

◎ 논문

Semi-Lagrangian법을 이용한 구 좌표계에서의 이류 방정식 해석

윤성영*

Numerical Simulation for the Advection Equation on the Sphere
by Semi-Lagrangian Method

Seong Y.Yoon

A Semi-Lagrangian method based on CIP(Cubic Interpolated Pseudoparticle)method is proposed and it is applied to solve the two dimensional advection equation. Especially the attentions are given to settle the pole problem and to enhance the accuracy in solving the advection equation on the spherical coordinate system. In this algorithm, the CIP method is employed as the Semi-Lagrangian method and extended to the spherical coordinate system. To enhance the accuracy of the solution, the spatial discretization is made by CIP method. The mathematical formulation and numerical results are also described. To verify the efficiency, accuracy and capability of proposed algorithm, two dimensional rotating cosine bell problem and the frontogenesis problem are simulated by the present scheme. As results, it is confirmed that the present scheme gives an accurate solution and settles the pole problem in the advection equation on the sphere.

Key Words: CIP Method ,Advection Equation, Semi-Lagrangian Method, Cosine bell, frontogenesis.

1. 서 론

기상, 해양 분야에서의 기류 및 해류의 계산은 그 특성상 구 좌표계를 사용한 계산이 대부분이며 또한 비선형 항을 가지고 있는 이류항의 계산은 전 계산 결과의 안정성, 정확도, 그리고 효율성에 크게 영향을 주기 때문에 중요한 연구과제 중의 하나이다. 지금까지 구 좌표계에서 이류 방정식을 보다 정확하게 그리고 효율적으로 계산하기 위해서 많은 계산방법이 제안되어 왔다[1,2,3,4].

이들 연구들은 수치해의 단조성(monotonicity), Shape 보존성, 질량 보존성 그리고 계산 효율이라는 측면에 주로 관심을 가지고 연구를 수행하였다.

Williamson[1]은 여러 가지 보간함수를 사용하여 평면과 구면에서의 이류방정식을 계산하여 보간함수에 따른 수치계산결과를 비교하였다. 특히 단조성과 극문제 처리 능력면에서 3차 보간함수를 사용한 경우가 좋은 결과를 나타내었다. Smolarkiewicz[2]은 MPDATA법을 기초로 Eulerian 법과 Semi-Lagrangian법을 사용하여 구면상에서 이류 방정식을 계산하였다. 이 계산을 통해서 질량보존 측면에 있어서는 Euler법이 우수하지만 해의 정확도와 계산 효율면에서는 Lagrangian법이 상대적으로 우수함을 서술하였다. Rasch[3]도 Smolarkiewicz와 같이 MPDATA법을 사용하여 shape conserving과 계산 효율성을 개선하기 위한 목적으로 새로운 계산 방법을 제안 하였다. 극 부근에서 CFL제약에 의한 계산의 비효율성을 향상시키기 위해서 Reduced 격자를 사용하여 계산 효율을 개선하였다. 그러나 이들의 계산 방법은 Flux형태로 수식화하여 인위적으로 질량 보존을 만족시키도록 하여

* 2004년 3월 18일 접수

* 정회원, 영남대학교 기계공학과

shape conserving이나 monotonicity를 동시에 만족하는 결과를 얻을 수 없었고 특히 극 부근에서는 상당한 수치오차가 발생하는 것을 Smolarkiewicz[2] 나 Rasch[3]의 계산결과에서 볼 수 있다.

따라서 본 연구에서는 shape conserving, 단조성을 만족하고 그리고 극 문제 해결을 할 수 있는 고차 Semi-Lagrangian법을 제안한다. 이를 위해서 Lagrangian법의 일종이고 높은 정확도와 수치적으로 안정성을 가지고 이류 계산방법으로 주목을 받고 있는 CIP법[5]을 사용하였다. 이 방법을 사용하여 구 좌표계에서의 이류 방정식을 계산하였다. 특히 구 좌표계에서 이류 방정식을 사용할 때 양 극에서 발생하는 singularity 문제를 해결하고 해의 정확도를 향상 시키는데 그 목적을 두고 연구를 수행하였다.

제안된 수치 방법의 유효성을 검토하기 위해서 구 좌표계에서 이류방정식을 사용하여 해석해가 존재하는 문제에 대해서 수치계산을 하였다. 그리고 그 결과를 해석해와 다른 수치계산결과와 비교하여 본 수치방법의 정확성과 타당성을 검토하였다.

