

확률적 순서를 이용한 대기행렬 망에서 안정 대기시간의 범위*

서 동 원**

Bounds for Stationary Waiting Times in a Class of Queueing Networks using Stochastic Ordering*

Dong-Won Seo**

□ Abstract □

In this paper we study bounds for characteristics of stationary waiting times in $(\max, +)$ -linear systems with a Poisson arrival process, which are prevalent in manufacturing systems, kanban systems, cyclic and acyclic fork-and-join type systems, finite or infinite capacity tandem queues with various kinds of blocking, transportation systems, and telecommunication networks, and so on. Recently, some results on series expansion for characteristics, such as higher moments, Laplace transform, and tail probability, of transient and stationary waiting times in a class of $(\max, +)$ -linear systems via Taylor series expansions have been studied. In order to overcome the computational complexity in those results, we consider bounds for characteristics of stationary waiting times using valuable stochastic ordering results. Some numerical examples are also provided.

Keyword : queueing network, $(\max, +)$ -linear systems, waiting times, stochastic ordering

1. 서 론

대기행렬 망과 같은 시스템에서 대기시간(waiting

times), 체류시간(sojourn times) 등과 같은 시스템
특성치들(characteristics)이 두 개의 연산자 - 최대
값(maximization)과 합(sum) - 만을 이용한 선형함

논문접수일 : 2004년 3월 24일 논문게재확정일 : 2004년 8월 18일

* 이 논문은 2003년도 경희대학교 지원에 의한 결과임(KHU-20030967).

** 경희대학교 국제경영학부

수 식으로 표현될 수 있는 시스템을 (max, +)-선형 시스템이라 말한다. 즉, (max, +)-선형 시스템은 선택불가(choice-free)형 망이고, 망의 각 노드(node)에는 한 명의 서버가 존재하며 FIFO(first-in first-out) 서비스 규칙에 따라 서비스가 이루어지는 추월불가(non-overlapping)형 대기행렬 망이다. 이러한 시스템은 Petri Net의 특정 형태인 event graph로 표현될 수 있으며, 생산/제조 시스템에서 흔히 볼 수 있는 칸반(Kanban) 시스템, 유한/무한의 버퍼를 가지고 다양한 차단현상을 따르는 직렬 구조 대기행렬 망, 분리/접합(Fork and Join)형 시스템과 같은 조합(assembly)형 대기행렬 망, 통신망(Telecommunication Networks) 등 다양한 시스템을 포함한다.

대기행렬 망에서 안정 대기시간에 대한 연구는 많이 되어왔다. 이전의 많은 연구들은 교통밀도가 높거나 낮은 경우의 대기행렬 망, 각 노드의 서비스 시간분포를 지수분포 또는 상수(deterministic)로 가정한 대기행렬 망, 두 개 또는 세 개의 노드로 구성된 대기행렬 망, 직렬구조와 같은 특정 구조를 갖는 대기행렬 망, 또는 동종의(homogeneous) 지수분포를 서비스 시간으로 갖는 분리/접합 대기행렬 망(Nelson과 Tantawi[9]) 등 매우 제한적인 구조를 갖는 대기행렬 망에서 시스템 안정 대기시간에 대한 평균과 이에 대한 근사치와 범위에 관한 연구들이다.

이러한 기존 연구의 제한된 망 구조에 비해 보다 일반적인 망 구조가 (max, +)-선형 망이다. Baccelli와 Schmidt[7], Baccelli et al[5, 6], Hasenfuss[8]은 하나의 포아송(Poisson) 도착과정을 갖고 시스템 각 노드에서 일반 서비스 시간분포를 갖는 대기행렬 망에서 대기시간에 관한 연구를 하였다. 그들은 (max, +)-선형 망에서 시스템 일시 또는 안정 대기시간과 같은 특성치들이 도착과정인 포아송 분포의 모수(parameter)에 대한 테일러 시리즈 전개식(Taylor Series Expansion)으로 표현될 수 있음을 보였다. Ayhan과 Seo[1-3]는 그들의 결과를 응용하여 시스템 일시 또는 안정 대기시간에 대한 고차 평균

(higher moments), 라플라스 변환(Laplace transform), 꼬리 확률(tail probability)과 같은 특성치에 대한 간결한 표현식(closed form expression)을 도출하였다.

이러한 시리즈 전개식의 계수들은 서비스 시간 확률변수에 대한 함수의 다중적분 형태를 띠고 있다. 이론상으론 이러한 시리즈 전개식의 모든 계수는 계산 가능하지만, 실제로는 시스템이 특정한 서비스 시간분포를 갖는 경우 또는 시스템이 특정한 구조를 따르는 경우 외에는 확률변수 함수의 다중적분 계산의 복잡성 때문에 모든 계수를 구할 수 없다. Hasenfuss[8]는 컴퓨터 대수(computer-algebra)를 이용하여 서비스 분포가 연속분포일 경우 시리즈 전개식의 계수를 계산하는 알고리즘을 개발하였다. 컴퓨터 메모리와 성능의 제약 때문에 그의 계산 알고리즘은 대부분 전개식의 하위 도수(degree) 계수의 계산에만 국한된다. Seidel, Koceraba와 Mitreiter[10]은 시스템 각 노드에서 서비스 시간 분포가 몇 개의 값에(small atom sets)에 국한되는 경우의 직렬구조 대기행렬 망에 있어서 시스템 안정 대기시간에 대한 시리즈 전개식의 계수를 구하는 효율적인 알고리즘을 도출했다. 그러나, 각 노드에서 일반적인 서비스 시간분포가 허용되는 (max, +)-선형 대기행렬 망의 일시 또는 안정대기 시간에 대한 효율적인 계산 알고리즘에 대한 연구결과는 없다.

