

섭동법을 이용한 부유 탄성체의 동역학 해석

Dynamic Analysis of Floating Flexible Body Using Perturbation Method

곽 문 규† · 성 관 제*

Moon K. Kwak and Kwan Jae Seong

(2004년 10월 26일 접수 : 2004년 11월 20일 심사완료)

Key Words : Floating Flexible Body(부유탄성체), Dynamic Analysis(동역학해석), Perturbation Method(섭동법)

ABSTRACT

This paper is concerned with the application of perturbation method to the dynamic analysis of floating flexible body. In dealing with the dynamics of free-floating body, the rigid-body motions and elastic vibrations are analyzed separately. However, the rigid-body motions cause vibrations and elastic vibrations also affect rigid-body motions in turn, which indicates that the rigid-body motions and elastic vibrations are coupled in nature. The resulting equations of motion are hybrid and nonlinear. We can discretize the equations of motion by means of admissible functions but still we have to cope with nonlinear equations. In the previous paper, we proposed the use of perturbation method to the coupled equations of motion and derived zero-order and first-order equations of motion. The derivation process was lengthy and tedious. Hence, in this paper, we propose a new approach to the same problem by applying the perturbation method to the Lagrange's equations, thus providing a systematic approach to the addressed problem. Theoretical derivations show the efficacy of the proposed method.

1. 서 론

항공기나 우주구조물, 선박, 잠수함과 같은 구조물은 지지되어 있지 않기 때문에 부유 탄성체로 간주할 수 있다.⁽¹⁾ 이런 부유 탄성체가 움직이는 경우 일반적으로 강체운동과 탄성진동을 동시에 경험하게 된다. 강체운동은 고유진동수가 0인 모드로 생각할 수 있는데 탄성체 운동의 고유진동수가 아주 높다고 가정하면 강체운동과 탄성체운동, 즉 진동을 분리해서 해석할 수 있다. 그러나 만일 탄성체가 매우 유연한 경우에는 강체운동과 탄성진동간에 간섭이 일어난다.

이런 문제에 대해 운동방정식을 유도하면 Hybrid, 즉 상미분방정식과 편미분방정식이 조합된 형태로 나타나게 된다.⁽²⁾ 또한 강체운동의 영향으로 운동방정식은 비선형이다. 상미분방정식과 편미분방정식이 뒤섞인 형태를 수치적으로 계산한다는 것은 용이하지 않기 때문에 일반적으로 편미분방정식의 변수인 탄성변위를 허용함수와 가정모드법을 도입하여 이산화한다.⁽³⁾ 이렇게 이산화하였을 경우 운동방정식은 비선형의 상미분방정식 형태를 가지게 된다.^(4,5) 비선형 운동방정식은 구조물의 조종(maneuvering) 또는 제어기 설계에 적합하지 못하다. 따라서 섭동법을 적용하여 비선형의 강체운동방정식과 섭동된 강체운동과 탄성진동이 연성된 선형 운동방정식으로 분리하여 해석하는 시도가 있어왔다.⁽⁴⁻⁶⁾ Meirovitch and Tuzcu⁽⁷⁾는 항공기를 이와 같은 방법을 이용해 응답을 계산하였다. 곽⁽⁸⁾은 섭동법의 타당성을 이차원 양단 경계조건이 자유인 보를 고려하여 입증하였다. 동

† 책임저자 : 정회원, 동국대학교 기계공학과
E-mail : kwakm@dgu.ac.kr
Tel : (02) 2260-3705, Fax : (02) 2263-9379
* 동국대학교 기계공학과

역학에 섭동법을 적용하는 연구⁽⁴⁻⁸⁾에서 먼저 비선형 운동방정식을 유도한 다음 변수에 대해 영차와 일차의 섭동법을 적용하여 운동방정식을 분리해내는 방법을 사용하였다. 그러나 이 방법을 사용하는 경우 그 유도과정이 매우 복잡하여 유도된 운동방정식의 검증에 많은 주의를 기울여야 한다. 이 식은 또한 컴퓨터 프로그래밍에 적합하지 않음을 쉽게 알 수 있다. 따라서 이 연구에서는 좀더 체계화된 접근 방법으로 영차의 강제운동방정식과 일차의 섭동된 강제운동과 진동방정식을 유도하는 방법을 개발하였다. 이 연구에서 고려한 방법은 운동방정식의 유도에 사용되는 라그랑지 방정식에 대해 섭동법을 적용하는 것이다. 이와 같은 방법은 이전 연구에서 전혀 다루어지지 않은 주제이며 이 연구가 최초로 시도한 방법이다.

