상의 논문[8]에 기술되어 있다. 또한 수렴 가속화 기법으로 다중격자기법을 이용하였다.

### 4.2 날개의 형상 표현과 목적함수

익형의 형상과 최적화 알고리즘과의 결합을 위해 다음과 같은 형상함수를 도입하였다.

$$y = y_{base} + \sum_i w_i \cdot f_i \quad (5)$$

여기서  $y_{base}$ 는 기저의형을 나타내며 본 연구에서는 RAE2822가 사용되었으며 형상함수  $f_i$ 로는 Hicks-Henne 함수를 사용하였다. Hicks-Henne 함수는 날개의 위, 아래에 각각 5개씩 사용하였고 총 설계변수는 10개이다.

사용된 목적함수는 다음과 같다.

$$object = (1/2)(C_L - C_{L0})^2 + (10/2)C_D^2 \quad (6)$$

### 4.3 FDM 및 GA의 최적 설계 조건

FDM을 이용한 최적설계는 다음과 같은 조건에서 수행되었다. 최적화에 사용된 DOT의 탐색 방향은 근사 Hessian 행렬을 이용한 quasi-Newton 방법인 BFGS를, 1-D line search는 quadratic polynomial로 탐색하였다. Step size는  $10^{-4}$ 의 값을 주었고 자세한 내용은 참고 문헌[9]에 나와있다.

GA를 이용한 최적설계 조건은 총세대수 50, 개체수 80, Island 수 4, 교배확률 0.95, 돌연변이 0.4로 하였다.

### 4.4 기타 최적 설계 조건

초기 날개 형상은 RAE2822로 하였으며 이용된 grid는 129x33의 O-type Grid를 사용하였다. 유동조건은 마하수 0.73, A.O.A 2.78인 상태이다.

## 5. 결과 및 토론

### 5.1 Kriging 방법을 이용한 최적설계 결과

GA에 Kriging 방법을 결속시켜 10회의 최적설계를 실시한 결과 모두 5세대까지는 GA를 수행하였으며 6세대 부터는 Kriging으로 전환하였다. 5세대까지 축적된 database는 모두 480 이었다. Kriging을 통해 모델을 형성함에 있어 설계공간 전반에 걸친 설계변수들의  $\theta$ 값을 최우추정(MLE) 과정을 통해 최적화 시킬수 있다. 본 논문에서는 최적화된  $\theta$ 값을 찾기위해 GA를 사용하여  $\theta$ 값 최적화를 수행하였다.

Table 2에서 보듯이 Kriging 방법을 이용한 최적설계 방법은 항력 최소화 문제를 FDM 보다 더 우수한 결과로 최적설계가 이루어졌지만 항상 이런 결과를 보이는 것은 아니다. Kriging 방법을 이용하여 최적설계를 실시한 결과를 분석해보면 날개 윗면에서 공력 특성에 영향을 많이 주는 설계변수가 DV(7), DV(8), DV(9)였으며 특히 DV(7), DV(8)은 가장 큰 영향을 주었다. 날개 윗면을 분석해 보면 다른 최적설계 방법들과 크게 다르지 않은 것으로 비춰볼때 shock free를 목표로 하는 공력 최적설계에서 영향을 많이 미치는 날개 윗면은 최적치 부근에 모두 접근한 것으로 판단된다. 하지만 이와는 반대로 날개 아랫면의 경우 Kriging 방법 뿐만 아니라 다른 최적화 방법들 모두 달리 최적화된 결과를 보여 주고 있다. GA의 결과 만큼 날개 아랫면을 크게 변화시키지 않는한 대부분의 최적설계 방법들의 항력 최적설계 결과 값이 크게 줄지 않고 비슷한 수준에 머무르고 있다. Kriging 방법을 이용한 최적설계 결과를 보아도 날개 아랫면이 다른 최적화 방법들의 결과와 달리 최적화 되었는데 이는 날개 아랫면이 크게 변하지 않는한 공력 최적화에 많은 영향을 미치지 않는다는 것을 의미한다 (Fig. 4).