기존의 많은 연구와 달리, 본 연구에서는 일반 서비스 시간분포를 갖고 보다 일반적인 구조가 허용되는 (max, +)-선형 대기행렬 망에서 대기시간의 분석에 관한 앞선 결과들([1-3, 5-8])에 존재하는 전개식 계수 계산의 어려움을 극복하기 위한 방법의 일환으로 잘 알려진 확률적 순서(Stochastic Ordering) 결과를 이용하고자 한다. 즉, 서비스 시간분포에 관한 확률적 순서 결과를 대기시간의 평균, 고차 평균과 같은 특성치의 연구결과에 응용하여 이들 특성치의 상하위 범위를 보다 쉽게 구할 수 있음을 보이는 것이 본 연구의 목적이다.

2절에서는 (max, +)-선형 시스템에서 일시 또는

안정 대기시간에 대한 특성치가 (max, +)-대수(algebra)를 이용해서 어떻게 표현되는지를 보이고, 범위를 도출하는데 필요한 선행 연구의 결과를 살펴본다. 3절에서는 확률적 순서에 대한 정의 및 관련된 결과들을 소개하고, 이러한 결과들이 일반적인 서비스 분포를 가지는 (max, +)-선형 시스템에서 시스템 안정 대기시간의 범위를 구하는데 응용 가능함을 보인다. 4절에서는 (max, +)-선형 시스템에서 확률적 순서를 이용한 시스템 평균 안정 대기시간의 상하위 범위를 간단한 예제를 통해 구해보고, 마지막으로 5절에서 결론과 추후 연구과제에 대해 소개한다.

2. (Max, +)-선형 시스템에서의 안정 대기시간

먼저 개방형 (max, +)-선형 시스템 내의 한 노드에서 n 번째 고객의 서비스 시작시점 X_n 과 $n+1$ 번째 고객의 서비스 시작시점 X_{n+1} 간의 관계를 살펴보자. 대기행렬 망의 각 노드에서 서비스 시작시점 확률벡터 수열 $\{X_n\}$ 은 (max, +)-대수([4])를 이용하여 다음과 같은 회귀식(recursive equation)으로 표현될 수 있다.

$$X_{n+1} = A_n \otimes X_n \oplus B_{n+1} \otimes T_{n+1} \quad (2.1)$$

식 (2.1)에서 $\{A_n\}, \{B_n\}$ 는 안정 임의행렬(stationary random matrices)이고, 이 임의행렬의 원소들은 고객들의 각 노드에서 서비스 시간 확률변수들의 선형 함수로 표현된다. $\{T_n\}$ 은 실수의 값을 가지는 증가 수열이며, 도착과정 분포에 따른 도착시간을 나타낸다. 예를 들면, (max, +)-선형 시스템 대기행렬 망이 a 개의 노드로 구성되어 있다면, 안정 임의행렬 A 는 $a \times a$ 인 행렬이고, 임의행렬 B 는 $a \times 1$ 인 행렬이 된다. 두 연산자 \otimes (o-times)와 \oplus (o-plus)는 합과 최대치를 나타내는 (max, +)-대수 연산자이다. 따라서 $\{X_n\} = (X_n^1, X_n^2, \dots, X_n^a)$ 는 시스템에서 n 번째 도착고객의 노드 $i(i=1, 2, \dots, a)$ 에

서 서비스 시작시점까지의 절대시간을 나타낸다. 이러한 절대시간은 도착 고객수 n 이 증가함에 따라 무한히 커지게 된다. 이러한 이유로 $\widehat{W}_n^i = X_n^i - T_n$ 와 같은 대기시간(n 번째 고객의 시스템 도착시점부터 노드 i 에서 서비스의 시작시점까지 시스템에 머문 시간)에 관심을 가지게 된다. 단일 노드의 확률적 시스템인 경우, 즉 $a=1$, 일시 대기시간에 대한 회귀식은 잘 알려진 Lindley의 식과 같음을 쉽게 알 수 있다.

Baccelli와 Schmidt[7]는 $W^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{W}_n^i$ 와 같은 분포 극한값(convergence in distribution)이 존재하는 일정한 조건(certain condition) 하에서, 안정 대기시간에 대한 분석도 이와 같은 방법으로 도출 가능함을 보였다. 시스템의 안정 대기시간에 대한 전개식도 식 (2.1)과 같이 유도할 수 있으며, 이러한 회귀식은 유일해(unique solution)를 가지며, 그 해는 다음과 같은 서비스 시간 확률변수의 회귀적 함수 형태를 갖는다([7, 8]).

$$W = D_0 \oplus \bigoplus_{k \geq 1} C(T_{-k}) \otimes D_k \quad (2.2)$$

식 (2.2)에서 $k=0$ 이면 $D_0 = B_0$ 이고, $k \geq 1$ 이면 확률 벡터 D_k 는 다음 식 (2.3)과 같이 정의된다.

$$D_k = \left(\bigotimes_{n=1}^k A_{-n} \right) \otimes D_{-k} \quad (2.3)$$

또한 식 (2.2)에서 $C(x)$ 는 행렬의 대각원소들이 $-x$ 인 대각행렬(diagonal matrix)이다. 확률 벡터 D_k 의 i 번째 원소인 D_k^i 는 이러한 개방형 (max, +)-선형 시스템 상응하는 task graph에서 맨 처음 노드에서 i 번째 노드까지의 주공정시간(일종의 critical path time)을 나타낸다고 볼 수 있다. 즉, 확률벡터 D_k 의 원소들은 고객들의 각 노드에서 서비스 시간 확률변수들만의 선형함수로 표현된다.