2. 수치해석방법

2.1 Semi-Lagrangian 법

어떤 스칼라 함수 $f(x, t)$ 에 대한 이류 방정식을 Lagrangian표현을 사용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{df(x, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = 0 \tag{1}$$

식(1)에서 \mathbf{x} 는 위치 벡터로서 다음과 같은 궤적 방정식을 적분함으로서 계산할 수 있다.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \tag{2}$$

따라서 식(1)은 식(2)로 표현되는 궤적을 따라서 물리량 $f(\mathbf{x}, t)$ 가 일정하다는 것을 의미하며 이것을 Semi-Lagrangian형으로 나타내면

$$\frac{f(\mathbf{x}, t + \Delta t) - f(\mathbf{x}^*, t)}{\Delta t} = 0 \tag{3}$$

또는

$$f(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f(\mathbf{x}^*, t) \tag{4}$$

로 표현된다.

여기서 \mathbf{x}^* 는 출발점을 나타내며 이것은 상미분 방정식(2)를 계산하여 얻을 수 있고, 일반적으로 Eulerian 격자점과 일치하지 않는다.

그림1은 일차원의 경우에 대해서 식(1)로 표현되는 이류 방정식을 backward Semi-Lagrangian법을 이용해서 계산하는 과정을 나타낸 것이다.

식(1)에서 우변 항이 영이므로 물리량, $f(x, t)$ 는 입자가 움직이는 궤적을 따라서 변함이 없다는 것을 나타낸다.

따라서 Fig. 1과 같이 임의의 입자가 시각 t 에서 점 D 를 출발하여 시각 $t + \Delta t$ 에 점 A 에 도착하였다고 한다면 그때 두 지점에서의 물리량 사이에는 식(4)와 같은 관계가 존재한다.

그래서 시각 $t + \Delta t$ 에 점 \mathbf{x} 에서의 물리량 $f(x, t + \Delta t)$ 는 출발점 D 에서의 물리량 $f(x^*, t)$ 와 같으므로 출발점이 있는 점 x_{i-1} 과 \mathbf{x} 사이에서 보간법을 이용해서 그 물리량을 계산할 수 있다.

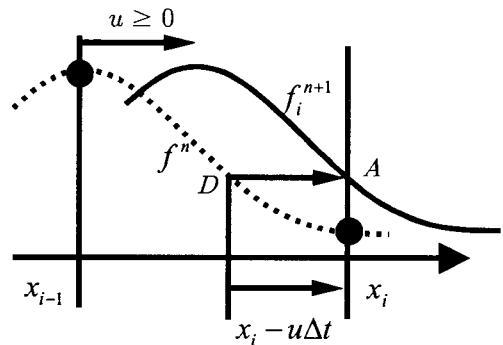


Fig.1 The procedure for backward Semi-Lagrangian method

출발점 \mathbf{x}^* 는 식(2)로 표시되는 상미분 방정식으로 부터 계산할 수 있고, 그것은 Fig. 1과 같이 일반적으로 Eulerian 격자점과 일치하지 않는다. 그러므로 출발점 D 가 위치하고 있는 구간에서 스칼라 함

수 $f(x_{i-1}, t)$ 와 $f(x_i, t)$ 를 이용해서 먼저 보간 함수를 만들고 그것으로부터 $f(x, t + \Delta t)$ 값을 구할 수 있다.

2.2 CIP 법

본 연구에서는 Semi-Lagrangian법으로서 CIP법을 사용하였다. CIP법은 T.Yabe등[5]이 제안한 이류방정식을 계산하는 방법으로써 공간적으로 3차 정도의 정확도와 수치 확산이 적고 Shape conserving특성이 있기 때문에 압축성 유동과 다상 유동 해석에 많이 이용되어 왔다[6,7]. 이 방법은 기존의 계산법과는 달리 특히 계산하고자 하는 물리량과 그 구배량을 이용하여 공간적으로 3차원 다항식을 만들어서 물리량을 보간 한다. 따라서 종래의 수치해석법과는 달리 수치 확산이 적고 높은 정확성 그리고, compact한 특성을 가지고 있다.

일차원 이류방정식을 이용하여 이 방법을 간략히 설명하면 다음과 같다.

CIP법에서는 Fig. 2와 같이 보간 함수로서 다음과 같은 Cubic Piecewise Polynomial을 사용한다.

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (5)$$

[$x_{i-1} < x \leq x_i$ if $u \geq 0$]

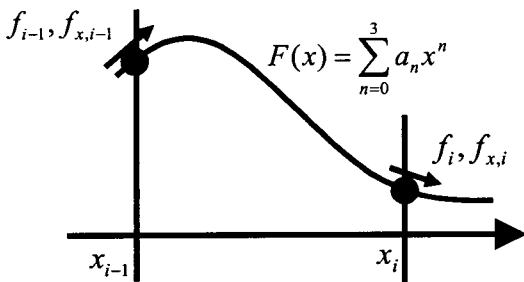


Fig. 2 The piecewise cubic interpolation between x_{i-1} and x_i

다항식의 계수 a_0, a_1, a_2 그리고 a_3 는 Fig.2에서와 같이 출발점이 x_{i-1} 과 x_i 사이에 존재한다고 하면 이를 둘러싸고 있는 두 점에서의 물리량 f_{i-1}, f_i 과 그리고 그의 1차 미분값 $f_{x,i-1}, f_{x,i}$ 을 사용해서 결정

할 수 있다.

