

FE-BEM을 결합한 벽체의 해석모델 개발

Development of a Wall Analysis Model Grafting FE-BEM

정 남 수* · 최 원** · 이 호 제***
김 한 중**** · 이 정 재* · 김 종 욱*****

Jung, Nam Su · Choi, Won · Yi, Ho Jae
Kim, Han Joong · Lee, Jeong Jae · Kim, Jong Ok

Abstract

Methodologies of the finite element and boundary element are combined to achieve an efficient and accurate analysis model of frame structure containing shear wall. This model analyzes the frame by employing the finite element method and the shear wall by boundary element method. This study is applicable to a specific situation, where the boundary element is surrounded by finite elements. By employing FE dominant method in which boundary stiffness matrix is transformed into finite element stiffness matrix, boundary element and finite element method are combined to analyze frame structure with walls.

Keywords : FEM, BEM, FE-BEM, Wall Analysis

I. 서 론

뼈대 구조물을 해석하는 일반적인 수치해석 기법으로는 유한요소법이 있다. 유한요소법은 복잡한 기하 요소를 포함한 실제적인 공학 문제에 유용한 방법이며, 손쉽게 재료 및 기하적 비선형성 등을

고려할 수 있는 이점이 있다. 그러나 필요에 따라 인위적인 경계조건을 설정해야 하며, 필요로 하는 변위를 얻기 위해 해석영역 전체를 포괄하는 유한 요소망을 구성해야 한다.¹⁰⁾

경계요소법은 주어진 영역의 지배방정식과 이를 만족시키는 기본해만 알면, 경계만 이산화하기 때문에 입력 자료의 작성이나 프로그램 실행에 있어 효율적이다. 경계요소법은 문제 풀이가 간단하고, 수학적이어서 대형 문제를 일관된 방법으로 풀 수 있어, 응력집중, 균열 등과 같이 특이성이 존재하는 문제, 바다와 같은 무한 또는 반무한 경계를 갖는 문제 등을 해결하는 데 적합하다.¹⁾

실제 공학 문제는 구조물, 유체, 지반 등 서로 다

* 서울대학교 농공학과
** 서울대학교 대학원
*** 서울대학교 농업생명과학연구원
**** 한경대학교 지역자원시스템공학과
***** 공주대학교 생물산업공학부
* Corresponding author. Tel.: +82-2-880-4592
Fax: +82-2-863-4592
E-mail address: jns@skypond.snu.ac.kr

른 시스템이 결합되어 있어 복잡한 형상으로 이루어졌거나 비선형성을 등을 가지는 경우가 많고, 특히 수리구조물로 대표되는 농업용 구조물은 물과 콘크리트 또는 흙 등이 결합한 형태가 많은데, 이때 유한요소법만을 이용하여 해석하고자 하면 많은 요소를 생성해야 하고, 경계 근방에서는 설정된 경계 조건에 따라 오차의 발생이 불가피하며, 이 오차로 인해 전체 해석값이 부정확해진다. 따라서 유한요소법과 경계요소법의 장점을 이용하여 이를 순차적으로 해석하는 시스템에 관한 연구가 이루어지고 있다.^{9),12)}

벽체에 관한 기존의 해석 방법은 벽체를 구조물에서 제거하고 뼈대 구조물만을 해석하는 기둥-보 해석 방법을 채택하거나, 벽체는 구조해석을 실시하지 않고 실험에 의한 자료를 근거로 개략적으로 설계하는 두 가지 방법이 보편화되어 있다. 이는 유한요소법을 이용하는 경우 벽체는 유한요소법의 평면응력 요소로, 뼈대는 유한요소의 뼈대요소로 동시에 해석하는 방법이 가능하나 정밀한 해를 도출해 내지 못하고 있다.¹⁴⁾

따라서 본 연구에서는 유한요소가 경계요소의 해석영역 외곽에 있도록 모델링하여, 뼈대는 유한요소법에 의해, 벽체는 경계요소법에 의해 벽체를 가진 뼈대 구조물을 일체로 해석하는 모델을 개발하는 것을 그 목적으로 한다.