앞선 연구결과의 이해를 돕기 위해 두 개의 다항함수 $p_k(\dots)$ 와 $q_k(\dots)$ 를 소개하면([5-8]), 다항함수 $p_k(\dots)$ 는

$$p_k(x_0, \dots, x_{k-1}) = \sum_{(i_0, i_1, \dots, i_{k-1}) \in N_k} (-1)^{\gamma_k(i_0, i_1, \dots, i_{k-1})} \frac{x_0^{i_0}}{i_0!} \frac{x_1^{i_1}}{i_1!} \dots \frac{x_{k-1}^{i_{k-1}}}{i_{k-1}!}$$

와 같이 정의된다. 여기서

$$N_k = \{(i_0, i_1, \dots, i_{k-1}) \in \{0, 1, \dots\}^k :$$

$$i_0 + i_1 + \dots + i_{k-1} = k,$$

$$\text{if } i_s = l > 1, i_{s-1 \bmod k} = \dots = i_{s-l+1 \bmod k} = 0\}$$

이고,

$$k \geq 1 \text{ 일 때 } \gamma_k(i_0, i_1, \dots, i_{k-1}) = 1 + \sum_{n=0}^{k-1} I(i_n > 0)$$

이며, $I(x)$ 는 x 가 참이면 1이고 x 가 거짓이면 0을 갖는 표시함수(indicator function)이다. 또한 다항함수 $q_k(\dots)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$q_{k+1}(x_0, x_1, \dots, x_k) = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} (-1)^{k-n} H^{[k]}(x_n) - \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j}{n} (-1)^{j-n} H^{[j]}(x_n) \{p_{k-j}(x_{n+1}, \dots, x_{k-j+n}) - p_{k-j}(x_n, \dots, x_{k-j+n-1})\}.$$

하나의 포아송 도착과정을 가지는 (max, +)-선형 시스템에서 안정 대기시간에 대한 특성치를 다음과 같이 포아송 도착과정의 모수에 대한 테일러 시리즈 전개식으로부터 얻을 수 있다([5-8]). 그들의 결과에 의하면 모든 $x(x \geq 0)$ 에 대해 비음(non-negative)이고, 적분 가능하고, 유한(bounded)한 함수 $G(x)$ 가 $m+1$ 차까지 미분 가능하다면, 시스템 안정 대기시간 $W_i(i=1, 2, \dots, a)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E[G(W^i)] = \sum_{k=0}^m \lambda^k E[q_{k+1}(D_0^i, D_1^i, \dots, D_k^i)] + O(\lambda^{m+1}) \quad (2.4)$$

그들은 다항함수 $q_k(\dots)$ 함수 정의에서 함수 $H(\cdot)$ 는 계산상의 복잡성을 줄이기 위해 구하고자 하는 특성치의 함수형태에 따라 적절하게(suitably) 선택

될 수 있다고 언급했다. 일반적으로 $H^{[0]} = G(x)$ 이고, $H^{[n]} = \int H^{[n-1]}$ 와 같이 회귀적인 형태를 가진다. $G(x) = x^v (v \in N)$ 이면, 시스템 안정 대기 시간에 대한 고차 평균에 대한 시리즈 전개식을 얻을 수 있다. 특히, $G(x) = x$ 이면 평균 안정 대기 시간에 대한 시리즈 전개식을 구할 수 있으며, 앞서 정의된 다항함수 $q_k(\dots)$ 와 다항함수 $p_k(\dots)$ 는 같다([8, 10]).

안정 대기시간에 관한 분석과 같은 방법으로 Ayhan과 Seo[1], Baccelli et al[6, 8]는 (max, +)-선형 시스템에서 일시 대기시간에 대한 특성치도 포아송 도착과정의 모수에 대한 테일러 시리즈 전개식으로 표현 가능함을 보였다. 식 (2.4)에서 알 수 있듯이 시리즈 전개식의 각 계수는 서비스 시간 확률변수들에 대한 함수의 다중적분 형태를 띠고 있다. 또한 전개식의 각 계수들은 포아송 도착과정의 모수와 독립적으로 계산 가능함을 알 수 있다. 이러한 사실은 시리즈 전개식의 계수가 도착과정의 모수의 변동에 무관하며, 망의 구조와 서비스 시간 확률분포에만 의존함을 말한다.

일반적으로 일시 대기시간과 달리 특정한 서비스 시간분포를 가지는 경우 외에는 (max, +)-선형 망에서 안정 대기시간에 대한 간결한 표현식은 도출할 수가 없다([1, 2]). 그러므로, 시스템 안정 대기 시간에 대한 분석을 위해 Ayhan과 Seo([1, 2])는 그들의 연구에서 다음과 같은 특정한 형태를 가지는 (max, +)-선형 시스템을 가정했다. 상수(deterministic)의 서비스 시간분포를 갖는 모든 대기행렬 망이 식 (2.5)와 같은 형태를 만족하지는 못하지만, 직렬 구조 대기행렬 망, 유한 버퍼를 갖고 다양한 차단현상(blocking rule)을 따르는 분리/접합형 대기행렬 망, 칸반 시스템, CONWIP(CONstant Work In process) 시스템 등과 같이 잘 알려진 확률적 시스템의 대부분은 이러한 가정을 만족한다.

$$D_m^i = \begin{cases} \eta_m^i & m=0, \dots, \xi_i-1 \text{ 일 때} \\ \eta_{\xi_i}^i + (m - \xi_i) a_i & m \geq \xi_i \text{ 일 때} \end{cases} \quad (2.5)$$

식 (2.5)에서 $\eta_m^i (m = 0, 1, \dots, \xi_i)$ 는 상수이며 $0 \leq \eta_0^i \leq \eta_1^i \leq \dots \leq \eta_{\xi_i}^i$ 이고, a_i 는 실수이고, ξ_i 는 비음(nonnegative) 정수이다. 또한 여기서 η_m^i , a_i 와 ξ_i 는 분석하고자 하는 망의 관심 노드($i=1, 2, \dots, a$)에 따라 결정되는 값들이다. Ayhan과 Seo[1]는 이와 같은 (max, +)-선형 대기행렬 망에서 시스템 안정 대기시간의 고차 평균에 대해 다음 정리와 같은 간결한 표현식을 도출하였다.