이 연구에서는 먼저 섭동법을 일반 포텐셜 함수에 적용하는 경우의 수학 정식화 과정을 살펴보고 이를 바탕으로 라그랑지 방정식에 섭동법을 적용하는 과정을 조사하였다. 유도된 섭동 라그랑지 방정식의 타당성을 입증하기 위해 곽의 연구⁽⁸⁾에서 고려한 2차원 평면 자유-자유보를 고려하여 이 연구의 결과와 비교하였는데 두 연구 결과가 모두 동일함을 발견할 수 있었다. 또한 섭동 라그랑지 방정식을 이용하여 유도된 행렬운동방정식이 행렬 연산 형태로 나타나기 때문에 Matlab과 같은 수치계산 프로그램에 적합함을 발견할 수 있었다. 이 연구에서 얻어진 결과는 차후 강제운동과 연성되는 구조물의 동역학 해석에 유용하게 사용될 수 있을 것으로 예상된다.

2. 섭동법과 라그랑지 방정식

섭동법을 라그랑지 방정식에 적용하기 전에 먼저 변수 x 에 대한 일반적인 포텐셜 함수, $U(x)$ 를 고려해보자. 만일 $x = x_0 + \epsilon x_1$ 로 일차의 섭동법을 적용한다면 영차의 변수나 일차의 변수에 대해 포텐셜 함수 U 의 변화율이 동일하다고 말할 수 있다. 따라서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x} \quad (1)$$

만일 포텐셜, $U = U_0 + \epsilon U_1$ 으로 표현된다면

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\partial(U_0 + \epsilon U_1)}{\partial x_0} = \frac{\partial U_0}{\partial x_0} + \epsilon \frac{\partial U_1}{\partial x_0} \quad (2)$$

와 같이 표현할 수 있다. 그러므로 원래 변수 x 에 대한 포텐셜 함수, U 의 변화율은 영차의 변수에 대한 영차의 포텐셜 변화율과 영차의 변수에 대한 일차의 포텐셜 변화율로 나타남을 알 수 있다. 이와 같은 성질을 이용하여 라그랑지 방정식에 섭동법을 도입해보자.

라그랑지 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = Q \quad (3)$$

여기서 $L = T - V$ 이며 T, V 는 각각 운동에너지와 위치에너지를 나타낸다. 앞에서 언급한 변화율에 대한 섭동 관계식을 이용하고, $L = L_0 + \epsilon L_1$, $Q = Q_0 + \epsilon Q_1$ 이라고 한다면 다음과 같은 영차의 라그랑지 방정식과 일차의 라그랑지 방정식이 유도됨을 알 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_0} - \frac{\partial L_0}{\partial x_0} = Q_0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_0} - \frac{\partial L_1}{\partial x_0} = Q_1 \quad (4)$$

여기서 $L_0 = T_0 - V_0$, $L_1 = T_1 - V_1$ 이 된다.

공간상에서 자유롭게 운동하는 탄성체에 대해서 일반적으로 운동에너지식과 위치에너지식이 다음과 같이 표현된다.

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}^T M(x) \dot{x}, \quad V = \frac{1}{2} x^T K x \quad (5)$$

$x = x_0 + \epsilon x_1$ 와 $M(x) = M_0(x_0) + \epsilon M_1(x_0, x_1)$ 를 식 (5)에 대입할 경우, 운동에너지와 위치에너지는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} T &= T_0(x_0) + \epsilon T_1(x_0, x_1) \\ V &= V_0(x_0) + \epsilon V_1(x_0, x_1) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 영차와 일차의 운동에너지, 영차와 일차의 위치에너지가 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} \dot{x}_0^T M_0(x_0) \dot{x}_0 \\ T_1 &= \dot{x}_0^T M_0(x_0) \dot{x}_1 + \frac{1}{2} \dot{x}_0^T M_1(x_0, x_1) \dot{x}_1 \\ V_0 &= \frac{1}{2} x_0^T K x_0, \quad V_1 = x_0^T K x_1 \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)을 라그랑지 방정식 (4)에 대입하면 다음과 같이 영차의 운동방정식과 일차의 운동방정식이 유도된다.

