

전단변형효과를 고려한 현수교의 교량-차량 상호작용 해석

Bridge-Vehicle Interaction Analysis of Suspension Bridges Considering the Effects of the Shear Deformation

김 문 영* 임 명 훈** 권 순 덕*** 김 호 경****
Kim, Moon-Young Lim, Myoung-Hun Kwon, Soon duck Kim, Ho-Kyung

국문요약

이전의 연구(1)에서는 해석적 및 수치적 방법을 사용하여 전단변형 및 회전관성효과를 고려하는 현수교의 수직진동에 대하여 유한요소법을 이용하여 이동하중 해석을 수행하였다. 본 연구에서는 전단변형 및 회전관성 효과가 고려된 Hermitian 다항식을 사용하는 현수교요소를 이용하여 현수교의 수직진동에 대한 고유치 해석을 수행하고 이를 이용한 현수교요소와 차량 및 열차와의 상호작용을 고려한 운동방정식을 유도한다. 이와 같이 모드중첩법을 이용하여 유도된 운동방정식을 수치적분방법으로 Newmark β Method를 사용하여 동적해석을 수행하였다.

주요어 : 이동하중, 현수교, 전단변형, 상호작용, 차량

ABSTRACT

In the previous study(1), the finite element method was used for the vertical vibration analysis of suspension bridge considering the effects of the shear deformation and the rotary inertia under moving load. This study firstly performs the eigenvalue analysis for the free vertical vibration of suspension bridge using FEM analysis. Next the equations of motion considering interaction between suspension bridge and vehicles/train are derived using mode superposition method. And dynamic analysis was performed using the Newmark β Method. Finally through the numerical examples, the dynamic responses of bridges by this study are investigated.

Key words : moving load, suspension bridge, shear deformation, interaction, vehicle

1. 서 론

장경간의 현수교는 다른 교량에 비하여 동적하중에 매우 민감한 형식의 교량이다. 그리고 다른 교량형식에 비하여 강성이 상대적으로 작으므로 동하중에 의한 현수교의 진동특성은 중요한 공학적 문제이다. 따라서 현수교의 정적 및 동적거동을 정확히 파악하기 위해서는 고유진동수와 진동모우드 형상을 결정해야 하며 또한 이동하중에 대하여 차량과의 상호작용에 대한 동적 특성을 고려해야 한다. 현수교 진동해석에서는 Abdel-Ghaffar⁽²⁾가 수직 및 비틀 진동, 횡방향진동에 대한 이론으로 일반화시켰으며, Hayashikawa⁽³⁾는 이동하중을 받는 현수교의 전단변형 및 회전관성효과를 조사하였다. 그리고 김호경⁽⁴⁾은 유한요소법을 이용하여 현수교의 이동하중 해석 기법을 개발하였다. 김문영, 노범준^{(5),(6)}은 해석적 및 수치적 방법을 사용하여 주케이블의 비선형 항을 무시하고 전단변형 및 회전관성효과를 고려하는 현수교의 수직 자유진동이론을 제시하였으며, 차량의 하중을 집중하중으로 환산하여 이동하중 해석을 수행하였다. 권순덕, 서영국^{(7),(8)}은 단선교에 대하여 차량과 교량의 상호작용을 고려한 2차원 및 3

차원 모드중첩법에 의한 동적해석을 하였다. 서정인,김호경⁽⁹⁾은 유한요소법을 이용한 현수교의 정착방식에 따른 교량과 차량의 상호작용을 고려한 3차원 해석을 하였다. 이전 연구에서는 차량의 하중을 집중하중으로 모델화하여 단순한 이동하중해석을 수행하였으며, 근래에는 3차원 해석을 통한 교량의 진동문제에 대하여 차량과 교량간의 상호 작용을 고려한 유한요소모델을 개발하여 그 해석정도를 높여가는 추세이다. 그러나 기존의 알고리즘을 이용해서 해의 수렴성을 높이기 위해서는 장시간의 반복계산을 겪으며, 수치해석상 복잡성을 보인다.

본 연구에서는 Hamilton의 원리를 이용하여 트러스 거더의 회전관성 및 전단변형효과를 고려하는 현수교의 운동방정식과 전단변형을 고려한 3차의 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하여 케이블과 보강형(stiffening girder)에 대한 강도 및 질량행렬을 유도한 현수교요소에 대하여 자유진동해석을 수행하여 이에 대한 수직 진동 형상과 고유진동수를 이용하여 현수교요소와 차량의 상호작용을 고려한 하나의 새로운 운동방정식을 유도하였다. 본 연구의 알고리즘을 가지고 교량과 차량의 연계된 이동하중에 의한 그리고 전단변형 효과에 의한 현수교의 수직진동 특성을 파악하고자 한다. 먼저 본 연구의 타당성과 프로그램 검증을 위하여 이동하중에 대하여 F.E.M 해석결과와 비교, 검증을 한 후 교량과 차량의 상호작용을 고려한 이동하중의 영향 및 전단변형 효과에 대한 현수교의 진동 특성을 보고자 한다.

* 정회원 · 성균관대학교 토목환경공학과 교수 (대표저자 : kmye@skku.ac.kr)

** 성균관대학교 토목환경공학과 석사과정

*** 정회원 · 전북대학교 토목공학과 교수

**** 정회원 · 북포대학교 토목공학과 교수

본 논문에 대한 토의를 2005년 2월 28일까지 학회로 보내 주시기만 그 결과를 게재해 드립니다.
(논문접수일 : 2004. 6. 18 / 심사종료일 : 2004. 12. 8)

2. 현수교의 자유진동 해석

현수교의 해석이론을 전개하기 위하여 다음과 같은 가정을 도입한다.

1. 교량은 선형탄성체로 가정한다.
2. 초기 사하중은 케이블이 지지하고 사하중에 의하여 보강형에는 응력이 발생하지 않는다.
3. 케이블은 전 구간을 통하여 단면이 일정하고 사하중 하에서 포물선 형상을 이룬다.
4. 진동하는 동안 행거는 늘어나지 않는다고 가정하므로, 케이블과 보강형의 수직변위는 같다.
5. 진동에 의해 발생하는 케이블 장력의 추가 수평성분 $H(t)$ 는 초기장력 H_w 에 비하여 작다.

본 장에서는 교량의 수직 진동형상과 고유진동수를 구하기 위하여 현수교의 자유진동 해석을 수행한다. 차량의 질량은 고려하지 않았으며, 전단변형 및 회전관성 효과를 고려한 현수교의 에너지와 그에 대한 질량 및 강성행렬에 대한 결과 식을 나타내었다. 자세한 유도과정 및 내용은 김문영, 노범준(1997) 문헌을 참조 할 수 있다.

그림 1은 단순 지지된 3경간 현수교의 형상 및 좌표계를 나타낸다. 가정 3에 따라 주케이블은 각 경간마다 포물선의 형상을 이루며 포물선 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y_i(x_i) = \frac{m_i g l_i}{2H_w} \left[\frac{x_i}{l_i} - \left(\frac{x_i}{l_i} \right)^2 \right] \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

여기서 m_i 는 케이블과 보강형의 사하중을 고려한 단위길이당 질량이고 H_w 는 케이블 장력의 초기 수평성분이다. g 는 중력가속도 그리고 l_i 은 각 경간의 길이를 나타낸다.