정리 1 : 안정 대기시간의 고차평균

i) $\xi_i \geq 1$ 인 경우

$$\begin{aligned}
 E[(W^i)^r] &= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k (\eta_{\xi_i}^i)^{j-k} k!}{\lambda^k} \\
 &\quad \binom{j}{k} \binom{\xi_i - 1 + k}{k} E[W^{r-j}] \\
 &+ (1 - \rho_i) \sum_{m=0}^{\xi_i - 1} e^{-\lambda(\eta_m^i + (m - \xi_i)a_i - \eta_m^i)} \\
 &\quad \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(-1)^k r k!}{\lambda^{k+1}} \binom{r-1}{k} \binom{m+k}{k} (\eta_m^i)^{r-k-1} \\
 &+ (1 - \rho_i) \sum_{m=0}^{\xi_i - 2} e^{-\lambda(\eta_m^i + (m - \xi_i)a_i - \eta_m^i)} \\
 &\quad \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(-1)^k r k!}{\lambda^{k+1}} \binom{r-1}{k} \binom{m+k}{k} (\eta_m^i)^{r-k-1} \\
 &\times \sum_{l=1}^{\xi_i - 1 - m} e^{-\rho_i l} \{ p_l (\lambda(\eta_{\xi_i}^i + (m+l-\xi_i)a_i), \\
 &\quad \lambda \eta_{m+1}^i, \dots, \lambda \eta_{m+l-1}^i) \\
 &\quad - p_l (\lambda \eta_{m+1}^i, \dots, \lambda \eta_{m+l-1}^i) \}
 \end{aligned}$$

ii) $\xi_i = 0$ 인 경우,

$$E[(W^i)^r] = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (\eta_0^i)^j E[W^{r-j}]$$

여기서, $\rho_i = \lambda a_i$ 이고, W 는 도착율이 λ 이고 상수 a_i (Lyapunov maximal exponent)를 서비스 시간으로 갖는 M/D/1 대기행렬 모형에서의 안정 대기시간이다.

다음 절에서 (max, +)-선형 대기행렬 망에서 시스템 안정 대기시간의 고차평균에 관한 결과에 확률적 순서 결과를 응용해 시스템 안정 대기시간의

특성치에 대한 상하위 범위를 도출 가능성을 살펴 보자.

3. 확률적 순서를 이용한 안정 대기 시간의 범위

시스템 안정 대기시간에 대한 시리즈 전개식 (2.4)에서 알 수 있듯이 서비스 시간분포가 특정한 형태를 가지는 경우 또는 특정한 구조를 갖는 경우 외의 시스템에서는 정리 1과 같은 간결한 표현식을 유도할 수 없다. 앞에서 언급한 바와 같이, 안정 대기시간에 대한 시리즈 전개식의 계수는 각 노드의 서비스 시간 확률변수들에 대한 함수의 다중적분 형태를 띠고 있다. 이러한 다중적분의 함수의 정확한 계산은 상당히 어렵거나 많은 시간을 필요로 한다. 이론상으론 모든 전개식의 계수들이 계산 가능하지만, 실제적인 문제에서는 컴퓨터 메모리의 제한, 시간적 제한 등의 이유로 대부분의 경우 하위 차수의 계수들만 계산 가능하다.

이러한 계산상의 어려움 때문에, 시스템 특성치의 정확한 값 대신에, 보다 쉽게 계산 가능한 범위에 대한 연구가 가치를 가진다. 지금까지의 많은 연구들이 시스템의 평균 안정 대기시간과 이들의 근사치만을 고려한 반면에, 앞서 소개한 결과에 확률적 순서(Stochastic Ordering) 결과를 응용하면 시스템 안정 대기시간의 평균은 물론 고차평균 등 다양한 특성치의 범위를 보다 쉽게 얻을 수 있다.

먼저 확률적 볼록순서(stochastic convex ordering)의 정의를 보이고, 다음으로 서로 독립인 일반 서비스 시간분포를 갖는 (max, +)-선형 시스템에서 확률적 볼록순서가 안정 대기시간에 대한 특성치의 범위를 구하는데 응용되는 정리들을 소개한다([11]).

정의 : 두 개의 확률변수 X 와 Y 가 모든 볼록 함수(convex function) $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대해 다음을 만족하면,

$$E[\phi(X)] \leq E[\phi(Y)]$$

확률변수 X 는 확률변수 Y 보다 볼록 순서(con-

vex ordering)로 작다고 하며 $X \leq_{\alpha} Y$ 로 표기한다. 이와 비슷하게, 볼록 함수 ϕ 가 증가함수이면, 두 개의 확률변수 X 와 Y 가 증가 볼록 순서(increasing convex ordering)로 작다고 하며 $X \leq_{icx} Y$ 로 표기한다. 앞의 정의로부터 $X \leq_{\alpha} Y$ 이면, $X \leq_{icx} Y$ 임을 알 수 있다.