II. 기본이론

유한요소와 경계요소 조합에 대한 연구는 1970년대부터 이루어졌다. Zienkiewicz 등^{13),15)}은 경계요소를 일반화된 유한요소의 특별한 경우로 파악하여 변분 이론을 이용하여 유한요소법과 유사한 구조로 방정식을 구성하였다. 이후로 1980년대 초가지경계요소법을 일반화된 유한요소 정식화 방법에 적용하기 위하여 경계 요소법의 변수를 유한요소의 변수로 변환하는 연구와 에너지를 최소화하는 방법 또는 경계 요소 행렬을 강성도 행렬로 치환하는 방

법 등이 연구되었는데, 이러한 방법들은 행렬의 주대각 요소를 중심으로 행렬을 대칭으로 구성하였다.^{3),4),6),11)}

그 이후로 유한요소법과 경계 요소법을 결합하는 방법이 다양한 기하 조건과 하중 조건에서 제시되었다.²⁾ 예들들어 경계가 반 무한 영역에서 설정되고 재료나 형상의 복잡성을 갖고 있는 지반 위에 존재하는 구조물에서 차량 진동하중, 기계 진동하중, 발파하중 등 직접 작용하중으로 인한 동적응답을 구하고자 할 경우, 반 무한영역의 유체나 기체 안에 놓여있는 탄성 구조체의 동적해석을 위해 유체나 기체는 경계요소로, 탄성 구조체는 유한요소로 모델링하고, 경계요소를 탄성 구조체의 하중으로 작용시켜 해를 구할 수 있다.²⁾

현재는 실제 공학 문제에 접근해서 구조물, 유체, 지반 등과 같은 서로 다른 시스템을 결합하여 유한요소법과 경계요소법의 장점만을 이용한 새로운 해석 시스템을 개발하는 방향으로 접근하고 있다.^{5),7),8)}

1. 유한요소법 정식화

2차원 뼈대구조물의 해석을 위하여 유한요소법중에서 계산 횟수가 적으면서도, 근사한 해를 도출할 수 있는 강성도법을 이용하였다. 국부 좌표계를 기준하여 표시한 식에서 강성도 행렬 변위 및 하중은 전체 좌표계로 변환되어야 한다. 보에서 u, v 항은 축방향력을 받는 부재의 변위를, θ 항은 국부좌표계에서나 전체좌표계에서 변함이 없는 회전각을 나타낸다. 뼈대구조물에 대한 좌표변환 행렬을 사용하여 국부좌표계에서의 강도방정식을 전체좌표계로 나타내면 다음의 식 (1)과 같다.

$$[K](U) = (F) \dots \dots \dots (1)$$

여기서, $[T] [k] [T]^{-1} = [K]$

k : 국부좌표계에서의 뼈대요소의 강성도 행렬
 (U) 는 전체 좌표계에서의 변위

(F)는 전체 좌표계에서의 하중

$$\sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\bar{C}_j} \mathbf{u}^* ds \right\} \mathbf{p}_j, \dots \dots \dots (6)$$

2. 경계요소법 정식화

Brebbia(1989)은 식 (2)와 같이 경계적분방정식을 제안하였다.

$$\alpha(i) u(i) + \int \int_S u_b \dot{p}_b^* dS = \int \int_V b_k u_k^* dV + \int \int_S p_k u_k^* dS \dots \dots \dots (2)$$

여기서,

$$\alpha(i) = \begin{cases} 0 & i\text{요소가 외부에 존재} \\ 1 & i\text{요소가 내부에 존재} \\ 1/2 & i\text{요소가 경계의 근사영역에 존재} \\ \theta/2\pi & i\text{요소가 구석에 존재} \end{cases}$$

이를 2차원 등방성 탄성체에 적용하기 위하여 u_k^* 와 p_k^* 대신에 2차원 행렬인 \mathbf{u}^* , \mathbf{p}^* 를 정의하면 식 (3)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} \dots \dots \dots (3)$$

또한 벡터의 형태로 \mathbf{u} , \mathbf{p} , \mathbf{b} 를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^T, \quad \mathbf{p} = [p_1 \ p_2]^T, \quad \mathbf{b} = [b_1 \ b_2]^T \dots (4)$$

여기서, b 물체력

식 (4)와 (3)을 경계적분 방정식 (2)에 적용하면 다음과 같이 간략하게 된다.