운동방정식을 유도하기 위하여 아래와 같이 Hamilton의 원리를 적용한다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad (2)$$

여기서 T 와 V 는 각각 현수교에 작용하는 운동에너지와 포텐셜에너지를 나타낸다. 회전관성과 전단변형 효과를 고려하는 경우, 외력 $P_i(x_i, t)$ 를 받는 현수교의 운동에너지와 포텐셜에너지는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} (m_i \dot{v}_i^2 dx_i + \rho_{gi} I_{gi} \dot{\beta}_i^2) dx_i \quad (3a)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \left[E_{gi} I_{gi} \beta_i'^2 + \frac{G_i A_{gi}}{f_{si}} (v_i' - \beta_i)^2 + H_w v_i'^2 \right] dx_i + \frac{1}{2} \frac{H^2(t) L_E}{E_c A_c} \quad (3b)$$

$$\text{여기서, } L_E = \sum_{i=1}^3 L_{ei} = \sum_{i=1}^3 l_i \left[1 + 8 \left(\frac{f_i}{l_i} \right)^2 \right] \quad (3c)$$

식(3)에서 v_i 와 β_i 는 각각 수직 및 회전변위를 나타내고, ρ , A 와 I 는 각각 밀도, 단면적 그리고 단면 2차 모멘트, E , G 와 f_s 는 탄성 및 전단 탄성계수와 전단 계수(shear coefficient)를 표시한다. 이때, 아래첨자 g 와 c 는 각각 보강형과 주케이블에 대한 값을 나타낸다. 위첨자 (\cdot)와 ($'$)는 각각 시간 t 및 거리 x 에 대한 편미분을 나타낸다. $H(t)$ 는 케이블 장력의 추가적인 수평성분을 나타내고, 아래의 식으로 표시할 수 있다.

$$H(t) = \frac{E_c A_c}{L_E} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{m_i g}{H_w} \int_0^{l_i} v_i dx_i + \frac{1}{2} \int_0^{l_i} v_i^2 dx_i \right) \quad (4)$$

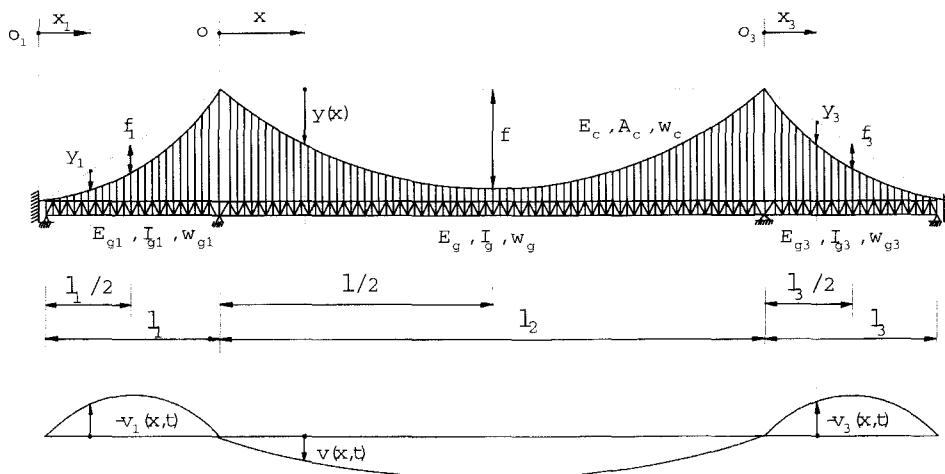


그림 1 3경간 연속 현수교의 형상 및 좌표계

식 (3a), (3b)를 식(2)에 대입하여 Hamilton원리를 적용하고 전단변형효과를 고려하는 3차 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하여 현수교를 유한요소로 분할하고 에너지 식을 이용하여 요소길이에 대하여 적분을 행하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$T = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} V_e^T M^e V_e \quad (5a)$$

$$V = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} V_e^T (K_{cg}^e + H_w K_{cg}^e) V_e + \frac{1}{2} \frac{H^2(t) L_E}{E_c A_c} \quad (5b)$$

전단변형을 고려한 현수교 요소의 질량과 강성행렬은 다음과 같다. M^e 는 요소의 질량행렬, 그리고 K_{cg}^e 와 K_{cg}^e 는 각각 보강형의 탄성강도행렬, 케이블장력에 의한 요소의 강도행렬을 나타내며, V_e^T 는 수직 처짐과 회전각의 재단변위벡터이다.

$$M^e = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ & C_5 & -C_4 & C_6 \\ \text{symm.} & & C_1 & -C_2 \\ & & & C_5 \end{pmatrix} \quad (6)$$

여기서,

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{ml}{T^2} \left(\frac{156}{420} + 8.4S + 48S^2 \right) + \frac{1.2\rho_g I_g}{T^2 l} , \\ c_2 &= \frac{ml}{T^2} \left(\frac{22}{420} + 1.1S + 6S^2 \right) + \frac{\rho_g I_g}{T^2} (0.1 - 6S) \\ c_3 &= \frac{ml}{T^2} \left(\frac{54}{420} + 3.6S + 24S^2 \right) - \frac{1.2\rho_g I_g}{T^2 l} \\ c_4 &= -\frac{ml}{T^2} \left(\frac{13}{420} + 0.9S + 6S^2 \right) + \frac{\rho_g I_g}{T^2} (0.1 - 6S) \\ c_5 &= \frac{ml}{T^2} \left(\frac{4}{420} + 0.2S + 1.2S^2 \right) + \frac{\rho_g I_g l}{T^2} \left(\frac{56}{420} + 2S + 48S^2 \right) \\ c_6 &= -\frac{ml}{T^2} \left(\frac{3}{420} + 0.2S + 1.2S^2 \right) - \frac{\rho_g I_g l}{T^2} \left(\frac{14}{420} + 2S + 24S^2 \right) \\ S &= f_s E_g I_g / (G_y A_g l^2) , T = 12S + 1 \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)에서 m 은 주케이블과 보강형의 단위길이당 질량을 합한 값이고, ρ_g, I_g 는 각각 보강형의 밀도와 단면 2차 모멘트를 나타낸다.

$$K_{cg}^e = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_1 & a_2 \\ & a_3 & -a_2 & a_4 \\ \text{symm.} & & a_1 & -a_2 \\ & & & a_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } a_1 &= (1.2 + 24S + 144S^2) / (T^2 l) \\ a_2 &= 0.1 L / (T^2 l) \\ a_3 &= \left(\frac{1}{7.5} + 2S + 12S^2 \right) l^2 / (T^2 l) \end{aligned}$$

$$a_4 = - \left(\frac{1}{30} + 2S + 12S^2 \right) l^2 / (T^2 l) \quad (9)$$

$$K_{cy}^e = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_1 & b_2 \\ & b_3 & -b_2 & b_4 \\ \text{symm.} & & b_1 & -b_2 \\ & & & b_3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } b_1 &= \frac{12 E_g I_g}{T l^3} , b_2 = \frac{6 E_g I_g}{T l^2} \\ b_3 &= \frac{4(1+3S) E_g I_g}{T l} , b_4 = \frac{2(1-6S) E_g I_g}{T l} \end{aligned} \quad (11)$$

한편, 수평장력증분 $H(t)$ 는 형상함수를 이용하여 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$H(t) = \frac{E_c A_c}{L_E} \sum_c^n \left(\frac{m g}{H_w} f_e^T V_e \right) \quad (12)$$

여기서, f_e 는 형상함수 h_i 를 적분한 요소벡터를 나타내며 결과 식은 아래와 같다.

$$f_e^T = \frac{1}{T} \left[l \left(\frac{1}{2} + 6S \right) , l^2 \left(\frac{1}{12} + S \right) , l \left(\frac{1}{2} + 6S \right) , -l^2 \left(\frac{1}{12} + S \right) \right] \quad (13)$$

식 (12)을 이용하면 식 (5b)은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\frac{1}{2} \frac{H^2(t) L_E}{E_c A_c} = \frac{1}{2} U^T K_{CE} U \quad (14a)$$

$$K_{CE} = \frac{E_c A_c}{L_E} \left[\left(\sum_e \frac{m g}{H_w} f_e \right) \left(\sum_c \frac{m g}{H_w} f_e \right)^T \right] \quad (14b)$$

식(14)에서 K_{CE} 는 현수교 전체의 케이블 탄성강도행렬이다. K_{CE} 는 banded가 아닌 full matrix 형태가 된다. 이는 주케이블의 특정 절점의 연직변위가 장력증분을 통하여 교량전체의 강성에 직접적으로 영향을 준다는 것을 의미한다. 식(5)에 Hamilton의 원리를 적용하면, 현수교 교량전체의 운동방정식을 다음과 같이 얻는다.

$$M_b \ddot{U} + K_b U = 0 \quad (15)$$

여기서, $K_b = K_{BG} + K_{CG} + K_{CE}$

식(5)에서 $M_b, K_{BG}, K_{CG}, K_{CE}$ 는 각각 전체구조물에 대하여 정의된 질량행렬, 보강형의 탄성강도 및 케이블의 처짐에 따른 강도행렬 그리고 케이블의 탄성강도행렬을 나타낸다.

