한국소음진동공학회논문집 제 14 권 제 12 호, pp. 1314~1321, 2004.

얇은 직사각형 외팔보의 비선형 진동현상

Nonlinear Vibration Phenomenon for the Slender Rectangular Cantilever Beam

김 명 구† · 박 철 희* · 조 종 두** · 박 창 호**

Myoung-Gu Kim, Chul-Hui Pak, Chong-Du Cho and Chang-Hao Piao

(2004년 8월 5일 접수 : 2004년 11월 20일 심사완료)

Key Words : Slender Rectangular Cantilever Beam(얇은 직사각형 외팔보), Nonlinear Inertia Term(비선형 관성항), Transverse Mode(횡모드), Harmonic Excitation(조화가진), Superharmonic Motion(고차조화운동), Subharmonic Motion(분수조화운동), Chaos(혼돈), Mode Coupling(모드연성)

ABSTRACT

The non-linear responses of a slender rectangular cantilever beam subjected to lateral harmonic base-excitation are investigated by the 2-channel FFT analyzer. Both linear and nonlinear behaviors of the cantilever beam are compared with each other. Bending mode, torsional mode, and transverse mode are coupled in such a way that the energy transfer between them are observed. Especially, superharmonic, subharmonic, and chaotic motions which result from the unstable inertia terms in the transverse mode are analyzed by the FFT analyzer. The aim is to give the explanations of the route to chaos, i.e., harmonic motion → superharmonic motion → subharmonic motion → chaos.

1. 서 론

길고 얇은 직사각형 보(beam)의 동역학적인 운동은 매우 흥미 있는 연구대상이다. 얇은 직사각형 외팔보 구조(slender rectangular cantilever beam system)는 헬리콥터에 있는 로터블레이드(helicopter rotor blade)의 운동, 가스터빈(gas turbine)의 블레이드의 회전, 비행기 날개구조 등 다른 여러 구조에서 종종 볼 수 있다. 일반적으로 보의 선형문제는 각각의 모드(mode)가 서로 독립적으로 거동을 하지만 비선형 운동에서는 보의 각각의 모드는 서로 영향을 주면서 운동을 한다. 따라서 선형 운동에 비하여 운동양상이 매우 복잡하다. 외팔보의 비선형 거동은 구조물의 안정성 문제, 모드연성(mode coupling)에 의한 진동양상의 변화가 일어난다. 보의 가진진폭이 커지면 커질수록 보의 진동형태가 선형 진동에서 비선형 진동으로 변화가 일어난다. 이 경우 선형 진동에서 무시되었던 요소들이 비선형 진동 시 보의 운동에 중요한 역할을 한다. 외팔보의 비선형 진동 시 발생하는 전단휨(shear deflection), 뒤틀림(warping), 관성항(inertia), 중력 등은 중요한 역할을 한다. 그 밖에 비선형 요소인 측면의 정적하중, 재료감쇠(material damping)가 추가적으로 작용한다. 보의 비선형 거동에 의한 현재까지 진행된 연구를 살펴보면, 이론적인 연구는 많이 되어 있으나, 상대적으로 실험적인 연구는 적었다. 이와 같은 이유는 비선형 진동현상에 대한 측정의 어려움과 외부잡음(external noise), 실험 데이터의 분석에 대한 신빙성 등의 문제가 존재하기 때문이다. 보의 비선형에 대한 연구는 Hight and King[3]이 기초조화 가진(base harmonic excitation)을 받는 얇은 직사각형 보(slender rectangular beam)의 비선형 관성항(non-linear inertia term)에 대하여 연구를 하였다. Nayfeh and Pai[1, 2]는 횡모드(transverse mode),

† 책임저자 : 정회원, 인하대학교 기계공학과
E-mail : mgkim21@hotmail.com
TEL : (032) 860-7321, FAX : (032) 868-1716
* 정회원, 인하대학교 기계공학과
** 인하대학교 기계공학과

전단, 회전관성, 재료의 비선형성에 대한 연구를 하였다. 모드연성이 존재할 때와 존재하지 않을 때 1차 공진과 2차 공진에 대하여 분석하였고 주기배증(period-doubling)의 발생, 분기(bifurcation)와 혼돈(chaos)을 설명하였다. Crespo da silva and Hodges는 높은 차수의 비선형성에 의한 모든 가능한 요소를 포함하는 회전보의 운동에 대한 미분방정식을 유도했으며 헬리콥터 로터블레이드의 운동에 이들 항목을 포함시켜 연구하였다. 본 연구는 외팔보를 횡방향으로 기초조화가진을 시켜 굽힘모드(bending mode)와 비틀림모드(torsion mode)의 에너지 전이현상과 횡모드에서 발생하는 관성항의 불안정성으로 인한 비선형 거동에 대한 연구를 하였다. 그리고 선형 이론과 비선형 이론을 서로 비교하여 비선형 진동에서만 나타나는 고차조화(superharmonic motion), 분수조화(subharmonic motion), 보의 혼돈(chaos) 현상을 분석 하였으며, 고차조화, 분수조화의 특성을 규명하고 혼돈으로 가는 경로와 혼돈 형태를 분석하였다.

2. 선형 보 이론

선형 보의 진동분석을 위한 일반적인 가정은 다음과 같다.[6]

(1) 보의 단면에서 a, b는 균일하다.

(2) 보의 재료특성은 균일성(homogeneous), 등방성(isotropic)을 갖는 탄성재료(elastic material)로 구성되어 있다.

(3) 보는 얇은 직사각형보이며, 회전관성과 전단변형은 고려하지 않는다.

(4) 단면은 항상 평면을 유지한다.

(5) 보의 자중에 의한 축 방향의 자중은 무시한다.