$$M_0 \ddot{x}_0 + \frac{dM_0}{dt} \dot{x}_0 - \frac{1}{2} \dot{x}_0^T \frac{dM_0}{dx_0} \dot{x}_0 + Kx_0 = Q_0 \quad (8)$$

$$M_0 \ddot{x}_1 + \frac{dM_0}{dt} \dot{x}_1 + M_1 \ddot{x}_0 + \frac{dM_1}{dt} \dot{x}_0 - \dot{x}_0^T \frac{dM_0}{dx_0} \dot{x}_1 - \frac{1}{2} \dot{x}_0^T \frac{\partial M_1}{\partial x_0} \dot{x}_0 + Kx_1 = Q_1 \quad (9)$$

곽의 연구⁽⁸⁾에서는 일반적인 라그랑지 방정식을 이용해 운동방정식을 유도한 다음 섭동법을 적용해 영차와 일차의 운동방정식을 유도하였다. 따라서 그 과정이 매우 복잡하고 오류를 일으킬 가능성이 있으나 식 (8)과 (9)로 나타내는 방정식은 시작단계부터 영차와 일차의 운동방정식이 분리되기 때문에 좀더 체계적인 정식화 과정이 가능하다.

3. 상태 방정식

식 (8)과 (9)로 나타내는 방정식은 수치계산이나 제어기 설계에 적합하지 못하다. 식 (8)과 (9)를 상태방정식으로 전환하여 계산이 이루어지는 과정을 살펴보자. 만일 $z_0 = [x_0^T \dot{x}_0^T]^T$ 라고 한다면 식 (8)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{z}_0 = Az_0 + \delta_0 + BQ_0 \quad (10)$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_0^{-1}K & -M_0^{-1} \frac{dM_0}{dt} \end{bmatrix}$$

$$\delta_0 = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{2} M_0^{-1} \dot{x}_0^T \frac{\partial M_0}{\partial x_0} \dot{x}_0 \end{matrix} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ M_0^{-1} \end{matrix} \right\} \quad (11)$$

또한 $z_1 = [x_1^T \dot{x}_1^T]^T$ 라고 놓으면 식 (9)는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{z}_1 = Az_1 + \delta_1 + BQ_1 \quad (12)$$

여기서

$$\delta_1 = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ -\delta_1 \end{matrix} \right\} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \delta_1 = & -M_0^{-1}M_1 \ddot{x}_0 - M_0^{-1} \frac{dM_1}{dt} \dot{x}_0 \\ & + M_0^{-1} \dot{x}_0^T \frac{\partial M_0}{\partial x_0} \dot{x}_1 + \frac{1}{2} M_0^{-1} \dot{x}_0^T \frac{\partial M_1}{\partial x_0} \dot{x}_0 \end{aligned} \quad (14)$$

만일 대상 시스템이 항공기와 같은 구조물이라면 조종제어는 식 (10)을 기반으로 설계될 수 있다. 또한 식 (12)를 이용해 섭동 강체운동과 진동을 억제하는 제어기를 설계할 수 있다. 수치모사는 영차의 상태 방정식 (10)을 이용해 먼저 영차의 응답을 계산하고 그 결과를 일차의 상태방정식 (12)에 대입하여 일차의 응답을 계산한다. 최종적인 응답은 두 응답을 합하여 계산한다.

4. 자유-자유보의 운동방정식

이 연구에서 제안한 방법의 효용성을 입증하기 위해 곽의 연구⁽⁸⁾에서 다룬 문제를 고려해보자. Fig. 1은 2차원 평면상에서 강체운동과 탄성진동을 동시에 경험하는 양단의 경계조건이 자유인 보⁽⁸⁾를 나타낸다. 여기서 X 와 Y 는 절대 좌표를 의미하며 x, y 는 자유-자유보의 국부좌표를 나타낸다. R 은 절대좌표계의 원점 O 로부터 자유-자유보의 국부좌표원점 o 까지의 위치벡터를 나타내며, θ 는 절대좌표계에 대한 국부좌표계의 강체회전을 나타낸다. $u(x, t)$ 는 y 방향으로의 탄성변위를 가리킨다.