모드중첩법을 이용하여 운동방정식을 풀기 위하여 다자유도계의 연성운동방정식의 집합을 비연성운동방정식의 집합으로 바꾸는 정규좌표계 변환을 이용한다. 이 방법은

변위가 n 개의 개별적인 좌표집합으로 표현되고 감쇠가 모드 감쇠비 ξ 로 나타내지는 선형구조물의 동적응답을 구하는데 사용한다. 교량의 수직변위 v 는 모드진폭 q_i 에 모드형상벡터 ϕ_i 를 곱함으로써 구할 수 있다. 현수교의 동적응답을 구하기 위해서는 비감쇠 자유진동 해석으로부터 구한 모드형상행렬(Mode Shape Matrix)를 이용하여 선형좌표변환을 하여야 한다. 따라서 모드형상의 직교성을 적용하여 비례감쇠를 사용하면 식(15)는 식(16)과 같이 선형화된다.

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0 \quad (16)$$

여기서, $\omega_i, q_i, \phi_i ; i = 1, 2, \dots, n$

3. 차량 모델 및 에너지

본 연구는 현수교와 차량의 상호작용 고려한 운동방정식의 유도가 주된 목적이기에 그림 2와 같은 단순화 된 2차원 차량 모형을 사용하였다. 차체와 윤축은 모두 강체로 가정하였으며, 차량의 질량을 차체에 집중화 시켰다. 각 질량에 대하여 1개의 수직자유도를 갖는다. 그림 2에 대한 기호는 다음과 같다.

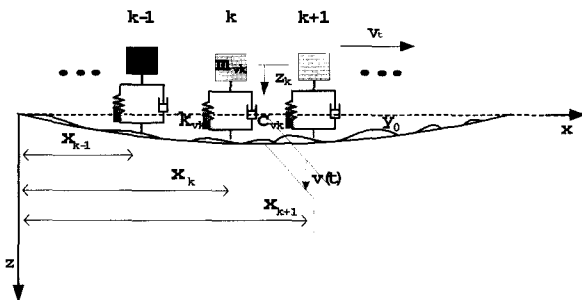


그림 2 차량의 모형

- m_{ck}, z_k : k 번째 차량의 차체의 수직변위와 질량
- k_{wk}, c_{wk} : k 번째 차량의 현가장치의 강성과 감쇠계수
- x_k : k 번째 차량의 요소에서의 윤축의 위치
- y_0 : 교량의 노면 조도
- $v(t)$: 시간에 따른 교량의 수직 변위
- v_x : 차량의 수평 속도

교량의 에너지는 차량과 비연계적이지만, 차량의 에너지는 교량의 수직변위와 연계성을 갖는다. 따라서 교량의 자유진동해석에 따른 교량의 모드형상과 차량의 에너지로부터 라그랑지안 식을 이용하여 교량과 차량의 상호 관련된 교량의 운동방정식을 유도할 수 있다.

교량의 변위를 $v(x,t)$ 라 할 때, 변위는 모드형상 $\phi(x)$ 과 일반화 좌표계의 변위 $q(t)$ 의 곱으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (17)$$

차량에 작용하는 힘은 교량의 변위와 밀접한 관련이 있으므로 교량의 변위를 식(17)을 사용하여 표현할 수 있다. 그런데 차량이 속도를 가지므로 차량의 위치에 대한 함수가 되어 모드형상은 공간만이 아닌 시간의 함수도 된다. 따라서 식(17)은 다음과 같이 나타내어진다.

$$v(x(t),t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x(t)) q_i(t) \quad (18a)$$

따라서 식 (18a)의 시간에 대한 미분 항은 다음과 같다.

$$\dot{v}(x(t),t) = \sum_{i=1}^n \phi_i'(x) v_i q_i(t) + \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \dot{q}_i(t) \quad (18b)$$

$$\ddot{v}(x(t),t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) + 2 \sum_{i=1}^n \phi_i'(x) v_i \dot{q}_i(t) + \sum_{i=1}^n \phi_i''(x) v_i^2 q_i(t) \quad (18c)$$

차량의 차축이 x_k 지점에 있을 때, 차축에 작용하는 변위량은 차량의 변위와 그 지점의 교량의 변위 및 노면 조도로 표현할 수 있다.

$$\text{상대변위} = z_k - v(x_k) + y_0(x_k) \quad (19)$$

k 번째 차량의 무게, 현가장치의 강성과 감쇠계수를 각각 m_{ck}, k_{wk}, c_{wk} 일 때 m 개의 차량으로 구성된 운동에너지(T_v), 위치에너지(V_v), 분산에너지(D_v)는 다음과 같다. 여기서, g 는 중력가속도를 나타낸다.

$$T_v = \sum_{k=1}^m \left[\frac{1}{2} m_{ck} \dot{z}_k^2 + \frac{1}{2} m_{wk} v^2 \right] \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} V_v &= \sum_{k=1}^m \left[\frac{1}{2} k_{wk} \left(z_k - v(x_k, t) + \frac{m_{wk} g}{k_{wk}} + y_0(x_k) \right)^2 - m_{wk} g z_k \right] \\ &= \sum_{k=1}^m \left[\frac{1}{2} k_{wk} \left(z_k - \sum_{i=1}^n \phi_i(x_k) q_i(t) + \frac{m_{wk} g}{k_{wk}} + y_0(x_k) \right)^2 - m_{wk} g z_k \right] \end{aligned} \quad (20b)$$

$$\begin{aligned} D_v &= \sum_{k=1}^m \left[\frac{1}{2} c_{wk} \left(\dot{z}_k - \dot{v}(x_k, t) + \dot{y}_0(x_k) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{k=1}^m \left[\frac{1}{2} c_{wk} \left\{ \dot{z}_k - \left(\sum_{i=1}^n \phi_i'(x_k) v_i \dot{q}_i(t) + \sum_{i=1}^n \phi_i(x_k) \dot{q}_i(t) \right) + \dot{y}_0(x_k) \right\}^2 \right] \end{aligned} \quad (20c)$$

4. 현수교와 차량의 상호작용을 고려한 운동방정식

본 장에서는 k 번째 차량의 에너지만을 이용하여 운동방정식을 유도하였으며, 연륜 차량의 운동방정식을 구하기 위해서는 각각 차량의 모든 좌표를 라그랑지안 식에 적용한 후 본 절차에 따라 유도하여 구성된 모든 운동방

정식을 더해주면 된다. 교량의 에너지와 차량의 에너지로부터 교량과 차량의 운동방정식을 유도하기 위하여 다음과 같은 Lagrange 식을 이용할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_k} \right) + \frac{\partial L}{\partial p_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{p}_k} = Q_k \quad (21)$$

여기서, $L = T - V$

식(21)을 각 에너지 식에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial p_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{p}_k} \right) + \frac{\partial V}{\partial p_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{p}_k} = Q_k \quad (22)$$

식(22)식에서 T와 V와 그리고 D는 각각 운동에너지, 위치에너지 그리고 분산에너지를 나타내며, 여기서 p_k 는 일반화 된 좌표로써 교량의 변위와 차량의 변위인 q_i 와 z_k 를 적용한다.