여기서, R : 평면 영역, C : 경계 영역

Fig. 1과 같이 \mathbf{u} 와 \mathbf{q} 의 값은 각각의 요소에서 일정하게 변화한다고 가정하면 식 (5)의 경계 적분 방정식은 식 (6)과 같은 경계 요소 방정식으로 이산화시킬 수 있다.

$$\alpha(i) u(i) + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\bar{C}_j} \mathbf{p}^* ds \right\} \mathbf{u}_j = \int \int_R \mathbf{u}^* \mathbf{b} dx_1 dx_2 +$$

$$\int \int_C \mathbf{p}^* \mathbf{u} ds = \int \int_R \mathbf{u}^* \mathbf{b} dx_1 dx_2 + \int_C \mathbf{u}^* \mathbf{p} ds \dots \dots \dots (5)$$

여기서, N : 요소의 개수

\bar{C}_j : 이산 요소

Fig. 1에서 보이는 내부 격자들은 물체력 항을 구하기 위해 수치적으로 적분을 시행할 때 계산되는 것으로서 M 을 내부 격자의 개수라 하면 다음과 같이 이산화시킬 수 있다.

$$B_i = \int \int_R \mathbf{u}^* \mathbf{b} dx_1 dx_2 = \sum_{k=1}^M \left\{ \sum_{k=1}^M (\mathbf{u}^* \mathbf{b})_k w_k \right\} A_s (7)$$

여기서, M : 내부 셀의 개수

A_s : 내부 셀의 면적

w_k : 가우스 적분에 이용되는 가중치

중력과 같은 물체력 항을 다루지 않으므로 물체 내부간의 B_i 항은 무시된다.

또한, $\bar{H}_{ij} = \int_C \mathbf{p}^* ds$, $G_{ij} = \int_C \mathbf{u}^* ds$ 라 하면 식

(5)는 식 (8)과 같이 정리된다.

$$\alpha(i) u(i) + \sum_{j=1}^N \bar{H}_{ij} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} \mathbf{p}_j \dots \dots \dots (8)$$

식을 간략화 하기 위하여 식 (9)과 같이 정의하면 식 (8)은 식 (10)의 형태로 간단히 표현할 수 있다.

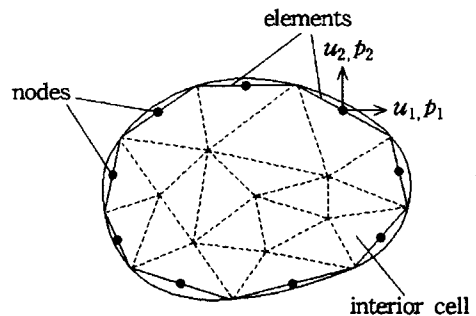


Fig. 1 Constant boundary elements

$$H_{ij} = \begin{pmatrix} \overline{H}_{ij} & \text{if } i \neq j \\ \overline{H}_{ij} + \alpha(i) & \text{if } i = j \end{pmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

여기서, $\alpha(i) = \begin{bmatrix} \alpha(i) & 0 \\ 0 & \alpha(i) \end{bmatrix}$

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} p_j \dots\dots\dots (10)$$

식 (10)를 행렬 형태로 표현하면 식 (11)과 같다.