정리 : X 를 유한 서포트(finite support)를 가지는 확률변수라고 하자. l_X 를 좌측 끝점(left endpoint), u_X 를 우측끝점(right endpoint)이라 두면, 다음의 관계가 성립한다.

$$E(X) \leq_{\alpha} X \leq_{\alpha} Z$$

여기서, $E(X)$ 는 확률변수 X 의 평균값이고, 확률변수 Z 는 다음과 같이 정의된다.

$$\Pr(Z = l_X) = \frac{u_X - E(X)}{u_X - l_X},$$

$$\Pr(Z = u_X) = \frac{E(X) - l_X}{u_X - l_X}$$

위의 정리에서 서비스 시간분포에 대한 유한 서포트 가정은 실제 (대기행렬)시스템에서 거의 모든 서비스 시간이 유한하므로 무리한 가정이 아니다.

앞 절에서 언급한 바와 같이, (max, +)-선형 대기행렬 망에서 안정 대기시간의 특성치는 확률변수들의 합과 최대값으로 표현되는 함수이다. 따라서, 안정 대기시간은 서비스 시간 확률변수에 대한 증가 볼록 함수임은 명확하다.

정리 : X_1, \dots, X_m 와 Y_1, \dots, Y_m 을 서로 독립인 확률변수라고 하자. 모든 $j(j=1, 2, \dots, m)$ 에 대해 두 확률변수가 $X_j \leq_{icx} Y_j$ 이면, 모든 증가함수이고 성분 볼록함수(componentwise convex function)인 $g(\cdot)$ 에 대해 다음을 만족한다.

$$g(X_1, \dots, X_m) \leq_{icx} g(Y_1, \dots, Y_m)$$

정리 : 두 개의 확률변수 수열 $\{X_j, j=1, 2, \dots\}$ 와

$\{Y_j, j=1, 2, \dots\}$ 는 j 가 증가함에 따라

$$X_j \xrightarrow{d} X \text{이고 } Y_j \xrightarrow{d} Y$$

임을 만족하는 수열이라고 하자. 이러한 두 수열에 대해 j 가 증가함에 따라

$$E|X_j| \rightarrow E|X| \text{이고, } E|Y_j| \rightarrow E|Y|$$

임을 만족한다고 가정하면, 모든 j 에 대해 $X_j \leq_{\alpha} Y_j$ 이면, $X \leq_{\alpha} Y$ 이다.

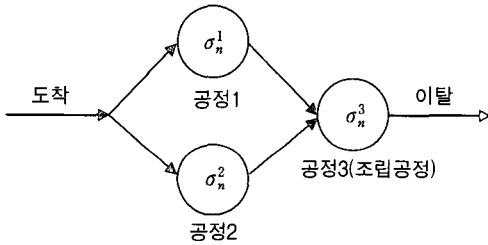
(Max, +)-선형 시스템에서 안정 대기시간의 특성치에 대한 하위범위는 각 서비스 시간분포의 평균을 서비스 시간으로 갖는 대기행렬 모형으로부터 얻을 수 있고, 상위범위는 각 서비스 시간분포에 대한 이산 확률변수 Z (discrete random variable)를 서비스 시간분포로 갖는 대기행렬 모형으로부터 얻을 수 있다. 확률적 순서를 이용한 결과는 시스템 안정 대기 시간뿐만 아니라 일시 대기시간의 분석에서도 역시 유효하다. 앞서 소개한 상수 서비스 시간을 갖는 (max, +)-선형 대기행렬 망에서 안정 대기시간의 특성치에 대한 분석결과(정리 1)를 이용하면 일반 서비스 시간분포를 갖는 (max, +)-선형 대기행렬 망에서 안정 대기시간의 특성치에 대한 하위범위는 쉽게 구할 수 있다. 그러나, 시스템 안정 대기시간의 상위범위에 대한 분석은 보다 복잡하다. 그 이유는 앞서 정의된 확률변수 Z 가 두 개의 값을 가지는 이산 확률변수이기 때문이다. 하지만, 서비스 시간분포가 두 개의 값을 가지는 이산 확률분포인 경우는 연속 확률분포인 경우보다 시리즈 전개식의 계수 $E[q_k(\dots)]$ 의 계산에 있어서 훨씬 간단하다. 그러므로, 서비스 시간 확률변수에 대한 확률적 볼록 순서 결과를 이용하면 일반적인 서비스 시간분포를 갖는 (max, +)-선형 시스템에서 대기시간의 특성치에 대한 상·하위 범위를 보다 쉽게 도출할 수 있다.

4. 예 제

앞 절에서 (max, +)-선형 대기행렬 망에서 대기

시간의 평균과 고차 평균과 같은 다양한 특성치에 대한 상하위 범위를 구하는데 확률적 순서 결과(블록 순서)가 응용 가능함을 보였다. 계산의 간편성을 위해 (max, +)-선형 시스템에서의 평균 안정 대기 시간에 대한 상하위 범위를 간단한 예제를 통해 살펴보자.

예제 1 : [그림 1]과 같은 구조를 갖는 3개의 노드로 구성된 분기/조합 형태의 대기행렬 망을 살펴보자. [그림 1]에서 $\{\sigma_n^1\}, \{\sigma_n^2\}, \{\sigma_n^3\}$ 는 노드 1, 2, 3에서 서로 독립이고 동일한 분포를 따르는 서비스 시간 확률변수의 수열이다.