먼저, 교량의 에너지에 대하여 일반좌표 q_i 를 적용하면 교량의 운동방정식은 2장에서 구한 선형화 된 교량의 자유진동 운동방정식인 식(16)과 같다. 차량과 교량의 상호작용을 고려한 교량의 운동방정식을 구하기 위하여 k 번째 차량의 에너지 식을 식(22)에서 $p_k = q_i$ 인 경우에 대하여 Lagrange의 식을 적용하면 차량과 교량의 상호 관련된 교량의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial T_v}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial V_c}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (23a)$$

$$\frac{\partial V_v}{\partial q_i} = \left[k_{rk} \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i^2(x_k) q_i(t) \right) \right] - k_{rk} z_k \Phi_i(x_k) - m_{rk} g \Phi_i(x_k) \quad (23b)$$

$$\frac{\partial D_v}{\partial \dot{q}_i} = c_{rk} \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i^2(x_k) \dot{q}_i(t) \right) + c_{rk} v \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i'(x_k) q_i(t) \Phi_i(x_k) \right) - c_{rk} \dot{z}_k \Phi_i(x_k) \quad (23c)$$

식(16)과 (23)을 모두 더하면 교량과 차량의 에너지에 의한 최종 교량의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i + c_{rk} \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i^2(x_k) \dot{q}_i(t) \right) \\ + c_{rk} v \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i'(x_k) q_i(t) \Phi_i(x_k) \right) + k_{rk} \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i^2(x_k) q_i(t) \right) \\ - c_{rk} \sum_{i=1}^n \Phi_i(x_k) \dot{z}_k - k_{rk} \sum_{i=1}^n \Phi_i(x_k) z_k = \sum_{i=1}^n m_{rk} g \Phi_i(x_k) \end{aligned} \quad (24)$$

차량의 운동방정식을 구하기 위하여 차량과 교량의 에너지를 식 (22)에서 $p_k = z_k$ 인 경우에 대하여 Lagrange의 식을 적용하면 차량에 대한 운동방정식을 구할 수 있

다. 먼저 차량의 에너지를 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_r}{\partial \dot{z}_k} \right) = m_{rk} \ddot{z}_k \quad (25a)$$

$$\frac{\partial T_r}{\partial z_k} = \frac{\partial V_r}{\partial z_k} = 0 \quad (25b)$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial z_k} = k_{rk} z_k(t) - k_{rk} \sum_{i=1}^n (\Phi_i(x_k) q_i(t)) + k_{rk} y_0(x_k) \quad (25c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_k}{\partial \dot{z}_k} = c_{rk} \dot{z}_k(t) - c_{rk} v_t \sum_{i=1}^n (\Phi_i'(x_k) q_i(t)) - \\ c_{rk} \sum_{i=1}^n (\Phi_i(x_k) \dot{q}_i(t)) + c_{rk} v_t y_0'(x_k) \end{aligned} \quad (25d)$$

교량의 에너지는 차량의 좌표와 비연계성을 가지기 때문에 교량의 에너지를 대입하면 식(26)과 같다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_b}{\partial \dot{z}_k} \right) = \frac{\partial T_b}{\partial z_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V_b}{\partial z_k} \right) = \frac{\partial V_b}{\partial z_k} = 0 \quad (26)$$

식(25)와 (26)을 모두 더하면 교량과 차량의 에너지에 의한 차량의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m_{rk} \ddot{z}_k + c_{rk} \dot{z}_k + k_{rk} z_k - c_{rk} \sum_{i=1}^n (\Phi_i(x_k) \dot{q}_i(t)) \\ - c_{rk} v_t \sum_{i=1}^n (\Phi_i'(x_k) q_i(t)) - k_{rk} \sum_{i=1}^n (\Phi_i(x_k) q_i(t)) \\ + c_{rk} v_t y_0'(x_k) + k_{rk} y_0(x_k) = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

실제적으로는 물리적으로 이해하기 쉬운 값은 절대변위가 아닌 상대변위이므로 절대 좌표관계에서 유도 된 식 (24) 와 (27)의 운동방정식을 좌표변환을 통해 바꿔줄 필요가 있다. 절대변위와 상대변위의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} z_k = s_k + v(x_k, t) - y_0(x_k) = s_k \\ + \sum_{i=1}^n \Phi_i(x_k) q_i(t) - y_0(x_k) \end{aligned} \quad (28a)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_k = \dot{s}_k + v_t \sum_{i=1}^n \Phi_i'(x_k) q_i(t) + \\ \sum_{i=1}^n \Phi_i(x_k) \dot{q}_i(t) - v_t y_0'(x_k) \end{aligned} \quad (28b)$$

$$\begin{aligned} \ddot{z}_k = \ddot{s}_k + v_t^2 \sum_{i=1}^n \Phi_i''(x_k) q_i(t) + 2v_t \sum_{i=1}^n \Phi_i'(x_k) \dot{q}_i(t) \\ + \sum_{i=1}^n \Phi_i(x_k) \ddot{q}_i(t) - v_t^2 y_0''(x_k) \end{aligned} \quad (28c)$$

식(24) 와 (27)에 식(28)을 대입하여 정리하면 교량과 차량의 상대변위에 대한 운동방정식을 구할 수 있다. 상대변위에 대한 교량과 차량의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{q}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k - c_{rk} \sum_{i=1}^n \Phi_i(x_k) \dot{s}_k - k_{rk} \sum_{i=1}^n \Phi_i(x_k) s_k = \sum_{i=1}^n m_{rk} g \Phi_i(x_k) \quad (29)$$

$$m_{rk} \ddot{s}_k + c_{rk} \dot{s}_k + k_{rk} s_k + m_{rk} \sum_{i=1}^n (\Phi_i(x_k) \ddot{q}_i(t)) + 2m_{rk} v_i \sum_{i=1}^n (\Phi_i'(x_k) \dot{q}_i(t)) + m_{rk} v_i^2 \sum_{i=1}^n (\Phi_i''(x_k) q_i(t)) = m_{rk} v_i^2 y_0''(x_k) \quad (30)$$

식(29)과 (30)을 행렬형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_b & \mathbf{M}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_b \\ \ddot{\mathbf{U}}_v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_b & \mathbf{C}_v \\ \mathbf{C}_b & \mathbf{C}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_b \\ \dot{\mathbf{U}}_v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_b & \mathbf{K}_m \\ \mathbf{K}_b & \mathbf{K}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_b \\ \mathbf{U}_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_b \\ \mathbf{F}_v \end{Bmatrix} \quad (31)$$

여기서,

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_b \\ \mathbf{U}_v \end{Bmatrix} = \{q_1 \cdots q_n, s_1 \cdots s_m\}^T$$

질량, 감쇠, 강성 행렬의 기호는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_b &= \delta_{ij} \mathbf{M}_{ib} = m_{rk} \phi_j(x_k), \quad \mathbf{M}_v = m_{rk} \\ \mathbf{C}_b &= 2\xi_k \omega_k \delta_{ij} \mathbf{C}_{ib} = -c_{rk} \phi_i(x_k), \quad \mathbf{C}_{iv} = 2v_i m_{rk} \phi_j'(x_k) \\ \mathbf{C}_v &= c_{rk}, \quad \mathbf{K}_b = \omega_k^2 \delta_{ij} \mathbf{K}_{ib} = -k_{rk} \phi_i(x_k) \\ \mathbf{K}_{ib} &= v_i^2 m_{rk} \phi_j''(x_k), \quad \mathbf{K}_v = k_{rk} \\ \mathbf{F}_b &= \sum_{k=1}^m m_{rk} g \phi_i(x_k), \quad \mathbf{F}_v = m_{rk} v^2 y_0''(x_k) \end{aligned}$$

여기서,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m$$

5. 수치예제

본 예제에서는 전단변형 및 회전관성을 고려한 3경간

연속 현수교의 차량 및 열차하중에 의한 동적해석을 수행한다. 먼저 프로그램의 검증을 위하여 기존 FEM해석에서 이동하중에 대하여 각각 비교검증 한 후 본 차량과 열차 시스템에 대하여 차량과 교량의 상호작용을 고려한 이동하중 해석을 수행한다. 본 예제는 교량의 형식을 감안하여 교량의 감쇠비는 0.5%를 사용하였으며, 예제에서는 노면조도는 고려하지 않았다.