동적에너지를 구하기 위해서는 보의 임의의 점에서 속도벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \vec{R}_p = & (\dot{R}_x - x\dot{\theta}s\theta - \dot{u}s\theta - u\dot{\theta}c\theta)\vec{i} \\ & + (\dot{R}_y + x\dot{\theta}c\theta + \dot{u}c\theta - u\dot{\theta}s\theta)\vec{j} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 \vec{i}, \vec{j} 는 국부좌표계의 단위벡터를 나타내며 $s\theta = \sin\theta$, $c\theta = \cos\theta$ 를 각각 나타낸다. 연속함수인 탄성변위에 대해 운동방정식을 유도하면 편미분방정식 형태로 나타나기 때문에 이 연구에서는 탄성변위

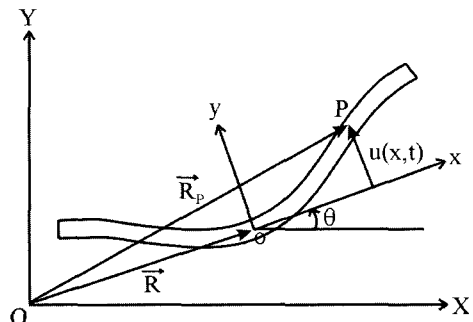


Fig. 1 Free-free flexible beam in space

를 이산화하였다. 허용함수를 이용하여 이산화하면 $u(x,t) = \Phi(x)q(t)$ 와 같이 쓸 수 있으며 $\Phi(x) = [\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n]$ 이고 $q = [q_1 q_2 \dots q_n]^T$ 이다.

따라서 운동에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$T = \frac{1}{2} \int \bar{m} \dot{\bar{R}}_p \cdot \dot{\bar{R}}_p dx \quad (16)$$

여기서 \bar{m} 은 단위길이당 질량이다. 식 (15)를 이용하면 식 (16)은 다시 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} x^T M(x) x \quad (17)$$

여기서 $x = [R_x \ R_y \ \theta \ q^T]^T$ 이며

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & M_{13} & -s\theta\bar{\Phi} \\ 0 & m & M_{23} & c\theta\bar{\Phi} \\ M_{13} & M_{23} & I_o + q^T M q & \bar{\Phi} \\ -s\theta\bar{\Phi}^T & c\theta\bar{\Phi}^T & \bar{\Phi}^T & M_b \end{bmatrix} \quad (18)$$

여기서 $M_{13} = -s\theta S_o - c\theta\bar{\Phi}q$, $M_{23} = c\theta S_o - s\theta\bar{\Phi}q$ 이다. 여기서 m 은 보의 전체 질량이 되며 S_o 와 I_o 는 각각 $S_o = \int \bar{m} x dx$, $I_o = \int \bar{m} x^2 dx$ 로 일차와 이차의 질량관성모멘트를 나타낸다. 또한 $M_b = \int \bar{m} \phi^T \phi dx$ 는 보의 질량행렬을 나타내며 $\bar{\Phi} = \int \bar{m} \Phi dx$, $\bar{\Phi} = \int \bar{m} x \Phi dx$ 이다. 만일 국부좌표계의 원점 o 가 질량 중심에 위치한다면 $S_o = 0$ 가 된다. 탄성에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$V = \frac{1}{2} \int EI \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} q^T K_b q = \frac{1}{2} x^T K x \quad (19)$$

여기서 $K_b = \int EI \Phi^T \Phi dx$ 이며

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0_{1 \times n} \\ 0 & 0 & 0 & 0_{1 \times n} \\ 0 & 0 & 0 & 0_{1 \times n} \\ 0_{1 \times n} & 0_{1 \times n} & 0_{1 \times n} & K_b \end{bmatrix} \quad (20)$$

이다. 먼저 x 를 영차와 일차의 벡터로 나누어 보자.

$$x_0 = [R_{x0} \ R_{y0} \ \theta_0 \ p^T]^T, \quad x_1 = [R_{x1} \ R_{y1} \ \theta_1 \ q^T]^T \quad (21)$$