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} \dots\dots\dots (11)$$

III. FE-BEM을 결합한 벽체의 해석모델

1. 유한요소법과 경계요소법의 결합

식 (11)의 양변에 $[G]^{-1}$ 를 곱하여 정리하면 식 (12)와 같이 나타낼 수 있다.

$$[G]^{-1}[H]\{U\} = \{P\} \dots\dots\dots (12)$$

보, 기둥과 연결된 벽체구조에서 해석대상을 보면 하중 전달이 보 기둥에서 벽체로 진행되고 다시 벽체의 변형이 보 기둥에 의해 억제되므로, 경계요소법의 변위와 traction이 선형 요소에 한 일의 양을 이용하여 힘과 traction 사이의 관계를 행렬 형태로 식 (13)와 같이 정의 할 수 있다.⁶⁾

$$\{F\} = [M]\{P\} \dots\dots\dots (13)$$

식 (13)의 양변에 $[M]^{-1}$ 를 곱하여 식 (14)와 결합하여 정리하면 경계요소법의 강도 행렬은 식 (14), (15)과 같다.

$$[M][G]^{-1}[H]\{U\} = \{F\} \dots\dots\dots (14)$$

$$[K]^{BEM}\{U\} = \{F\} \dots\dots\dots (15)$$

Fig. 3.7과 같이 임의의 하중을 받고 있는 구조

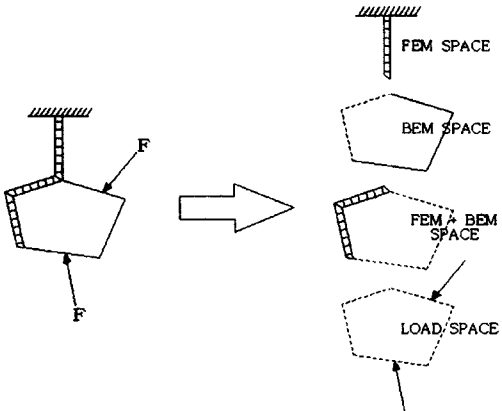


Fig. 3.7 Structure space

물을 유한요소로 해석하는 영역, 경계요소로 해석하는 영역, 유한요소와 경계요소를 결합하여 해석하는 영역, 하중 영역으로 분리할 수 있다.

해석영역별로 방정식을 분리하면, 유한요소와 경계요소가 독립적인 영역은 각각 (17), (18)과 같이 나타난다.

$$[K]^{FE_1}\{U\}^{FE_1} = \{F\}^{FE_1} \dots\dots\dots (16)$$

$$[K]^{BE_2}\{U\}^{BE_2} = \{F\}^{BE_2} \dots\dots\dots (17)$$

또한, 유한요소와 경계요소가 결합되는 영역을 해석하는 행렬은 식 (18)과 같이 표현할 수 있다.

$$[K]^{FE_3+BE_3}\{U\}^{FE_3+BE_3} = \{F\}^{FE_3+BE_3} \dots\dots\dots (18)$$

식 (16)와 (17)와 (18)을 전체 행렬로 조합하면 식 (21)과 같다.

$$\begin{bmatrix} [K]^{FE_1} & 0 & 0 \\ 0 & [K]^{BE_2} & 0 \\ 0 & 0 & [K]^{FE_3+BE_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{FE_1} \\ U^{BE_2} \\ U^{FE_3+BE_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{FE_1} \\ F^{BE_2} \\ F^{FE_3+BE_3} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

유한요소법과 경계요소법은 선형가정에서 출발하고 있기 때문에, 영역간의 변형 배분은 선형이라고 가정할 수 있다. 그러므로 본 연구에서는 식 (19)

에서 경계요소법과 유한요소법이 동시에 결합된 요소의 물성치를 식 (21)과 같이 정의하였다.

$$[K]^{FE_3 + BE_3} = \alpha [K]^{FE_3} + \beta [K]^{BE_3} \dots \dots \dots (21)$$

2. 벽체에서의 결합 상수의 산정

뼈대구조를 포함한 벽체의 경우에 대한 결합상수 α , β 는 현재 통용되고 있는 비교해(SAP을 이용한 해석결과)와 FE-BEM의 해를 이용하여 결정하였다.