결과적으로 두 점에서의 물리량과 그의 미분값으로 식(5)의 계수는 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} a_0 &= f_i \\ a_1 &= f_{x,i} \\ a_2 &= \frac{f_{x,i} - f_{x,i-1}}{\Delta x^2} - 2 \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x^3}, \\ a_3 &= 3 \frac{f_{i-1} - f_i}{\Delta x^2} + \frac{2f_{x,i} + f_{x,i-1}}{\Delta x} \end{aligned} \quad (6)$$

식(6)에서 사용된 미분값 f_x 은 Akima[8]와 Hyman[9]과 같이 주위 물리량으로 계산할 수 있지만 CIP법에서는 사용된 이류 방정식으로부터 계산한다. 이를 위해서 스칼라 함수 $f(x, t)$ 에 대한 이류 방정식(7)을 공간좌표 x 에 대한 1차 미분하면 식(8)을 얻을 수 있다. 따라서 CIP법은 물리량 $f(x, t)$ 에 대한 이류 방정식뿐만 아니라 추가로 이에 대한 1차미분에 대한 방정식도 필요하다. 구체적인 계산 순서는 Appendix에 설명되어 있다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial t} + u \frac{\partial f_x}{\partial x} = -f \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8)$$

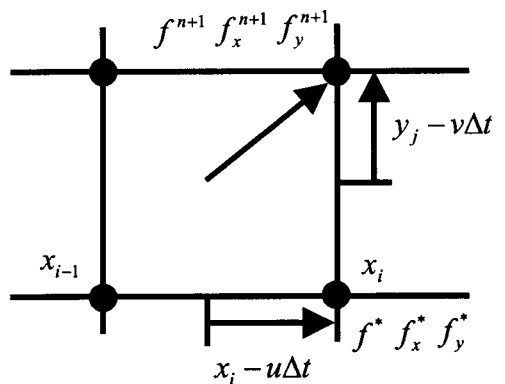


Fig.3 The extension of the CIP method to multi-dimensional cases

2차원의 경우는 보간 함수를 완전한 bi-Cubic Piecewise Polynomial을 사용하거나 일차원 보간 함수를 x방향과 y방향으로 순차적으로 적용하는 directional splitting 방법을 사용할 수 있다.

본 연구에서는 구 좌표계에서 CIP법을 사용하기 위해서 directional splitting법을 사용하였다. 이것은 Fig.3과 같이 먼저 x방향으로 1차원의 경우와 같이 식(7)과 (8)을 사용하여 f^*, f_x^*, f_y^* 를 계산한다. 그리고 이들 값을 이용하여 같은 방법으로 y방향으로 적용하여 최종적으로 $f^{n+1}, f_x^{n+1}, f_y^{n+1}$ 을 계산한다. Fig.4는 2차원에서 backward Semi-Lagrangian법을 사용하는 경우 Eulerian 격자점과 Lagrangian 격자점을 나타낸 것이다. Lagrangian의 격자점은 식(2)를 사용하여 찾을 수 있다.

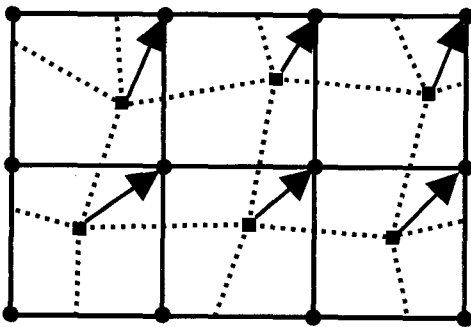


Fig.4 The trajectory of fluid particle between the Eulerian (solid circle) and Lagrangian grid point(solid square)

2.3 구 좌표계에 적용

구 좌표계에서의 이류 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \tag{9}$$

여기서 a 는 구의 반경을 나타내고, λ 와 θ 는 각각 경도와 위도를 의미한다.