여기서 p 는 이미 작은 값으로 정의되어진 q 에 대해 단순히 계산을 위해 도입한 변수이다. 차후 계산에서는 $p = \dot{p} = \ddot{p} = 0$ 로 처리한다. 다음으로 질량행렬을 영차와 일차의 질량행렬로 나누어 보자.

$$M_0 = \begin{bmatrix} m & 0 & -s\theta_0 S_o & -s\theta_0 \bar{\Phi} \\ 0 & m & c\theta_0 S_o & c\theta_0 \bar{\Phi} \\ -s\theta_0 S_o & c\theta_0 S_o & I_o & \bar{\Phi} \\ -s\theta_0 \bar{\Phi}^T & c\theta_0 \bar{\Phi}^T & \bar{\Phi}^T & M_b \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & M_{13}^1 & -c\theta_0 \theta_1 \bar{\Phi} \\ 0 & 0 & M_{23}^1 & -s\theta_0 \theta_1 \bar{\Phi} \\ M_{13}^1 & M_{23}^1 & 0 & 0_{1 \times n} \\ -c\theta_0 \theta_1 \bar{\Phi}^T & -s\theta_0 \theta_1 \bar{\Phi}^T & 0_{n \times 1} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\frac{dM_0}{dt} = -\dot{\theta}_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & c\theta_0 S_o & c\theta_0 \bar{\Phi} \\ 0 & 0 & s\theta_0 S_o & s\theta_0 \bar{\Phi} \\ c\theta_0 S_o & s\theta_0 S_o & 0 & 0_{1 \times n} \\ c\theta_0 \bar{\Phi}^T & s\theta_0 \bar{\Phi}^T & 0_{n \times 1} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\frac{dM_1}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{M}_{13}^1 & \dot{M}_{14}^1 \\ 0 & 0 & \dot{M}_{23}^1 & \dot{M}_{24}^1 \\ \dot{M}_{13}^1 & \dot{M}_{23}^1 & 0 & 0_{1 \times n} \\ (\dot{M}_{14}^1)^T & (\dot{M}_{24}^1)^T & 0_{n \times 1} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (25)$$

여기서

$$\begin{aligned} M_{13}^1 &= -c\theta_0 \theta_1 S_o - c\theta_0 \bar{\Phi} q, \quad M_{23}^1 = -s\theta_0 \theta_1 S_o - s\theta_0 \bar{\Phi} q \\ \dot{M}_{13}^1 &= (s\theta_0 \dot{\theta}_0 \theta_1 - c\theta_0 \dot{\theta}_1) S_o + s\theta_0 \dot{\theta}_0 \bar{\Phi} q - c\theta_0 \bar{\Phi} \dot{q} \\ \dot{M}_{23}^1 &= -(c\theta_0 \dot{\theta}_0 \theta_1 + s\theta_0 \dot{\theta}_1) S_o - c\theta_0 \dot{\theta}_0 \bar{\Phi} q - s\theta_0 \bar{\Phi} \dot{q} \\ \dot{M}_{14}^1 &= (s\theta_0 \dot{\theta}_0 \theta_1 - c\theta_0 \dot{\theta}_1) \bar{\Phi}^T \\ \dot{M}_{24}^1 &= -(c\theta_0 \dot{\theta}_0 \theta_1 + s\theta_0 \dot{\theta}_1) \bar{\Phi}^T \end{aligned} \quad (26)$$

이다.

$$\dot{x}_0^T \frac{dM_0}{dx_0} \dot{x}_0 = \begin{bmatrix} \dot{x}_0^T \frac{\partial M_0}{\partial R_{x0}} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_0^T \frac{\partial M_0}{\partial R_{y0}} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_0^T \frac{\partial M_0}{\partial \theta_0} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_0^T \frac{\partial M_0}{\partial p_1} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_0^T \frac{\partial M_0}{\partial p_2} \dot{x}_0 \\ \vdots \\ \dot{x}_0^T \frac{\partial M_0}{\partial p_n} \dot{x}_0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