[그림 1] 분리/조합형 대기행렬 망

앞서 정의한 확률행렬 A_n, B_n 는 다음과 같다.

$$A_n = \begin{bmatrix} \sigma_n^1 & -\infty & -\infty \\ -\infty & \sigma_n^2 & -\infty \\ \sigma_{n+1}^1 + \sigma_n^1 & \sigma_{n+1}^2 + \sigma_n^2 & \sigma_n^3 \end{bmatrix}$$

$$B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \max\{\sigma_n^1, \sigma_n^2\} \end{bmatrix}$$

도착시점부터 조합공정(공정 3)에서 서비스 시작 시점(조합공정에서의 대기시간 포함)까지의 대기 시간에 대해 살펴보기로 하자. 조합공정에 해당되는 확률벡터 D_n^3 (D_n 의 3번째 원소)의 하위 5개 ($n=0, 1, \dots, 4$) 값은 다음과 같이 각 노드에서의 서비스 시간 확률변수들과 두 개의 연산자(최대값과 합)의 선형 함수로 표현된다.

$$D_0^3 = \max\{\sigma_0^1, \sigma_0^2\}$$

$$D_1^3 = \max\{\sigma_0^1 + \sigma_{-1}^1, \sigma_0^2 + \sigma_{-1}^2, \sigma_{-1}^3 + \sigma_{-1}^1, \sigma_{-1}^3 + \sigma_{-1}^2\}$$

$$D_2^3 = \max\{\sigma_0^1 + \sigma_{-1}^1 + \sigma_{-2}^1, \sigma_{-1}^1 + \sigma_{-2}^1 + \sigma_{-1}^3, \sigma_0^2 + \sigma_{-1}^2 + \sigma_{-2}^2, \sigma_{-1}^2 + \sigma_{-2}^2 + \sigma_{-1}^3, \sigma_{-1}^3 + \sigma_{-2}^3 + \sigma_{-2}^1, \sigma_{-1}^3 + \sigma_{-2}^3 + \sigma_{-2}^2\}$$

$$D_3^3 = \max\{\sigma_0^1 + \sigma_{-1}^1 + \sigma_{-2}^1 + \sigma_{-3}^1, \sigma_{-1}^1 + \sigma_{-2}^1 + \sigma_{-3}^1 + \sigma_{-1}^3, \sigma_{-2}^1 + \sigma_{-3}^1 + \sigma_{-1}^3 + \sigma_{-2}^3, \sigma_0^2 + \sigma_{-1}^2 + \sigma_{-2}^2 + \sigma_{-3}^2, \sigma_{-1}^2 + \sigma_{-2}^2 + \sigma_{-3}^2 + \sigma_{-1}^3, \sigma_{-2}^2 + \sigma_{-3}^2 + \sigma_{-1}^3 + \sigma_{-2}^3, \sigma_{-2}^2 + \sigma_{-3}^2 + \sigma_{-1}^3 + \sigma_{-2}^3, \sigma_{-1}^3 + \sigma_{-2}^3 + \sigma_{-3}^3 + \sigma_{-1}^3, \sigma_{-1}^3 + \sigma_{-2}^3 + \sigma_{-3}^3 + \sigma_{-2}^3\}$$

$$D_4^3 = \max\{\sigma_0^1 + \sigma_{-1}^1 + \sigma_{-2}^1 + \sigma_{-3}^1 + \sigma_{-4}^1, \sigma_{-1}^1 + \sigma_{-2}^1 + \sigma_{-3}^1 + \sigma_{-4}^1 + \sigma_{-1}^3, \sigma_{-2}^1 + \sigma_{-3}^1 + \sigma_{-4}^1 + \sigma_{-2}^3 + \sigma_{-1}^3, \sigma_{-1}^3 + \sigma_{-2}^3 + \sigma_{-3}^3 + \sigma_{-1}^3 + \sigma_{-4}^3, \sigma_0^2 + \sigma_{-1}^2 + \sigma_{-2}^2 + \sigma_{-3}^2 + \sigma_{-4}^2, \sigma_{-1}^2 + \sigma_{-2}^2 + \sigma_{-3}^2 + \sigma_{-4}^2 + \sigma_{-1}^3, \sigma_{-2}^2 + \sigma_{-3}^2 + \sigma_{-4}^2 + \sigma_{-2}^3 + \sigma_{-1}^3, \sigma_{-1}^3 + \sigma_{-2}^3 + \sigma_{-3}^3 + \sigma_{-4}^3 + \sigma_{-1}^3, \sigma_{-1}^3 + \sigma_{-2}^3 + \sigma_{-3}^3 + \sigma_{-4}^3 + \sigma_{-2}^3\}$$

위의 표현식으로부터 전개식 계수의 차수가 증가함에 따라 확률벡터 D_n^3 의 복잡성도 증가함을 알 수 있다. 이러한 이유로 서비스 시간분포가 특정 분포인 경우 외에는 다중적분의 어려움 때문에 전개식 계수의 계산이 매우 복잡해진다. 계산의 편리성을 위해 각 노드의 서비스 시간분포가 다음과 같은 이산분포를 따른다고 가정하자.

$$\sigma_n^1 = \begin{cases} 2 & w.p. 0.5 \\ 4 & w.p. 0.5 \end{cases}, \quad \sigma_n^2 = \begin{cases} 3 & w.p. 0.5 \\ 5 & w.p. 0.5 \end{cases}$$

$$\sigma_n^3 = \begin{cases} 1 & w.p. 0.5 \\ 6 & w.p. 0.5 \end{cases}$$

<표 1>은 확률벡터 D_n^3 와 다항함수 $p_k(\dots)$ 의 정의로부터 얻은 시스템 평균 안정 대기시간에 대한 시리즈 전개식의 하위 5개 계수 $E[p_k(\dots)](k=1, 2, \dots, 5)$ 와 Monte Carlo 모의실험을 통한 계수 값을 나타낸다. 전개식 계수의 정확한 값과 모의실험 값이 상당히 근접해 있음을 알 수 있다.