해석에 사용된 교량은 김문영⁽¹⁾의 논문을 참조하여 교량을 선택하였고 제원은 표 4에 나타내었다. 그림 1과 같은 3경간 연속 현수교로써 중앙 경간(l_2)의 길이가 457.24 m, 측 경간($l_1 = l_3$)의 길이는 154.38 m인 비교적 짧은 경간의 현수교이다. 현수교의 고유진동수와 모드형상은 표 5, 그림 5.15와 같다.

표 4 3경간 트러스 현수교 제원

단면 제원		측 경간	중앙경간
케이블	주 케이블 단면적 (m ²)	0.250	0.250
	주 케이블 사하중 (kN/m)	24.525	23.544
	행어 단면적 (m ²)	0.006	0.006
	케이블의 탄성계수(kN/m ²)	1.96 E08	1.96 E08
	행어의 탄성계수 (kN/m ²)	1.37 E08	1.37 E08
보강형	단면적 (m ²)	0.100	0.120
	전단계수	3.807	4.634
	단면 2차모멘트 (m ⁴)	2.025	2.430
	사하중 (kN/m)	73.575	76.518
	보의 탄성계수 (kN/m ²)	2.06 E08	2.06 E08
주탑	구분	상부	하부
	단면적 (m ²)	0.750	0.900
	단면 2차모멘트 (m ⁴)	2.100	3.700
	주탑의 탄성계수 (kN/m ²)	2.06 E08	2.06 E08

표 5 3경간 트러스 현수교의 고유진동수 및 모드별 질량참여계수

모드	고유진동수 (rad/sec)		모드별 질량참여계수(%)		모드	고유진동수 (rad/sec)		모드별 질량참여계수(%)	
	전단무시	전단고려				전단무시	전단고려		
1	2.89160	2.84770	22.58	25.59	11	29.69992	25.91038	1.41	1.26
2	3.80840	3.71940	20.52	22.12	12	37.30961	32.13137	1.30	1.19
3	5.36900	5.23940	18.12	8.82	13	44.63053	37.84457	1.06	1.16
4	6.30630	6.07410	7.05	8.79	14	47.87820	39.13314	0.96	0.85
5	9.17640	8.95020	5.90	8.75	15	50.89795	40.84382	0.88	0.80
6	10.46800	9.85480	3.49	4.04	16	58.94061	47.47887	0.84	0.79
7	15.26300	14.21900	2.60	3.88	17	69.61807	55.47504	0.61	0.47
8	19.94100	18.34000	2.60	3.34	18	79.40855	61.54658	0.61	0.47
9	22.17700	19.84700	2.03	2.27	19	83.55881	62.24645	0.60	0.45
10	24.15200	21.15800	1.77	1.49	20	87.72798	65.11499	0.46	0.45

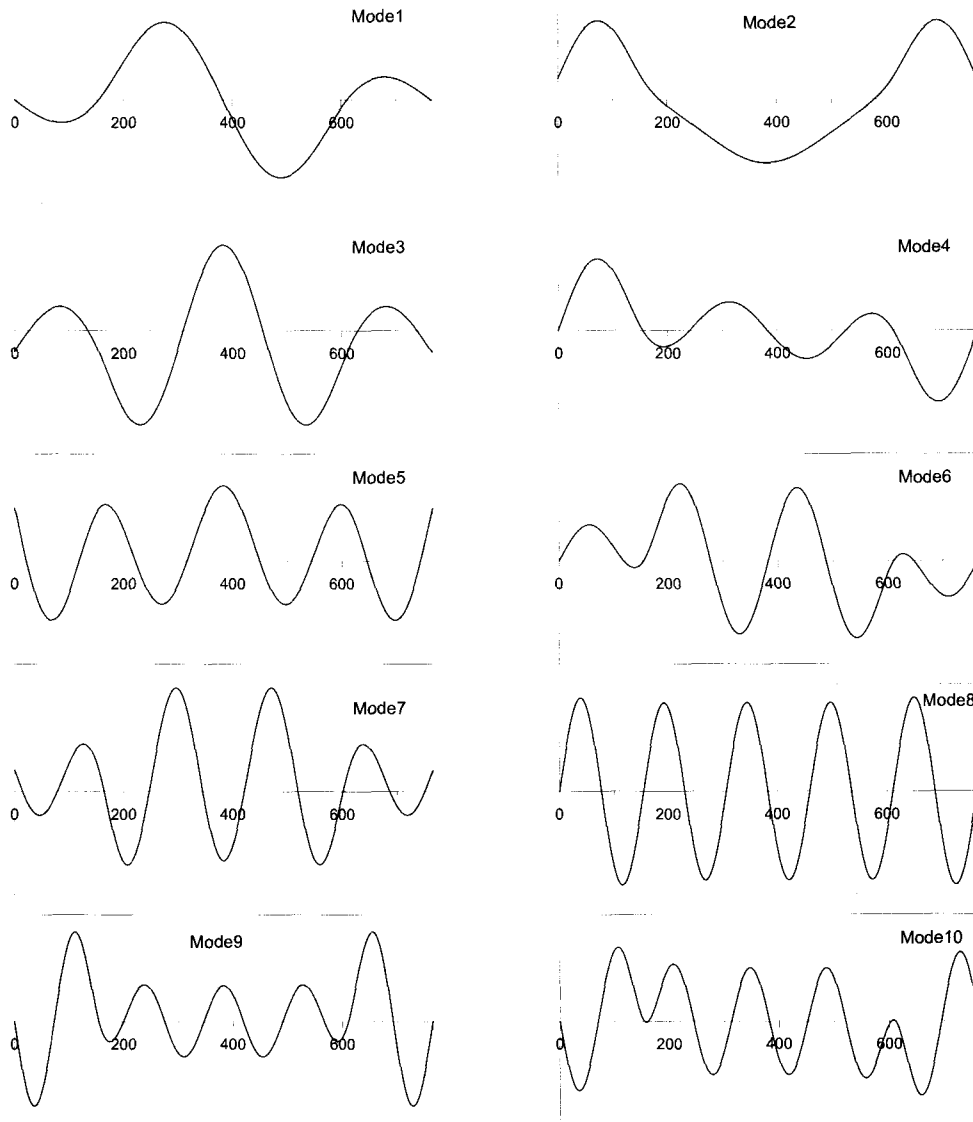


그림 3 교량의 수직모드 형상

5.1 차량 하중에 의한 동적응답

차량 모델은 권순덕⁽⁷⁾의 논문을 참조하였으며 제원은 표6과 같다. 본 예제에서는 차량하중 대하여 100km/h의 속력으로 동적해석을 수행하였다.

표 6 차량의 제원

특성	기호	제원
질량	m_v	223.67 kN
스프링상수	k_v	7387.2 kN/m
감쇠계수	c_v	164.2 kN-s/m

그림 4와 5는 본 수치예제 해석에 고려한 모드 수에 따른 차량하중에 대한 중앙경간 처짐을 도시하였다. 그림과 같이 모드 수 15개 이상에서 최대변위의 값이 일정하였으며, 본 해석에서는 20개의 모드를 사용하였다. 그림

6과 7은 차량하중에 대한 중앙경간과 1경간의 중앙 처짐을 전단변형을 고려하지 않은 이동하중에 대하여 도시하였다. 그림에서 보여지는바와 같이 차량하중에 대한 본 프로그램의 해석결과는 선행 연구해석과 비교하여 잘 일치하였다. 그림 8과 10은 이동하중과 차량의 모델인 sprung mass의 응답을 나타내며, 그림 9는 본 차량시스템에 대하여 전단변형효과를 비교하였다. 전단변형을 고려하였을 경우 최대 처짐에 대하여 1경간에서는 3.45%, 중앙경간에서는 2.53%의 증가를 보였다. 그림 11와 12은 시간에 대한 차량의 수직변위응답과 가속도응답을 나타내었으며 차량의 변위응답 또한 전단변형을 고려하였을 경우 다소 변위 증가를 보였다. 본 시스템 경우 차량의 가속도응답에 의해 차량의 승차감에 대한 판단을 할 수 있는 지표를 얻을 수 있다. 그림 13~15는 차량의 주행속도에 따른 중앙경간의 중앙 처짐 응답을 나타내었으며, 그림 16은 속도의 변화에 따른 중앙경간의 중앙 처짐에 대한 전단변형 고려 유무에 따른 동적증폭계수를 나타내며 전단변형을 고려한 경우 동적증폭계수가 더 커짐을 보여준다.