그런데

$$\frac{\partial M_0}{\partial R_{r0}} = \frac{\partial M_0}{\partial R_{y0}} = \frac{\partial M_0}{\partial p_1} = \dots = \frac{\partial M_0}{\partial p_n} = 0_{(3+n) \times (3+n)}$$

$$\frac{\partial M_0}{\partial \theta_0} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & c\theta_0 S_o & c\theta_0 \bar{\Phi} \\ 0 & 0 & s\theta_0 S_o & s\theta_0 \bar{\Phi} \\ c\theta_0 S_o & s\theta_0 S_o & 0 & 0_{1 \times n} \\ c\theta_0 \bar{\Phi}^T & s\theta_0 \bar{\Phi}^T & 0_{n \times 1} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (28)$$

를 이용하면

$$\dot{x}_0^T \frac{dM_0}{dx_0} \dot{x}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (c\theta_0 \dot{R}_{r0} + s\theta_0 \dot{R}_{y0}) \dot{\theta}_0 S_o \\ 0_{n \times 1} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

이와 같은 방식으로 $\dot{x}_0^T \frac{dM_0}{dx_0} \dot{x}_1$, $\dot{x}_0^T \frac{\partial M_1}{\partial x_0} \dot{x}_0$ 도 유도할 수 있다.

식 (8)에 식 (22), (24), (29)를 대입하고 영차 변위의 성질 (21)을 이용하면 다음과 같은 영차의 행렬 운동방정식이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} m & 0 & -s\theta_0 S_o \\ 0 & m & c\theta_0 S_o \\ -s\theta_0 S_o & c\theta_0 S_o & I_o \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{R}_{r0} \\ \ddot{R}_{y0} \\ \ddot{\theta}_0 \end{Bmatrix} - \dot{\theta}_0 S_o \begin{bmatrix} 0 & 0 & c\theta_0 \\ 0 & 0 & s\theta_0 \\ c\theta_0 & s\theta_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{R}_{r0} \\ \dot{R}_{y0} \\ \dot{\theta}_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (c\theta_0 \dot{R}_{r0} + s\theta_0 \dot{R}_{y0}) \dot{\theta}_0 S_o \end{Bmatrix} = Q_0 \quad (30)$$

식 (30)은 곽⁽³¹⁾의 연구에서 얻어진 영차의 운동방정식과 동일하다. 식 (9)에 식 (23), (25), (26)과 추가로 유도되는 식을 대입하면 다음과 같은 일차의 행렬 운동방정식이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} m & 0 & -s\theta_0 S_o & -s\theta_0 \bar{\Phi} \\ 0 & m & c\theta_0 S_o & c\theta_0 \bar{\Phi} \\ -s\theta_0 S_o & c\theta_0 S_o & I_o & \bar{\Phi} \\ -s\theta_0 \bar{\Phi}^T & c\theta_0 \bar{\Phi}^T & \bar{\Phi}^T & M_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{R}_{x1} \\ \ddot{R}_{y1} \\ \ddot{\theta}_1 \\ q \end{Bmatrix} - \dot{\theta}_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & c\theta_0 S_o & c\theta_0 \bar{\Phi} \\ 0 & 0 & s\theta_0 S_o & s\theta_0 \bar{\Phi} \\ c\theta_0 S_o & s\theta_0 S_o & 0 & 0_{n \times 1} \\ c\theta_0 \bar{\Phi}^T & s\theta_0 \bar{\Phi}^T & 0_{1 \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{R}_{x1} \\ \dot{R}_{y1} \\ \dot{\theta}_1 \\ q \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & M_{13}^1 \\ 0 & 0 & M_{23}^1 \\ M_{13}^1 & M_{23}^1 & 0 \\ -c\theta_0 \theta_1 \bar{\Phi}^T & -s\theta_0 \theta_1 \bar{\Phi}^T & 0_{1 \times n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{R}_{x0} \\ \ddot{R}_{y0} \\ \ddot{\theta}_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & M_{13}^1 \\ 0 & 0 & M_{23}^1 \\ M_{13}^1 & M_{23}^1 & 0 \\ (M_{14}^1)^T & (M_{24}^1)^T & 0_{1 \times n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{R}_{x0} \\ \dot{R}_{y0} \\ \dot{\theta}_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0_{1 \times n} \\ 0 & 0 & 0 & 0_{1 \times n} \\ 0 & 0 & 0 & 0_{1 \times n} \\ 0_{1 \times n} & 0_{1 \times n} & 0_{1 \times n} & K_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ \theta_1 \\ q \end{Bmatrix} = Q_1 \quad (31)$$

이 식을 곽⁽⁸⁾의 연구 결과와 비교해본 결과 동일함을 확인할 수 있었다.