Fig. 5에는 공력 최적화 설계에 가장 많은 영향을 미치는 DV(7), DV(8)의 반응표면을 따로 도시하였다. 이 그림은 다른 설계변수들과의 상관관계가 있기 때문에 본 논문의 문제에 정확히 맞는 그림이라고는 할 수 없으나 최적설계의 특성을 파악 하기에 좋은 방법이며 DV(7), DV(8)의 반응표면 자체는 Kriging 방법을 이용하여 정확하게 묘사된 것이다.

이상의 것을 종합한 결과, 비선형성이 강한 공력 최적화 문제에 Kriging 방법을 적용하여 성공적으로 최적설계를 할 수 있음을 확인 하였다.

Table 2 Designed results by optimization methods

	최 적 설 계			
	초기설계	FDM	GA	Kriging-GA
Coefficient	RAE 2822			
$C_L$	0.89094	0.89060	0.89018	0.89432
$C_D$	0.01848	0.01068	0.01011	0.01052

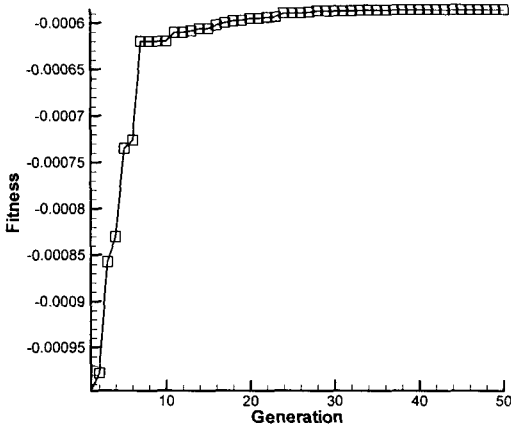
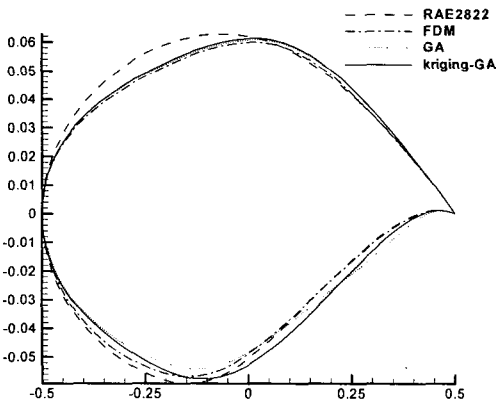
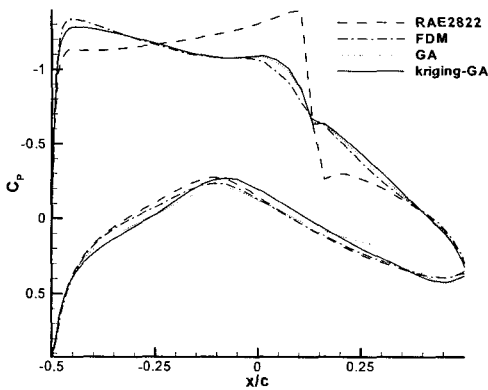


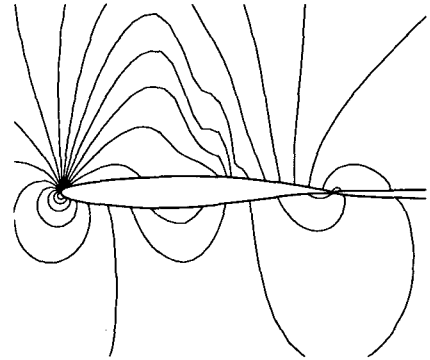
Fig. 3 Kriging-GA fitness history



(a) designed airfoil

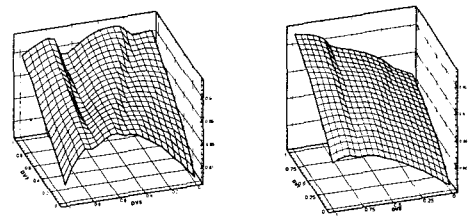


(b) pressure coefficients

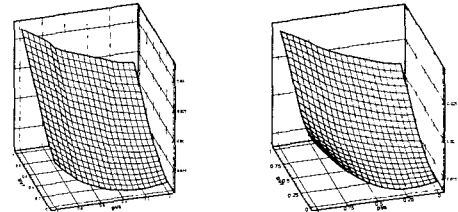


(c) pressure contour

Fig. 4 Design results by Kriging-GA



(a)  $C_L$  vs DV(7) and DV(8)