식을 간단히 나타내기 위해서 경도와 위도 방향의 속도 성분을 다음과 같이 정의한다.

$$U = \frac{u}{a \cos \theta}, V = \frac{v}{a} \tag{10}$$

식(10)으로 정의된 속도 성분을 사용하면 구면 좌표계에서의 이류 방정식은 다음과 같이 직교좌표계의 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + V \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \tag{11}$$

그리고 위도와 경도 방향으로의 1차 미분에 대한 방정식은 식(11)을 각각 경도와 위도에 대한 1차 미분을 한 후 정리하면 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial t} + U \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial \lambda} + V \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial \theta} &= -U_\lambda \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} - V_\lambda \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \phi_\theta}{\partial t} + U \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \lambda} + V \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} &= -U_\theta \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} - V_\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{aligned} \tag{12}$$

직교 좌표계에서와 같이 식(12)에서 우변항에 나타나는 값은 시각 $t + \Delta t$ 에서 값이나 t 에서의 값으로 계산할 수 있다.

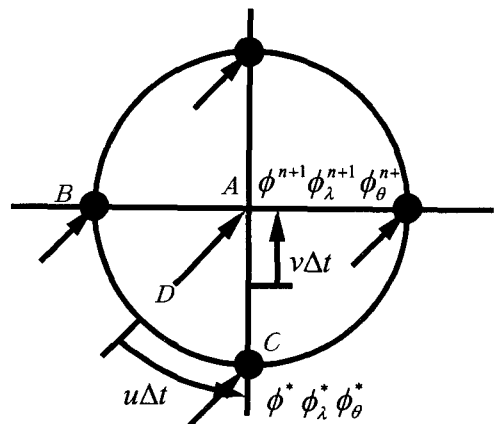


Fig.5 The interpolation procedure over the pole

구 좌표계를 사용하여 이류 방정식(9)를 계산할 경우 극 문제라는 것이 존재한다. 즉 식(9)에서 2번째 항은 극에서 정의가 되지 않으며 극 주위에서 많은 오차를 발생한다. 그래서 고차의 정확도를 가진 수치 방법이 요구된다. 본 계산에서는 Fig.5와 같이 극에서의 속도는 극을 둘러싸고 있는 점에서의 속도를 이용해서 구한다. 이 방법으로 구한 극에서의 속도를 사용해서 출발점 D 를 계산하고 평면에서 계산한 방법과 같이 directional splitting법을 이용해서 극에서의 물리량은 계산한다. 즉 점 B 와 C 에서의 $\phi, \phi_\lambda, \phi_\theta$ 를 이용해서 점 C 에서의 $\phi^*, \phi_\lambda^*, \phi_\theta^*$ 를 계산한다. 같은 방법으로 점 C 와 A 에서의 $\phi^*, \phi_\lambda^*, \phi_\theta^*$ 를 이용하여 최종적으로 극에서 $\phi^{n+1}, \phi_\lambda^{n+1}, \phi_\theta^{n+1}$ 값을 계산할 수 있다.

3. 수치해석 및 결과

이 장에서는 제안된 알고리즘의 타당성과 정확성을 검토하기 위해서 해석해가 알려져 있는 문제에 대해서 제안된 수치방법을 적용하였다. 대상이 되는 문제로서 구 좌표계를 사용하는 Williamson[10]이 제안한 회전하는 cosine bell문제와 Doswell[11]이 제안한 전선 발달문제(frontogenesis)를 선택하였다. 수치해석 결과로 얻어진 수치해와 해석해를 비교하였다. 정량적 비교를 위해서 Williamson[10]이 사용한 다음과 같은 식을 사용하였다.

$$l_1(\phi) = \frac{I[|\phi(\lambda, \theta) - \phi_T(\lambda, \theta)|]}{I[|\phi_T(\lambda, \theta)|]}$$

$$l_2(\phi) = \frac{\{I[(\phi(\lambda, \theta) - \phi_T(\lambda, \theta))^2]\}^{1/2}}{I[\phi_T(\lambda, \theta)^2]} \quad (13)$$

$$l_\infty(\phi) = \frac{\max_{\text{all } \lambda, \theta} |\phi(\lambda, \theta) - \phi_T(\lambda, \theta)|}{\max_{\text{all } \lambda, \theta} |\phi_T(\lambda, \theta)|}$$

여기서 $I(\phi)$ 는 다음과 같이 정의되는 전 구에 대한 면적적분이다.

$$I(\phi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \phi(\lambda, \theta) \cos\theta d\theta d\lambda \quad (14)$$

여기서 ϕ 는 해석해이고 ϕ_T 는 수치해를 나타낸다.

3.1 강제 회전문제

Williamson이 제안한 강제 회전 문제[10]는 구형 좌표계에서 이류문제를 해석하는데 발생하는 여러 문제를 검증하는데 많은 연구자들에 의해서 인용되고 있다. 본 연구에서도 이 문제를 사용하여 제안된 수치방법에 의해서 계산을 수행하였고 그 결과를 해석해나 다른 연구자의 결과와 비교하였다.