결합 상수의 결정은 식 (21)의 α , β 를 동시에 변화시키거나 어느 한쪽만을 변화시키는 방법을 고려할 수 있는데, 뼈대구조와 결합된 벽체의 경우 변형을 지배하는 주요 요소와 경계요소의 경계값이 외곽의 뼈대 구조물인 점을 감안하여, α 는 1로 고정하고 β 를 변화시켜가며 결정하였다.

뼈대구조와 결합된 벽체의 경우는 Fig. 2와 같은 구조를 대상으로 하고, 뼈대의 가로/세로 비율을 0.5~3.0으로, 세로의 길이는 10 m로 고정하고, 기초의 자유도는 모두 고정으로, 나머지 경계조건은 자유단으로 설정하였으며, 하중은 상부 외부 뼈대 중앙에 집중하중 2.0×10^6 kgf를 적용하였다.

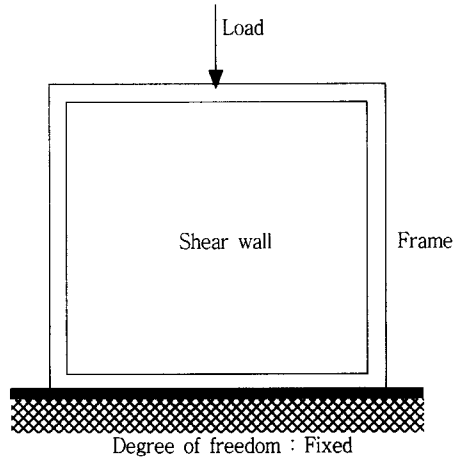


Fig. 2 Example of frame structure containing shear wall

FE-BEM을 적용하기 위하여 Fig. 3과 같이 모델링 하였다.

비교해와 FE-BEM의 방법을 비교한 결과 Fig. 4와 같은 관련성을 나타내어 두 방법이 매우 유사한 결과를 주는 것을 알 수 있으며, 이때 벽체의 결합상수는 식 (23)으로 나타낼 수 있었다.

$$\beta = -0.3009x^3 + 2.6555x^2 - 8.4026x + 11.739 \dots (24)$$

여기서, $x = \frac{\text{width of wall}}{\text{height of wall}}$

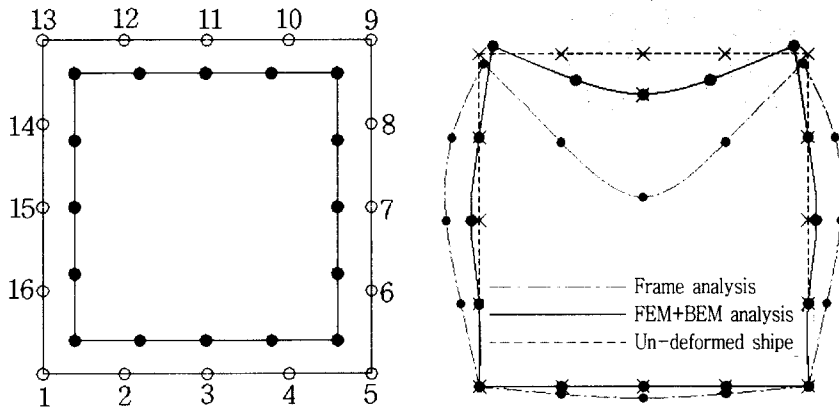


Fig. 3 The State in which the structure has been meshed into elements

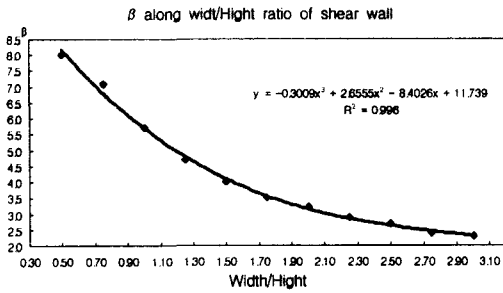


Fig. 4 β along width/height ratio of shear wall

IV. 적용예

FE-BEM의 적용성은 Fig. 5와 같이 벽체를 포함한 뼈대구조물을 이용하여 검토하였다.