(a)  $C_D$  vs DV(7) and DV(8)

Fig. 5 DV(7) and DV(8) versus  $C_L$  and  $C_D$  of exact analysis(left) and Kriging-GA (right) approximation

## 6. 결론

본 논문에서는 메타모델 중에서 Kriging 방법을 택하여 테스트 함수에 적용함으로써 2차원 날개 형상 최적화 설계에 적용 할 수 있는가에 대한 적합성을 먼저 실험하였고 이후 GA에 결속시켜 Kriging 방법을 이용한 2차원 날개 형상 최적화를 수행한 결과 다음과 같은 결론을 내릴 수 있었다.

(1) Kriging 방법을 이용한 최적설계는 항공공학에서 주로 사용되었던 민감도 기반의 최적설계 방법이나 추계적인 최적설계 방법에서 반복적으로 계산되었던 유동장 해석 과정을 최적화 과정에서 생략함으로써 최적화 시간을 단축시키는데 효과적이었다.

(2) Kriging 방법을 이용하면 최적설계에 제한 사항으로 작용할 수 있는 여러가지 제약조건과 복잡한 설계조건, 그리고 다양한 목적함수에 대해 추가의 수치해석 프로그램 없이도 수행할 수 있는 좋은 방법이었다.

(3) Kriging 방법은 신뢰할 수 있는 모델을 형성하기 위하여 상관함수에 사용되는  $\theta$ 를 최적화해야하기 때문에 다른 메타모델 방법 보다 모델을 형성하는 시간이 많이 소요되었지만 Kriging 방법은 보다 정확한 모델을 구성하였으며 비선형 문제에 대해서도 신뢰할 수 있는 모델을 형성하여 2차원 날개 형상을 최적화하는데 적합한 방법이었다.

이상의 것을 모두 종합해 보면, 2차원 날개 형상을 최적화하는 문제에 있어서 Kriging 방법을 이용할 경우 매우 효과적이어서 또 하나의 2차원 날개 형상 최적설계 방법으로 적합하다는 결론을 얻었다.

### 참고문헌

- [1] J. Sacks, W.J. Welch, T.J. Mitchell and H.P. Wynn, "Design and Analysis of Computer Experiments," *Statistical Science*, Vol.4, No.4, (1989), pp.409-435
- [2] R.R. Barton, "Metamodeling : A state of the Art Review," *proceeding of the 1994 winter Simulation Conference*, (1994), pp.237-244
- [3] T.W. Simpson, "A Concept Exploration Method for Product Family Design," Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology, (1998).
- [4] R. Jin, W. Chen and T.W. Simpson, "Comparative Studies of Metamodeling Techniques under Multiple Modeling Criteria," *Journal of Structural Optimization*, 23:1, (2000), pp.1-13
- [5] T.W. Simpson, T.M. Mauery, J. Korte and F. Mistree, "Comparison of Response Surface and Kriging Models for Multidisciplinary Design Optimization," *AIAA*, Vol.1, Sep 2-4, (1998), pp.381-391.
- [6] 김수환, "유전알고리즘을 이용한 2차원 날개 형상 최적화에 대한 연구," KAIST석사학위논문, (2001).
- [7] 김수환, 권장혁, 탁민제, "공진화 알고리즘을 이용한 공력 형상 최적화," 한국항공우주학회, 춘계학술발표회 논문집, (2001).
- [8] 성춘호, 권장혁, "Adjoint 방법을 이용한 공력 최적설계 기법에 대한 연구," 한국항공우주학회지, Vol.26, No.8, (1998).
- [9] 배효길, "Adjoint 방정식을 이용한 날개형상 최적설계에 대한 연구," KAIST석사학위논문, (1999).