초기 조건으로 속도에 관해서는 경도방향, $u(\lambda, \theta)$ 과 위도방향, $v(\lambda, \theta)$ 의 성분은 각각 식(15)로 주어진다.

$$u(\lambda, \theta) = u_0(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\cos\lambda\sin\alpha) \quad (15)$$

$$v(\lambda, \theta) = -u_0\sin\lambda\sin\alpha$$

여기서 α 는 구 좌표계의 두 극을 지나는 축과 실제 구형이 회전하는 축과 이루는 각을 나타낸다.

스칼라 함수 $\phi(\lambda, \theta)$ 에 대한 초기조건으로서 식(16)에 주어진 것 같이 높이가 h_0 인 cosine bell이 위치 (λ_c, θ_c) 에 위치하도록 설정하였다.

$$h(\lambda, \theta) = \begin{cases} h_0/2 [1 + \cos(\pi r/R)] & \text{if } r < R \\ 0 & \text{if } r \geq R \end{cases} \quad (16)$$

여기서

$$r = a \arccos[\sin\theta_c \sin\theta + \cos\theta_c \cos\theta \cos(\lambda - \lambda_c)] \quad \text{이다.}$$

여기서 cosine bell의 중심위치 (λ_c, θ_c) 는 Fig.6과 같이 $(3\pi/2, 0)$ 로 설정하였고, 그 밖의 상수 값은 Williamson이 사용한 것과 동일한 것을 이용하였다.

수치실험으로써 초기에 적도 상에 경도 270° 에 위치한 cosine bell이 적도를 따라서 지구를 1회전하는 것과 자오선을 따라서 남극과 북극을 지나는 두 가지 방향에 대해서 수치실험을 하였다. 이 실험의 목적은 위와 같은 초기에 주어진 함수의 형태가 지구

를 1회전 한 후 그 함수의 형태가 얼마나 잘 유지되는가를 검증하는 것이다.

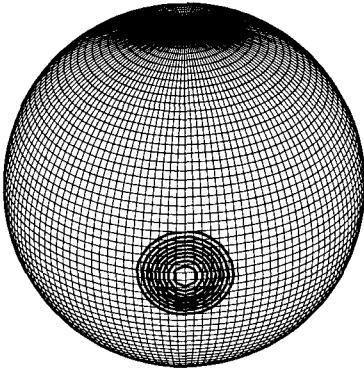


Fig.6 The initial profile for the rotating cosine bell

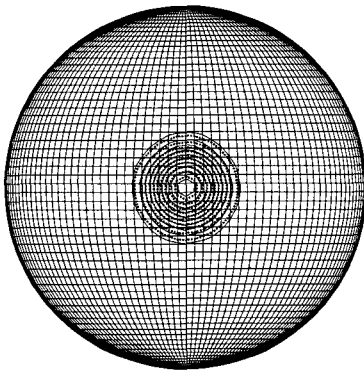


Fig.7 The comparison result for the rotating cosine bell after one revolution (solid : numerical, dotted : analytic)

Fig.7은 격자수가 128x64를 사용하여 cosine bell이 자오선 방향으로 1회전한 후 수치해석 결과와 해석해를 비교한 것이다. 실선은 수치해이고 점선은 해석해를 나타낸 것이다. 수치해와 해석해가 거의 일치하고 있는 것을 알 수 있다. Fig. 8과 9는 각각 cosine bell이 적도와 자오선 방향으로 회전할 때 식 (13)으로 정의 되는 normalized오차를 나타낸 것이

다. Fig.9에서 시각 3일과 9일은 cosine bell이 북극과 남극을 지나는 때에 해당하는 곳이다. 이때 Fig.8의 경우의 오차와 비교했을 때 거의 비슷한 경향을 보이고 있으며 1회전 후 두 경우의 오차는 거의 같은 수준인 것을 알 수 있다. 따라서 수치해석의 오차는 회전 방향에 크게 영향을 받지 않는다는 것을 의미한다. 이것으로부터 본 연구에서 제안한 수치방법이 구 좌표계에서 극 문제를 해결할 수 있다는 것을 알 수 있다.