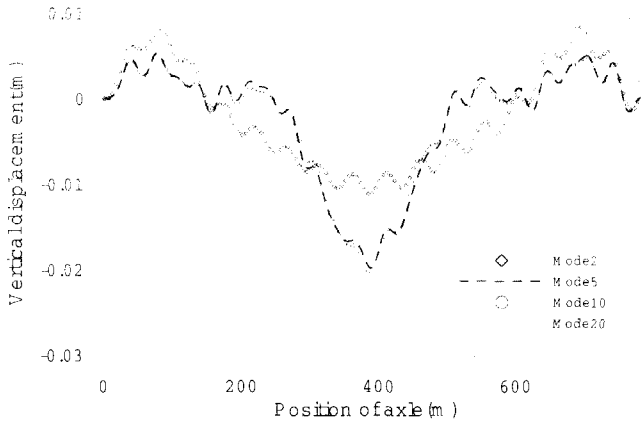


그림 4 모드 수에 따른 중앙경간 중앙 수직변위응답

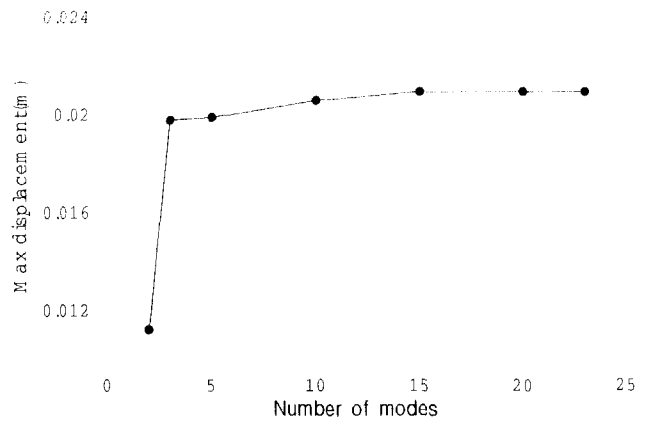


그림 5 모드수에 따른 최대 수직변위

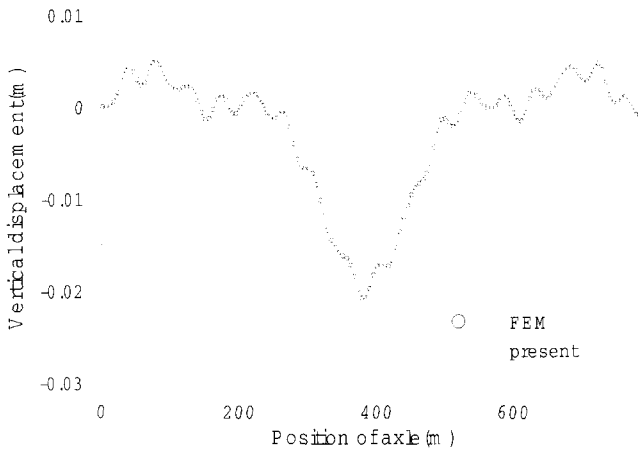


그림 6 중앙경간 중앙 수직변위응답(이동하중, 전단무시)

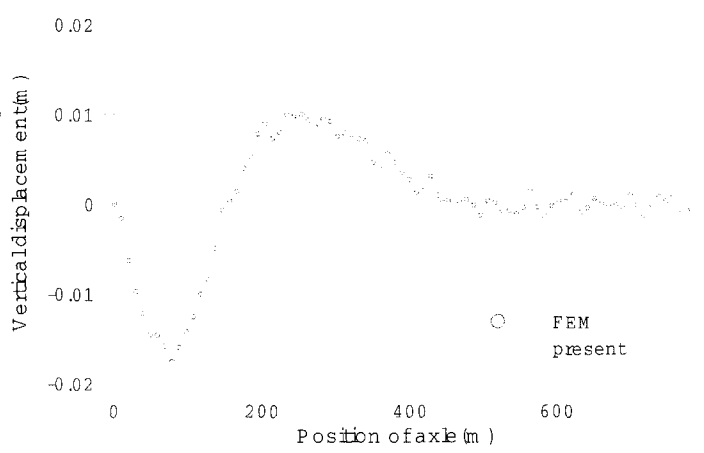


그림 7 1경간 중앙 수직변위응답(이동하중, 전단무시)

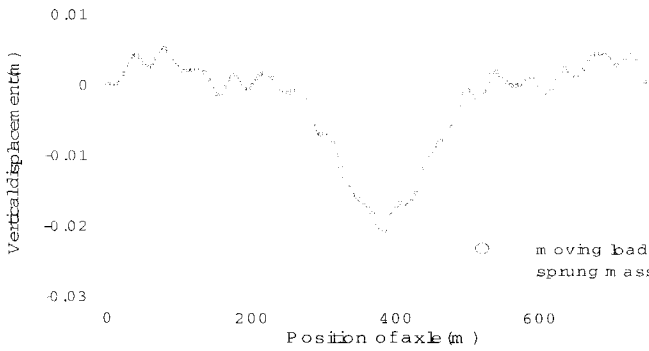


그림 8 중앙경간 중앙 수직변위응답(전단무시)

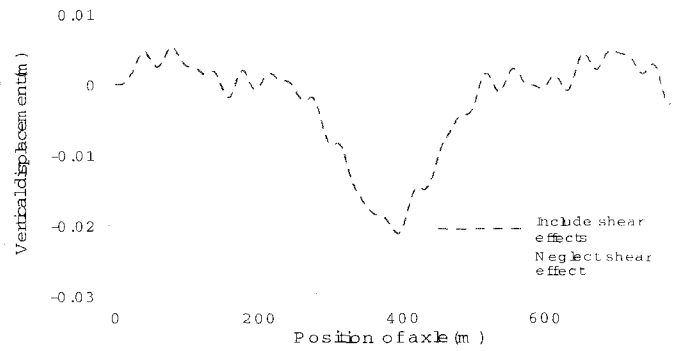


그림 9 중앙경간 중앙 수직변위응답(sprung mass)

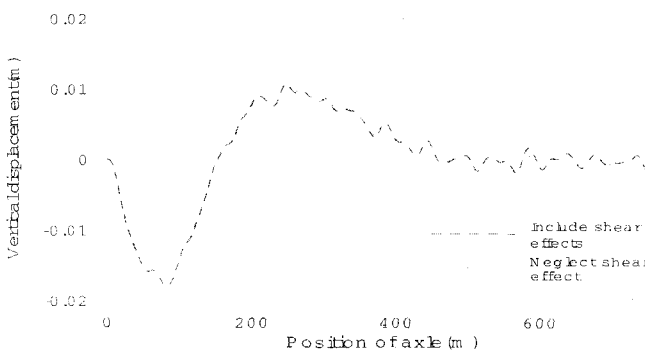


그림 10 1경간 중앙 수직변위응답(sprung mass)