<표 1> $E(p_n(\dots))$ 의 수치 예

	정확한 값	모의실험 값
$E[p_1(\dots)]$	4.2500	4.2516
$E[p_2(\dots)]$	13.3437	13.3066
$E[p_3(\dots)]$	50.1334	50.1348
$E[p_4(\dots)]$	185.5808	187.3239
$E[p_5(\dots)]$	723.1579	731.6316

모의실험을 통한 전개식 계수의 계산이 가능함을 보이는 이유는 전개식 차수의 증가에 따라 증가하는 계수 계산의 복잡성을 극복하기 위한 방법의 일환으로 모의실험 방법을 이용할 수 있음을 보이기 위함이다. 즉, 보다 많은 계수의 계산을 위해 확률벡터 D_n^i 과 같은 확률변수의 표현식을 심볼릭(symbolic)하게 생성하고 (max, +)-대수의 연산(최대값과 합)을 처리할 수 있는 컴퓨터 프로그램 알고리즘의 개발을 통해 모의실험 방법을 이용하면 보다 많은 전개식의 (고차)계수를 계산할 수 있다.

따라서, 일반 서비스 시간분포를 갖는 시스템에 있어서 보다 쉽게 구할 수 있는 안정 대기시간의 특성치에 대한 범위의 도출이 의미를 갖는다고 하겠다. 다음으로 앞서 언급한 확률적 순서 결과가 시스템 안정 대기시간의 특성치에 대한 상하위 범위의 도출에 응용 가능함을 예제를 통해 살펴보자.

예제 2: 예제 1에서 서비스 시간분포를 노드 1에서는 범위 [2, 4], 노드 2에서는 범위 [3, 5], 노드 3에서는 범위 [1, 6]인 균등분포(uniform distribution)를 따른다고 가정하자. 이 경

우 각 노드의 평균 서비스 시간은 3, 4, 3.5이며, 각 노드의 서비스 시간에 상응하는 이산 확률변수 $Z_j(j=1, 2, 3)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$Z_1 = \begin{cases} 2 & w.p. 0.5 \\ 4 & w.p. 0.5 \end{cases}, \quad Z_2 = \begin{cases} 3 & w.p. 0.5 \\ 5 & w.p. 0.5 \end{cases}$$

$$Z_3 = \begin{cases} 1 & w.p. 0.5 \\ 6 & w.p. 0.5 \end{cases}.$$

다음 <표 2>은 도착시점부터 조립공정(공정 3)에서 가공 시작시점까지의 평균 안정 대기시간 $E(W^3)$ 에 대한 상하위 범위와 모의실험 결과를 보여준다. 평균 안정 대기시간에 대한 하위 범위는 앞선 결과(정리 1에서 $\epsilon_0=0$ 인 경우)를 이용하면 다음과 같다.

$$E[(W^3)] = \frac{a_3 \rho_3}{2(1-\rho_3)} + a_3.$$

다시 말하면, 하위범위는 상수 서비스 시간 $a_3=4$ 를 갖는 M/D/1 시스템의 평균 대기시간에 서비스 시간($a_3=4$)을 더한 형태이다. 상위범위는 앞의 예제에서와 같이 시리즈 전개식의 하위 5개의 계수로부터 구한 결과이다.

교통밀도가 낮은 경우는 전개식의 하위 몇 개의 계수만으로 평균 안정 대기시간에 대한 상·하위 범위를 구할 수 있으며, 이러한 범위가 상당히 근접해있음을 <표 2>로부터 알 수 있다. 교통밀도가 높은 경우에도 하위범위는 모의실험 결과와 상당히 근접해 있는 반면에, 상위범위는 전개식의 하위 5개 계수만으로 부족함을 알 수 있다(하위 7개의 계수도 부족 하였음). 앞서 언급한 바와 같이 확률벡터 $D_n^3(n=6, 7, \dots)$ 의 생성과 (max, +)-대수의 처리가 가능한 컴퓨터 프로그래밍과 모의실험을 통해 보다 많은 계수의 계산이 가능하다면, 계수의 차수를 증가시키면서 상위범위의 값이 크게 변화하지 않을 때의 값을 상위범위로 선택하면 교통밀도가 높은 경우에도 상위범위를 구할 수 있다.

〈표 2〉 $E(W^3)$ 의 상하위 범위 수치 예

교통밀도	하위 범위	모의실험	상위 범위
0.1	4.2222	4.2914 ± 0.0913	4.6188
0.2	4.5000	4.6470 ± 0.0876	5.0702
0.3	4.8571	5.0921 ± 0.0798	5.6337
0.4	5.3333	5.6906 ± 0.0913	6.3441
0.5	6.0000	6.5946 ± 0.2024	7.2427
0.6	7.0000	7.5694 ± 0.2262	8.3782
0.7	8.6667	9.4502 ± 0.286	9.8057
0.8	12.0000	12.5061 ± 0.0913	11.5875
0.9	22.0000	22.5172 ± 0.41576	13.7924

본 예제에서 균등 서비스 시간분포를 갖는 분기/접합형 대기행렬 망을 다루었다. 대기행렬 망에 관한 기존 연구는 직렬구조와 같은 특정 구조를 가정하거나, 상수 또는 지수 서비스 시간분포를 갖는 망을 가정한다. 본 연구에서 소개한 확률적 순서를 이용한 범위와 기존 연구결과와의 정확도를 비교할 만한 연구가 아직은 되어있지 않다. 상수 서비스 시간을 갖는 망에서 대기시간의 특성치에 대한 결과는 정리 1과 같은 결과를 이미 알고 있으며, 지수 서비스 시간을 갖는 대기행렬 망에서 대기시간의 특성치에 대한 범위에는 앞서 소개한 확률적 순서를 응용할 수 없다. 그 이유는 지수분포는 앞서 가정한 유한 서포트(finite support) 서비스 시간분포의 가정을 만족하지 못하기 때문이다. 더욱이, 확률적 순서를 이용한 범위는 평균과 고차평균과 같은 다양한 안정 대기시간의 특성치에 대한 결과에 응용 가능하다.