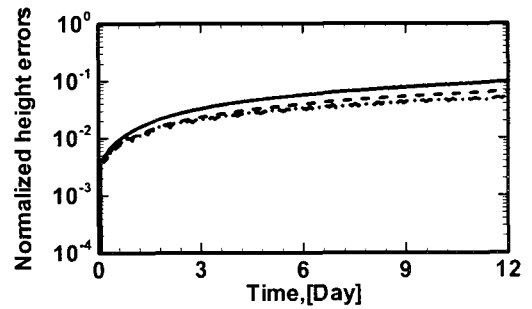


Fig.8 The height errors l_1 (solid), l_2 (dash), and l_∞ (dash dot) versus time during one rotation for $\alpha = 0$

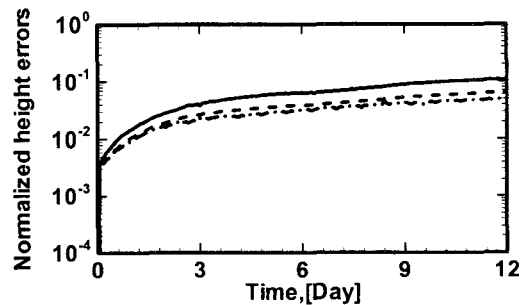


Fig.9 The height errors l_1 (solid), l_2 (dash), and l_∞ (dash dot) versus time during one rotation for $\alpha = \pi/2$

Table1은 Rasch[3]와Nair[12,13]의 수치결과와 본 연구의 결과를 비교한 것이다. 표에서와 같이 본 연구의 오차가 낮은 것을 알 수 있다. 따라서 본 연구의 해석결과가 보다 정확하고 제안된 수치방법이 타당하다는 것을 알 수 있다.

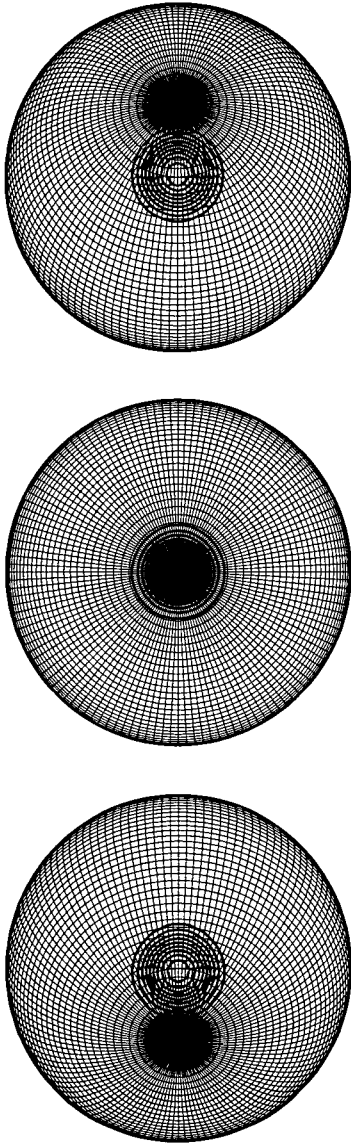


Fig.10 Orthographic projection for the rotating cosine bell over the north pole

Fig.10은 cosine bell이 북극을 지날 때의 모습을 나타낸 것이다. 그림에서와 같이 극에서 singularity의 영향을 받지 않고 cosine bell의 형상이 그대로 유지되고 있는 것을 알 수 있다. 또한 cosine bell이 극을 통과하기전과 후의 형상을 비교할 때 이 극을 통과한 후에도 그대로 유지되고 있는 것을 알 수 있다.

Table1 The standard global errors

	l_1	l_2	l_∞
Rasch[3]	0.289	0.196	0.164
FSL[13]	0.231	0.141	0.113
FSLc[13]	0.132	0.115	0.146
Present	0.108	0.0642	0.050

3.2 전선 발달문제

이 문제는 Doswell[11]이 직교좌표계에서 사용한 전선발달문제를 Nair[12,13]가 구 좌표계에 적용한 것이다. 구형 좌표계에서 와류 속도분포와 스칼라 함수의 초기 분포를 설정하고 시간에 따라서 전선이 변화하는 것을 계산하는 문제이다. 초기의 속도 및 스칼라 함수의 분포는 Nair[12]의 것을 사용하였고 다음과 같다.

$$v_r = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{sech}^2(r') \tanh(r') \tag{17}$$

여기서 $r' = r_0 \cos\theta'$ 이다. 초기 스칼라 함수의 값은 다음과 같다.

$$\phi(\lambda, \theta) = 1 - \tanh\left\{\frac{r'}{\delta} \sin\lambda'\right\} \tag{18}$$

해석해는

$$\phi(\lambda, \theta) = 1 - \tanh\left\{\frac{r'}{\delta} \sin(\lambda' - \omega t)\right\} \tag{19}$$

이다. 여기서

$$\omega = \begin{cases} 0 & \text{if } r' = 0 \\ v_r/r' & \text{if } r' \neq 0 \end{cases} \tag{20}$$

이다.

이 문제는 rotating cosine bell문제와 달리 극 주위에서 복잡한 와류가 형성되어 극에서 스칼라 함수의 변화가 많이 발생하는 것으로 극 문제 검증에 위해서 많이 이용되고 있다.