뼈대의 가로/세로 비율은 2/1을 적용하였고 기초의 자유도는 모두 고정으로, 나머지 경계조건은 자유단으로 설정하였으며, 하중은 상부 외부 뼈대구조 중앙에 집중하중 2 tonf 을 적용하였다. 벽체의 폭/높이 비율이 2/1이기 때문에 식 3.70으로부터 β 는 3.1을 사용하였다.

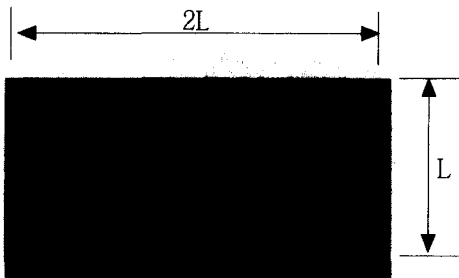


Fig. 5 Example

여기서, 뼈대구조물의 물성치로,

탄성계수 :

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2 = 2,100,000 \text{ kgf/cm}^2$$

보의 높이 :

$$h = \frac{10 \text{ m}}{21.5} = \frac{1,000 \text{ cm}}{21.5} = 46.51 \text{ cm} \approx 50 \text{ cm}$$

보의 2차 단면 모멘트 :

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{25 \times 50^3}{12} = 260,416.67 \text{ cm}^4$$

벽체의 물성치로,

보의 폭 : $b = 25 \text{ cm}$, 보의 단면적 : $A = 1,250 \text{ cm}^2$

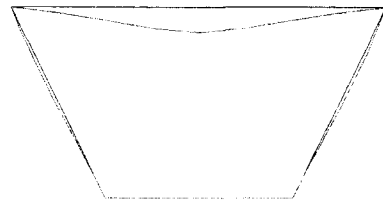
포아송비 : $\nu = 0.2$, 탄성계수 : $E = 2.1 \times 10^3 \text{ kgf/cm}^2$ 을 사용하였다.

1. 고찰

Fig. 6는 벽체를 포함한 뼈대구조물의 변형을 나



(a) Deflection by FEM analysis



(b) Deflection by FE-BEM analysis

Fig. 6 Result of deflection

Table 1 Analysis time and deflection about example

	FEM method		FE-BEM method ($\beta = 3.1$)
	Coarse element	Fine element	
Analysis time(s)	94	107	5
Deflection on top-middle node(mm)	-52.44	-8.74	-8.88
Node number	196	625	32
Element number	377	1399	32

타낸 것으로서, 왼쪽은 유한요소법에 의한 변형을, 오른쪽은 FE-BEM에 의한 변형을 나타낸다.

Table 1에서 나타난 바와 같이 모든 변위는 5% 이내로 오차가 발생하였으며, 결과를 정리하면 다음 표와 같이 기존의 유한요소법에 의하면 요소의 개수가 세분화되어야만 두 결과가 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. FE-BEM으로 해석했을 경우, 요소의 개수가 적더라도 유한요소법과 같은 결과를 얻을 수 있었다.

V. 결 론

농업 또는 농촌기반시설은 수리구조물 등과 같이 물과 구조물 또는 지반 등이 결합되어 있으므로 이를 고려할 수 있는 혼합형 해석모델의 개발이 필요하다. 본 연구에서는 유한요소가 경계요소를 해석 영역 외각에 있도록 모델링 하여 빠대는 유한요소법, 벽체는 경계요소법을 이용하여 벽체를 가진 뼈대구조물의 해석 모델을 개발하였다.