5. 결 론

본 연구에서는 하나의 포아송 도착과정을 가지고 일반 서비스 시간분포를 갖는 (max, +)-선형 대기행렬 망에서 안정 대기시간의 특성치에 대한 상하위 범위를 확률적 순서를 이용해 구할 수 있음을 보였다. 유한 서포트 서비스 시간 확률변수에 대한 확률적 순서 결과에 의하면, 일반 서비스 시간분포를 갖는 (max, +)-선형 대기행렬 망에서 대기시간

특성치의 하위범위는 평균 서비스 시간을 서비스 시간으로 갖는 시스템으로부터, 상위범위는 두 개의 값을 가지는 이산 서비스 확률분포를 따르는 시스템으로부터 얻을 수 있다. 일반적으로 확률적 순서 결과의 응용은 기존의 연구보다 응용이 쉽고 많은 계산을 줄일 수 있지만, 여전히 많은 계산을 필요로 한다. 비록 예제를 통해 모든 교통밀도 구간에 대한 범위를 구하지는 못하였지만, 확률적 순서를 이용해 대기시간의 상하위 범위를 구할 수 있음을 보였다. 교통밀도가 낮은 경우에는 전개식의 하위 몇 개의 계수만으로 평균 안정 대기시간의 상하위 범위를 구할 수 있고, 교통밀도가 높은 경우에도 하위범위는 상대적으로 좋은 성능을 보여준 반면, 상위범위는 보다 많은 전개식 계수의 계산이 필요함을 알았다. 보다 많은 시리즈 전개식 계수의 도출을 위해 확률벡터 D_n^i 를 보다 일반적으로 생성/처리할 수 있는 방법에 대한 연구와 보다 나은 계산 알고리즘에 관한 연구가 병행되어야 할 것이다.

또한, 일반 서비스 시간분포를 갖는 (max, +)-선형 시스템의 안정 대기시간의 특성치에 대한 범위와 함께 근사치에 대한 연구도 의미가 있을 것이다. 예를 들면, G/G/1 시스템에서 시스템 평균 안정 대기시간을 지수 서비스 시간분포를 갖는 시스템의 대기시간과 상수 서비스 시간을 갖는 시스템의 대기시간을 교통밀도로 보정하여 구하는 방법인 KLB-근사치(two-moment approximation, Tijms[12]) 방법과 비슷한 방법으로 앞선 연구 결과들을 응용하여 일반 서비스 시간분포를 갖는 (max, +)-선형 대기행렬 망에서 대기시간의 특성치에 대한 근사치를 구할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

- [1] Ayhan, H. and D.W. Seo, "Laplace Transform and Moments of Waiting Times in Poisson Driven (Max,+)-Linear Systems," *Queueing Systems*, Vol.37, No.4(2001), pp. 405-438.

- [2] Ayhan, H. and D.W. Seo, "Characteristics of Transient and Stationary Waiting Times in Poisson Driven (Max, +) Linear Systems," *Proceedings of the IFAC Symposium on System Structure and Control*, (2001), pp. 227-234.
- [3] Ayhan, H. and D.W. Seo, "Tail Probability of Transient and Stationary Waiting Times in (Max,+)-Linear Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.47, No.1 (2002), pp.151-157.
- [4] Baccelli, F., G. Cohen, G.J. Olsder, and J-P. Quadrat, *Synchronization and Linearity : An Algebra for Discrete Event Systems*, John Wiley & Sons, 1992.
- [5] Baccelli, F., S. Hasenfuss, and V. Schmidt, "Transient and Stationary Waiting Times in (Max, +) Linear Systems with Poisson Input," *Queueing Systems*, Vol.26(1997), pp. 301-342.
- [6] Baccelli, F., S. Hasenfuss, and V. Schmidt, "Expansions for Steady State Characteristics in (Max,+) Linear Systems," *Stochastic Models*, Vol.14(1998), pp.1-24.
- [7] Baccelli, F. and V. Schmidt, "Taylor Series Expansions for Poisson Driven (Max, +) Linear Systems," *Annals of Applied Probability*, Vol.6, No.1(1996), pp.138-185.
- [8] Hasenfuss, S., *Performance Analysis of (Max, +)-Linear Systems via Taylor Series Expansions*, PhD thesis, University of Ulm, 1998.
- [9] Nelson, R. and A.N. Tantawi, "Approximate Analysis of Fork/Join Synchronization in Parallel Queues," *IEEE Transactions on Computers*, Vol.37, No.6(1988), pp.739-743.
- [10] Seidel, W., K.V. Kocemba, and K. Mitreiter, "On a Taylor Series Expansion for Waiting Times in Tandem Queues : an Algorithm for Calculating the Coefficients and an Investigation of the Approximation error," *Performance Evaluation*, Vol.38(1999), pp.153-173.
- [11] Shaked, M. and J.G. Shanthikumar, *Stochastic Orders and Their Applications*, Academic Press, 1994.
- [12] Henk, C., Tijms, *Stochastic Models : An algorithmic Approach*, Wiley, 1994