Fig.11은 북극에서 본 식(18)로 주어진 초기 스칼라 함수의 분포를 나타낸 것이다. 이 상태에서 식

(17)로 주어진 와류가 북극에서 발생하여 식(18)로부터 얻어진 함수의 분포는 시간에 따라서 Fig.11에서 14와 같이 점점 복잡하게 변한다. 계산은 128x64 격자계를 사용하여 $t=3$ 까지 수행하였다. Fig.14에서는 북극 주위에 큰 소용돌이가 형성되어 있고 본 계산에 의해서 잘 묘사되어 있는 것을 볼 수 있다. 해석해인 Fig.15와 비교했을 때 전선의 구조나 형성 장소 등이 잘 일치하고 있는 것을 알 수 있다.

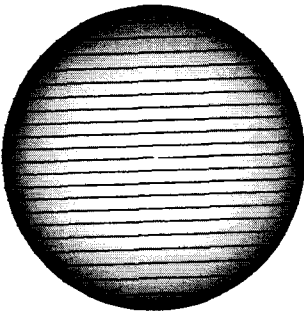


Fig.11 The initial profile for the frontogenesis

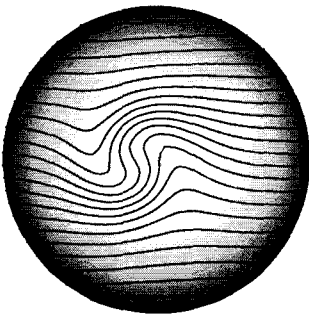


Fig.12 Results of the frontogenesis at $t=1.0$



Fig.13 Results of the frontogenesis at $t=2.0$



Fig.14 Results of the frontogenesis at $t=3.0$



Fig.15 The exact solution for the frontogenesis at $t=3.0$

Fig.16은 해석해와 수치계산결과와의 오차를 시간에 따라서 변화하는 것을 나타낸 것이다. 시간이 경과함에 따라서 전선의 형상이 점점 복잡해 지고 이와 더불어 오차가 조금씩 증가하고 있는 것을 보여 주고 있으며 시각 $t=3$ 에서 오차를 Nair[12,13]의 FSL법이나 CISL법 결과와 비교한 것이 Table 2이다. Nair가 제안한 CISL법은 Colella Woodward[14]가 제안한 PPM과 같은 유한 체적법을 기초로 한 Semi-Lagrangian 법의 일종으로서 이 방법 많은

Semi-Lagrangian법이 사용하고 있는 backward trajectory를 사용하고 있다. 보간함수로서는 2차의 parabolic함수를 사용하여 departure point에서 물리

량을 보간한다. FSL법도 PPM을 기초로 한 Semi-Lagrangian법이지만 forward trajectory 수법을 사용하는 것에 차이가 있다. 그리고 이 방법들은 물리적 형상보다는 보존성을 중시하였고 PPM을 기초로 한 2차원 보간함수를 사용하는 계산수법이기 때문에 본 연구에서 사용된 3차원 Hermite 보간법과는 차이가 있다. 이와 같은 이유로서 두 결과를 비교했을 때, 본 연구의 계산 결과가 보다 더 정확하다는 것을 설명될 수 있으며 정량적으로는 Table 2로부터 알 수 있다.

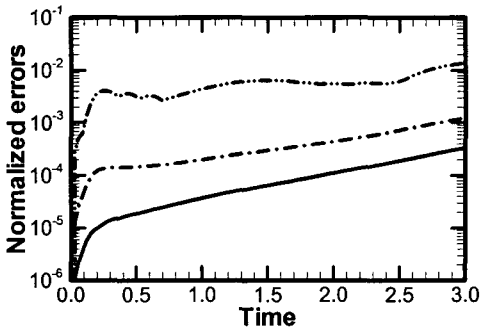


Fig.16 The standard global errors

Table 2 The standard global errors for the frontogenesis

	l_1	l_2	l_∞
FSLC[13]	0.0176	0.0345	0.1684
CISL[12]	0.0011	0.0025	0.0144
Present	0.0003	0.0012	0.0136

4. 결 론

본 연구에서는 구 좌표계에서 이류 방정식을 계산할 때 발생하는 극 문제를 해결하고 보다 정확하게 이류 방정식을 계산하기 위해서 새로운 Semi-Lagrangian법을 제안하였다. 이 수치방법은 Semi-Lagrangian 법으로서 공간적으로 3차의 정확도를 가지는 CIP법을 사용하였고 다차원에 적용하기 위해서 directional splitting법을 사용하였다. 그

리고 이 방법들을 구 좌표계에 확장하였다.

제안된 수치방법의 정확도와 타당성을 검증하기 위해서 rotating cosine bell문제와 전선발달 문제에 제안된 수치방법을 적용하였다. 수치계산의 목적은 구 좌표계에서 발생하는 극 문제의 해결과 계산 전 영역에서의 정확도를 향상시키는 것으로 하였다.