1. 유한요소와 경계요소는 구조물의 결합상태로 선형가정을 통한 결합상수를 이용하여 다음과 같이 정식화 할 수 있다.

$$[K]^{FE+BE} = \alpha[K]^{FE} + \beta[K]^{BE}$$

2. 벽체에서의 결합상수는 $\alpha=1$ 로 하는 경우 β 는 아래 식과 같았으며, 이 식을 적용한 경우 FEM에 의한 해석 결과와 비교하여 결정계수는 0.996으로 유의하였다.

$$\beta = -0.3009x^3 + 2.6555x^2 - 8.4026x + 11.739$$

3. FE-BEM을 결합한 해석 방법은 벽체의 경우 해석의 간편성에서 매우 유리하였다. 적용 예제의 경우 절점 개수는 1:20(요소개수 1:48)으로 하여도 메모리 사용을 1/50 이하로 줄이면서 동일한 결과를 20배 이상 빨리 얻을 수 있어, 소규모 컴퓨터의 이용에 간편하게 이용할 수 있다고 판단된다.

본 연구는 2004년도 농림기술관리센터 '농업 시설의 계획 설계를 위한 CAD와 GIS 자료구조 통합 시스템 개발'(과제번호: 203103-03-2-SB010)의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

Reference

1. Ahmad, S., F. Leyte, and R. K. N. D. Rajapakse, 2001, Bem analysis of two-dimensional elastodynamic problems of anisotropic solids, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 127, No. 2
2. Ahn, J.G., 1999, Structural-Acoustic Coupling Analysis Using FEM/BEM, Pusan National Univ. (in Korean)
3. Beer, G., and J. L. Meek, 1981, The coupling of boundary and finite element methods for infinite domain problems in elastoplasticity, Proc. Third Int. Seminar on Boundary Element Methods, C. A. Brebbia(ed.) Irvine, pp.575~591.
4. Brebbia, C. A., and P. Georgiou, 1979, Combination of boundary and finite elements for elastostatics, Appl. Math. Modelling, Vol. 3, pp.212~220.
5. Coda, H. B., W. S. Venturini, and M. H. Aliabadi, 1999, A general 3D BEM/FEM coupling applied to elastodynamic continua/frame structures interaction analysis, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 46, pp.695~712.
6. Kelly, D. W., G. G. W. Mustoe, and O. C. Zienkiewicz, 1979, Coupling boundary element methods with other numerical methods in Development in Boundary Element Methods, Vol. 1, Applied Science Publishers, London, pp.251~285.
7. Kim, M.K., Huh, T.N., Lee, S.D., 1994, NonLinear Finite Element-Boundary Element Analysis of Multi-Layered Structural Sys-

- tems, Journal of Computational Structural Engineering Institute 7(4), pp.57-67. (in Korean)
8. Landenberger, A., and A. El-Zafrany, 1999, Boundary element analysis of elastic contact problems using gap finite elements, Int. J. Computers and Structures., Vol. 71, pp.651~661.
 9. Lee, C.W., Kim, M.K., Hwang, H.J., 1995, Three Dimensional Dynamic Analysis of Underground Tunnels by Coupling of Boundary and Finite Elements, Journal of Computational Structural Engineering Institute 8(3), pp.91-102. (in Korean)
 10. Lee, J.J., 1991, Reliability Analysis Modeling of Frame Structures based on Discretized Ideal Plastic Method, Ph.D. thesis: Seoul National University (in Korean)
 11. Margulies, M., 1981, Combination of the boundary element and finite element methods, Progress in Boundary Element Methods, Vol. 1, C. A. Brebbia(ed.), Pentech Press, Plymouth, pp.259~288.
 12. Meirovitch, L., and H. Baruh, 1983, On the inclusion principle for the hierarchical finite element method, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 19, pp.281~291
 13. Osias, J. R., R. B. Wilson, and L. A. Seitzman, 1977, Combined boundary integral equation finite element analysis of solids, Proc. First Symp. on Innovative Numerical Analysis in Applied Engineering Science, Versailles.
 14. Rutenberg, A., 1975, Approximate natural frequencies for coupled shear walls, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 4, pp.95~100
 15. Shaw, R.P., and W. Falby, 1977, A combined finite element-boundary integral equation method, Proc. First Symp. on Innovation Numerical Analysis in Applied Engineering Science, Versailles.