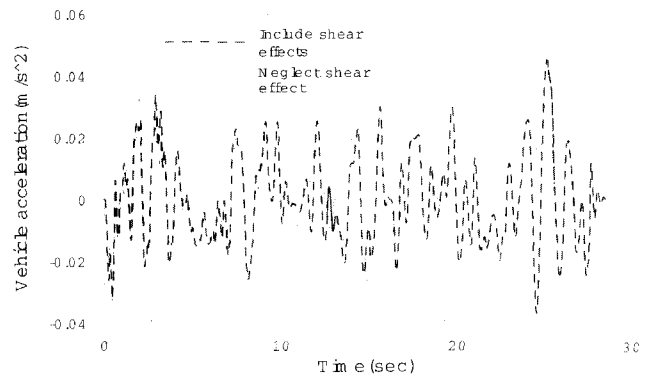


그림 12 차량의 수직 가속도응답

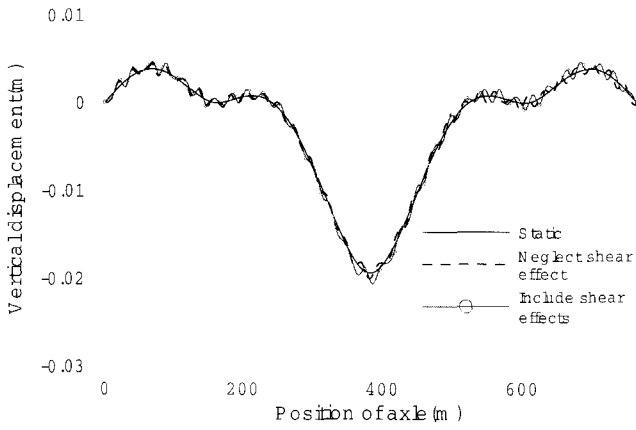


그림 13 중앙경간 중앙 수직변위응답(시속 50km)

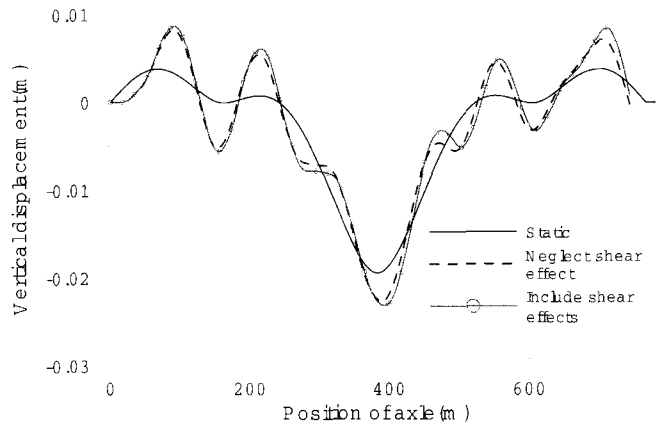


그림 14 중앙경간 중앙 수직변위응답(시속 150km)

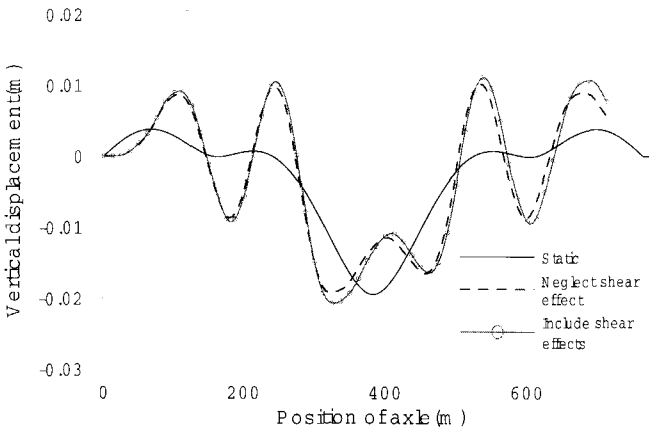


그림 15 중앙경간 중앙 수직변위응답(시속 175km)

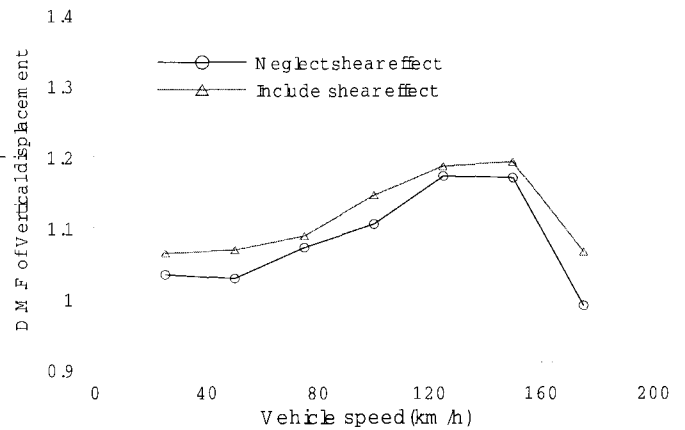


그림 16 중앙경간 중앙 처짐의 동적증폭계수

5.2 열차 하중에 의한 동적응답

열차 모델은 김성일⁽¹⁰⁾ 논문을 참조하여 각각 2개의 동력차와 동력객차 그리고 16개의 객차로 구성된 KHST(2D)로써, 차륜 46개에 각 열차 차체의 질량을 집중화 시켜

모델화 하였다. 열차의 제원은 표7에 나타내었다. 교량 모델은 차량하중과 같은 3경간 현수교의 제원을 사용하였으며, 20개의 모드를 중첩하여 해석하였다. 열차의 속력은 100 km/h 을 사용하였다.

표 7 열차의 제원

제 원			종 류		
			동력차	동력객차	객차
앞대 차의 전륜과 뒤대 차의 후륜 사이의 거리(m)			17.0	21.7	21.7
앞대 차의 후륜과 뒤대 차의 전륜 사이의 거리(m)			11.0	15.7	15.7
대차의 전륜과 후륜 사이의 거리(m)			3.0	3.0	3.0
평균정적 축하중 (kN)	앞대차	전륜	166.77	137.34	165.79
		후륜	166.77	137.34	165.79
	뒤대차	전륜	166.77	241.33	165.79
		후륜	166.77	165.79	165.79
스프링상수 (kN/m)	앞대차	전륜	842	571.0	439.0
		후륜	842	571.0	439.0
	뒤대차	전륜	842	439.0	439.0
		후륜	842	439.0	439.0
감쇠계수 (kN-s/m)	앞대차	전륜	16.75	12.52	12.06
		후륜	16.75	12.52	12.06
	뒤대차	전륜	16.75	14.64	12.06
		후륜	16.75	12.06	12.06

그림 17과 18은 본 수치예제 해석에 고려한 모드 수에 따른 열차하중에 대한 중앙경간 처짐을 도시하였다. 그림에서 보여지는 바와 같이 15개 이상의 모드 수를 고려하였을 경우 응답이 거의 일치하였으며, 20개 이상의 모드 수를 적용하였을 때 최대변위의 값이 일정하였다. 따라서 본 수치예제 또한 20개의 모드를 사용하였다. 그림 19는 열차하중에 의한 중앙경간 중앙 처짐 응답을 전단변형을 고려하지 않은 이동하중에 대하여 도시하였다. 그림에서 보여지는바와 같이 연륜 하중인 열차하중에 대한 본 연구의 해석은 상당히 일치하였다. 그림 20은 moving load와 sprung mass 의 응답을 나타내며, 그림 21는 본 시스템에 대하여 전단변형효과를 비교하였다. 열차하중에 의한 응답 또한 전단변형 효과를 고려하였을 경우 최대 처짐의 증가를 보여준다. 차량 및 열차하중을 받는 현수교의 동적 해석을 수행한 결과, 전단변형 및 회전관성의 효과는 크지 않았는데 이는 트러스 보강형 자체의 전단계수값은 작지 않지만 현수교가 장경간의 교량이며 수직응답의 경우에는 소수 저차모드의 영향이 지배적이기 때문이라고 여겨진다.