5. 토의 및 결론

이 연구에서는 부유 탄성체의 동적 운동 해석을 구하는 방법으로 제안된 섭동법의 단점을 보완하는 새로운 접근방식을 제안하였다. 이전에 채택한 방법은 운동에너지와 위치에너지를 구한 다음 라그랑지 방정식을 이용해 운동방정식을 유도하고 여기에 섭동법을 적용하는 순서로 이루어졌다. 그러나 이 연구에서는 섭동법을 라그랑지 방정식에 적용하여 영차의 라그랑지 방정식과 일차의 라그랑지 방정식을 유도하여 유도과정을 단순하게 만드는 접근방법을 제안하였다. 이를 위해 운동에너지와 위치에너지에도 섭동법을 적용하여 영차의 에너지 항과 일차의 에너지항을 유도하였다.

영차와 일차의 라그랑지 방정식을 이용해 유도한 운동방정식은 수치해석과 제어기 설계에 보다 적합한 형태를 가지게 된다. 또한 보다 일반적인 형태로 전환하기 위해 유도된 운동방정식을 상태방정식으로 변환하는 과정을 제시하였다. 최종적인 상태방정식은 제어기 설계와 수치 모사를 통한 응답계산에 보다 적합한 것으로 판단된다. 영차의 상태방정식은 저차의 비선형 미분방정식이며 일차의 상태방정식은 영차의 항들이 외력으로 작용하고 영차의 항들의 시간변화율이 계수 행렬에 포함되는 고차의 선형 미분방정식이다. 영차의 상태방정식이 일차의 상태방정식에 비해 저차가 되는 이유는 탄성에 관한 일반변위가 이미 일차의 항으로 가정되었기 때문인데 영차의 상태방정식

에는 오직 강체운동과 관련된 항만 포함된다. 최종적인 강체 운동 응답은 영차의 응답과 일차의 응답을 합해서 구해지며 탄성에 관한 일반변위는 일차의 상태방정식의 응답에서 직접적으로 얻어진다.

이 연구에서 제안한 접근 방법의 효용성을 입증하기 위해 광의 연구⁽⁸⁾에서 고려한 이차원 부유 자유-자유보를 고려하였다. 유도된 운동방정식은 광의 연구⁽⁸⁾ 결과와 동일함을 확인하였다. 이 연구에서 제안한 접근 방식은 항공기, 선박, 우주구조물과 같이 부양 상태에 있는 구조물의 강체운동 및 진동해석에 유용하게 사용될 수 있을 것으로 판단된다.

후 기

이 연구는 동국대학교 논문게재비 지원으로 이루어졌다. 관계자 여러분께 감사드린다.

참 고 문 헌

(1) 손충열, "유체력을 고려한 보-유추 선체진동 해석", 한국소음진동공학회논문집, 제 9 권 제 1 호, 1999, pp. 206~213.

(2) Meirovitch, L., "Hybrid State Equations for Flexible Bodies in Terms of Quasi-Coordinates,"

Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 14, No. 5, 1991, pp. 1008~1013.

(3) Meirovitch, L., Computational Methods in Structural Dynamics, Sijthoff&Noordhoff, The Netherlands, 1980.

(4) Meirovitch, L. and Kwak, M. K., "Dynamics and Control of a Spacecraft with Retargeting Flexible Antennas," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 13, No. 2, April 1990, pp. 241~248.

(5) Kwak, M. K. and Meirovitch, L., "New Approach to the Maneuvering and Control of Flexible Multibody Systems," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 15, No. 6, Dec. 1992, pp. 1342~1353.

(6) Kwak, M. K., "Perturbation Method for the Eigenvalue Problem of Lightly Damped System," Journal of Sound and Vibration, Vol. 160, No. 2, Jan. 1993, pp. 351~357.

(7) Meirovitch, L. and Tuzcu, I., Integrated Approach to the Dynamics and Control of Maneuvering Flexible Aircraft, NASA/CR-2003-211748, June 2003.

(8) 광문규, "자유-자유보의 동적 해석에 대한 섭동법의 적용", 한국소음진동공학회논문집(심사중).