계산결과 구 좌표계를 사용할 때 발생하는 수치 진동이나 수치 확산과 같은 문제는 나타나지 않았고 해석해와 비교하였을 때 비슷한 결과를 얻었다. 그리고 최근의 다른 몇몇 연구결과와 비교했을 때 본 계산의 결과가 보다 정확한 것을 알 수 있었다.

그러므로 본 연구에서 제안된 방법이 구 좌표계에서 이류 방정식을 보다 정확하게 계산할 수 있었고 제안된 방법의 타당성을 검증할 수 있었다.

후 기

이 연구를 수행하는데 있어서 BK21의 지원에 감사 드립니다.

Appendix

본 연구에 사용된 계산 방법을 설명하기 위해서 이류방정식에 적용할 때, 그 계산과정은 다음과 같다. 설명을 간단히 하기 위해서 이류 속도가 일정하고 양의 속도를 가진다고 가정한다.

1) Backward trajectory

식(2)로부터 출발점은 아래와 같이 계산된다.

$$x_d = x_p + u(x, t)\Delta t$$

2) Find Departure point

출발점의 위치를 index상으로 표현하면

$$i_d = x_d / \Delta x \text{ 이다.}$$

3) Interpolation between i_d and $i_d - 1$

$$\xi = x_p - x_d$$

$$F(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3$$

$a_0, a_1, a_2,$ and a_3 는 식(6)으로 계산된다.

4) Time evolution of $f(x)$

식(3)의 관계식을 이용하여 함수 $f(x, t)$ 및 $f_x(x, t)$ 의 시간발전을 계산한다.

$$\begin{aligned} f(x, t + \Delta t) &= f(x_d, t) = F(\xi) \\ f_x(x, t + \Delta t) &= d(x, t + \Delta t)/dx \\ &= F_x(\xi) \end{aligned}$$

참고문헌

- [1] D.L. Williamson and P.J. Rasch, "Two-Dimensional Semi-Lagrangian Transport with Shape-Preserving Interpolation," Monthly Weather Review, 117, pp.102-129, 1989.
- [2] P.K. Smolarkiewicz and P.J. Rasch, "Monotone Advection on the Sphere: An Euler Versus Semi-Lagrangian Approach," Journal of the Atmospheric Sciences, 48, pp.793-810, 1991.
- [3] P. Rasch, "Conservative shape-preserving two-dimensional transport on a spherical reduced grid," Monthly Weather Review, 122, pp.1337-1350, 1994.
- [4] Seong Y. Yoon, Y. Tanaka, F. Xiao, and T. Yabe, "Numerical simulation of shallow water equations using CIP Method with high order spatial resolution," 2001 Workshop on the Solution of Partial Differential Equations on the Sphere, Montreal, Canada, p.19, May 15-18, 2001.
- [5] T. Yabe and T. Aoki, "A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation," Computer Physics Communications, 66, pp.219-232, 1991.
- [6] Seong Y. Yoon and T. Yabe, "The unified simulation for incompressible and compressible flow by the predictor-corrector scheme based on the CIP method," Computer Physics Communications, 119, pp.149-158, 1999.
- [7] T. Yabe and F. Xiao, "The Constrained Interpolation Profile Method for Multiphase Analysis," Journal of Computational Physics, 169, pp.556-593, 2001.
- [8] H. Akima, "A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures," J. Assoc. Comput. Mach., 17, pp.589-602, 1970.
- [9] J. M. Hyman, "Accurate monotonicity preserving cubic interpolations," SIAM J. Sci. Stat. Comput., 5, pp.300-304, 1984.
- [10] D. L. Williamson, J. B. Drake, J. J. Hack, R. Jakob and P. Swarztrauber, "A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry," Journal of computational physics, 102, pp.211-224, 1992.
- [11] C. A. Doswell III, "A kinematic analysis of frontogenesis associated with a nondivergent flow," Journal of the atmospheric sciences, 41, pp.1242-1248, 1984.
- [12] R. D. Nair, B. Machenhauer, "The Mass-Conservative Cell-Integrated Semi-Lagrangian Advection Scheme on the Sphere," Monthly Weather Review, 130, pp.649-667, 2002.
- [13] R. D. Nair, J. S. Scroggs, and F. H. M. Semazzi, "A forward-trajectory global semi-Lagrangian transport scheme," Journal of Computational Physics, 190, pp.275-294, 2003.
- [14] R. D. Nair, J. S. Scroggs, and F. H. M. Semazzi, "A forward-trajectory global semi-Lagrangian transport scheme," Journal of Computational Physics, 54, pp.174-201, 1984.