6. 결 론

본 연구에서는 Hamilton의 원리를 이용하여 트러스 거

더의 회전관성 및 전단변형효과를 고려하는 현수교의 운동방정식과 전단변형을 고려한 3차의 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하여 케이블과 보강형(stiffening girder)에 대한 강도 및 질량행렬을 유도한 현수교요소에 대하여 자유진동해석을 수행하여 이에 대한 수직 진동 형상과 고유진동수에 대한 해석을 수행한 후, 차량의 에너지로부터 Lagrange equation을 이용하여 현수교와 차량의 상호작용을 고려 할 수 있는 운동방정식을 유도하였다. 차량 및 열차의 주행에 따른 현수교의 동적응답에 대해 시간이력해석을 수행하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

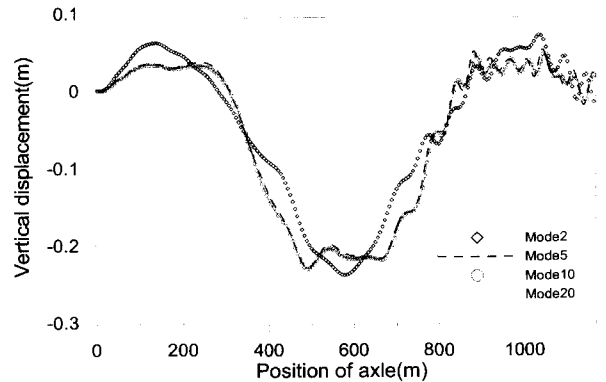


그림 17 모드 수에 따른 중앙경간 중앙 수직변위응답

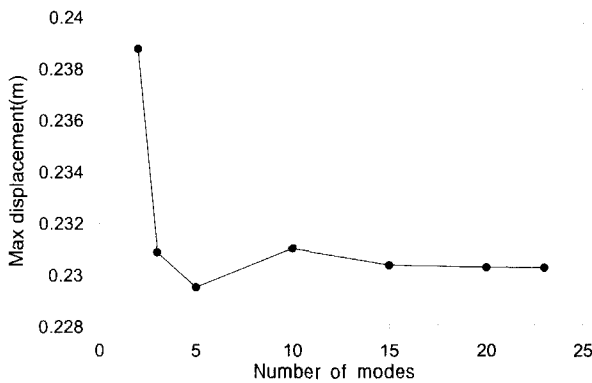


그림 18 모드 수에 따른 중앙경간 최대수직변위

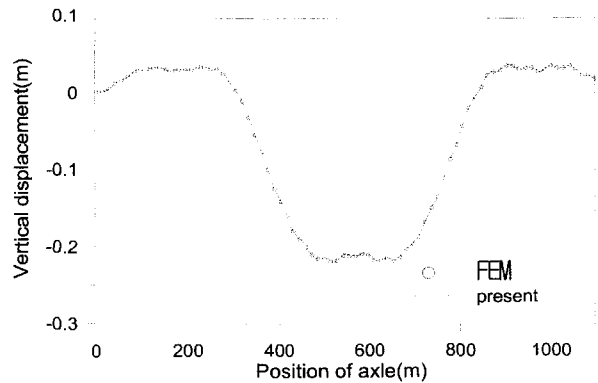


그림 19 열차하중에 의한 중앙경간 중앙 수직변위응답 (이동하중, 전단무시)

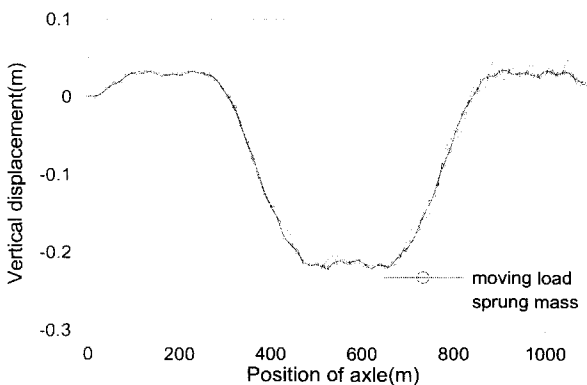


그림 20 열차하중에 의한 중앙경간 중앙 수직변위응답 (전단무시)

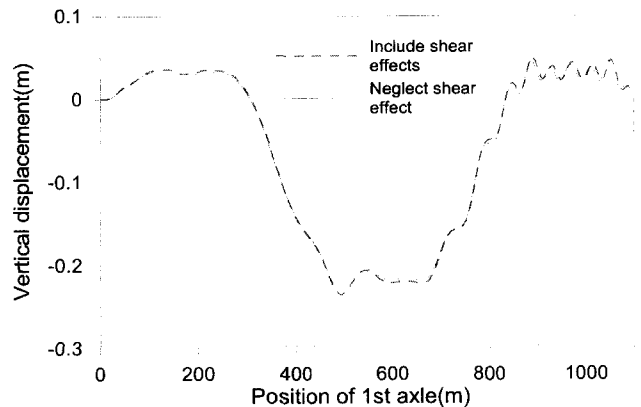


그림 21 열차하중에 의한 중앙경간 중앙 수직변위응답 (sprung mass)

1. 이동하중에 대하여 F.E.M 해석결과와 비교하여 본 연구방법의 타당성과 해석방법을 검증하였다. 이에 대하여 차량과의 상호작용을 고려한 운동방정식을 유도하여 차량과 현수교의 상호 관련된 거동을 해석할 수 있었다.
2. 차량하중 및 열차하중을 받는 현수교의 동적해석을 수행한 결과, 이동하중과 sprung mass의 최대 수직응답 값은 거의 차이가 없었다. 그리고 전단변형 및 회전관성의 효과를 고려한 경우 저차 모드에서는 다소 작으나 고차 모드에 속할수록 고유진동수가 감소하여 전단변형과 회전관성의 영향을 무시할 수 없음을 보여준다. 이는 고유진동수는 저차모드에서 전단변형의 영향이 작다가 고차모드로 갈수록 커지지만, 수직응답의 경우에는 소수 저차모드의 영향이 지배적이며 고차모드의 영향은 아주 작다. 이러한 이유로 고차모드의 고유진동수에서 많은 차이를 보여주었던 전단고려여부가 수직응답에서는 별로 나타나지 않게 되며, 해석 결과 전단변형 효과를 고려한 경우와 고려하지 않은 경우의 수직응답의 차는 그다지 크지 않았다.

참 고 문 헌

1. 윤희택, 노범준, 김문영 "이동하중을 받는 현수교의 비선형 수직진동해석", 한국강구조 학회지, Vol.9, No.3, 1997, pp. 135.
2. Abdel-Ghaffar, A. M., "Vertical Vibration Analysis of Suspension Bridges," *J. of Struct. Div.*, ASCE, Vol.106, No.ST10, 1980, 10, pp. 2053-2075.
3. Hayashikawa, T. and Watanabe, N., "Suspension

- Bridge Response to Moving Loads," *J. of Engrg. Mech.*, ASCE, Vol.108, No.EM6, 1982, 12, pp. 1051-1065.
4. 김호경 "시공상태를 고려한 현수교의 3차원 해석", 서울대학교 박사논문, 1993.
5. 김문영, 노범준 "전단변형 및 회전관성을 고려한 현수교의 수직 자유진동해석 : I. 해석적 방법", 대한토목학회 논문집, 제17권 제I-5호, 1997, pp. 715-726.
6. 김문영, 이병주, 노범준 "전단변형 및 회전관성을 고려한 현수교의 수직 자유진동해석 : II. 수 치적 방법", 대한토목학회 논문집, 제17권 제I-5호, 1997, pp. 727-737.
7. 권순덕, "차량하중을 받는 교량의 진동 제어를 위한 TMD의 효과", 대한토목학회 논문집, 제18권 제I-4호, 1998, pp. 457-467.
8. 서영국, 권순덕 "차량과의 상호작용을 고려한 교량의 동적 모델링", 학술발표회 논문집, 대한토목학회 No. 1, 1998, pp. 451-454.
9. 서정인, 김호경, "현수교의 정착 형식에 따른 이동하중에 의한 동적 응답의 비교", 한국강구조학회 논문집, 제12권 1호, 2000, pp. 103-110.
10. 김성일 "고속철도 교량의 교량-열차 상호작용해석", 박사학위 논문, 서울대학교, 2000, pp. 180.
11. Fryba. L., *Vibration of solids and structures under moving loads*. Noorhoff Interatonal Publishing. Groningen. The Netherlands. 1972, pp. 344.
12. Yang, Y.B., J.D., &Hsu, L.C., "Vibration of Simple Beams due to Trains Moving at High Speeds," *Engineering Structures*, 19(11), 1997, pp. 936-944.