(6) 보의 단면에서의 전단중심은 질량중심과 일치하며, 보의 회전과 병진운동의 상호간섭은 없다.

균일한 보의 자유진동에 대한 보의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0,\ a^2=\frac{EI}{m} \tag{1}$$

보는 관성력을 가지고 있으므로 경계조건을 고유치 λ로 표시할 수 있다. 보의 고유주파수는 Hz로써 일반적으로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$f_i=\frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2}\left(\frac{EI}{m}\right)^{1/2},\ i=1,2,3,... \tag{2}$$

여기서 λ_i는 보에 적용되는 경계조건의 함수로서 무차원 변수이다.

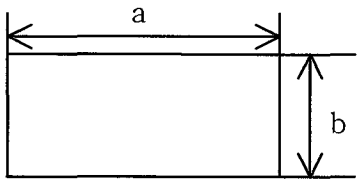
$$\lambda_i=(2i-1)\frac{\pi}{2},\quad i=1,2,3,... \tag{3}$$

L은 보의 길이이며, m은 보의 단위길이당 질량이다. E는 보의 탄성계수 이며, I는 보의 면적 관성모멘트(area moment of inertia)이다. 위 식을 이용하여 보의 물성치를 넣어 이론적인 보의 굽힘모드, 횡모드의 고유주파수를 계산하였다. 그리고 이론치와 실험치를 상호 비교하여 Table 1, Table 3에 나타냈다.

비틀림진동은 축이나 보의 국부적 비틀림의 결과로

Table 1 Comparison of the experimental and analytical values for frequency of the bending mode

Order No.	Eigen-values (λ)	Analysis values (Hz)	Experi. values (Hz)	Error (%)
1	1.8751	3.92	3.82	2.62
2	4.6941	24.53	24.25	1.15
3	7.8548	68.67	68.75	0.12
4	10.9959	134.57	136.50	1.41
5	14.1372	222.46	220.00	1.12
6	17.2787	332.32	336.00	1.09
7	20.4103	464.14	468.00	0.82
8	23.5619	617.95	625.00	1.13
9	26.7035	793.72	804.00	1.28
10	29.8451	991.46	996.00	0.45
11	32.9867	1211.17	1220.00	0.72
12	36.1283	1452.86	1460.00	0.49



a/b	1	2	4	8	
Q	0.281	0.286	0.299	0.312	0.333

발생한다. 일반적으로 단면의 형상이 원형이 아닌 축에서는 비틀림에 의한 축의 변형으로 보에 휨현상이 일어난다. 휨현상을 보정해 주는 비틀림상수 Q는 다음과 같다.

비틀림상수 Q는 다음이 계산한다.

$$Q=\frac{ca^3b^3}{a^2+b^2} \tag{4}$$

보의 비틀림 고유주파수는

$$f_i=\frac{\lambda_i}{2\pi L}\left(\frac{QG}{\mu I_p}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

Q는 비틀림상수(tosional constant)이고, G는 재료의 강성계수이며, μ는 재료의 밀도, I_p는 비틀림 축에 대한 단면의 극관성모멘트(polar moment of inertia), λ_i는 경계조건에 의해 만들어진 무차원 변수이다. 위 식을 이용하여 이론적으로 계산한 비틀림 고유주파수는 Table 2에 있다.

Table 2 Comparison of the experimental and analytical values for frequency of the torsional mode

Order No.	Eigen-values (λ)	Analysis values (Hz)	Experi. values (Hz)	Error (%)
1	1.8751	302.53	264.0	14.59
2	4.6941	757.35	788.0	3.89
3	7.8548	1267.30	1332.0	4.86
4	10.9955	1774.02	1820.0	2.53

Table 3 Comparison of the experimental and analytical values for frequency of the transverse mode

Order No.	Eigen-values (λ)	Analysis values (Hz)	Experi. values (Hz)	Error (%)
1	1.8751	24.46	20.50	19.31
2	4.6941	153.29	128.0	19.75
3	7.8548	429.22	412.0	4.18
4	10.9955	841.11	788.0	6.31
5	14.1372	1390.40	1292.0	7.62

3. 비선형 이론

3. 1 비선형 보 이론

Cusmano[7]는 직사각형 단면을 갖는 얇은 일래스티카(elastica) 외팔보의 비선형 운동에 대한 이론과 실험을 수행하였다.

Cusmano는 굽힘모드와 비틀림모드가 포함되는 결합모드(combination mode)의 존재를 발견했으며, 이 모드를 non-local mode라 정의하였다. 그리고 얇은 보에서 non-local mode는 비선형 관성항에 의해 일어난다고 설명하였다. 이론적으로 일래스티카 운동을 2 자유도계로 모델링하여 해석하였다. 일래스티카의 운동을 Fig. 1과 같이 모델링하고, 라그랑지안(Lagrange) 운동방정식을 사용하여 다음과 같이 유도하였다.

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{q}_2^{\,2}+\dot{d}^2+q_2^{\,2}\dot{q}_1^{\,2}+2q_2\dot{q}_1q_1\dot{d}-2\dot{q}_2\dot{d})$$
$$+\frac{1}{2}\hat{J}\dot{q}_1^{\,2}-\frac{1}{2}(k_1q_1^{\,2}+k_2q_2^{\,2}) \tag{6}$$

비선형 관성항은 $q_2^{\,2}\dot{q}_1^{\,2}$로 나타난다.

C. H. Pak[8, 10]은 정규모드(normal mode) 와 타원궤도모드(elliptic orbit mode)를 사용하여 Cusmano의 일래스티카에서의 비선형 현상이 관성항 때문에 일어나고, 안정성의 변화와 non-local mode의 존재를 이론적으로 증명하였다. Nayfeh는 얇은 직사각형의 외팔보에 횡방향으로 기초조화 가진을 시키는 구조의

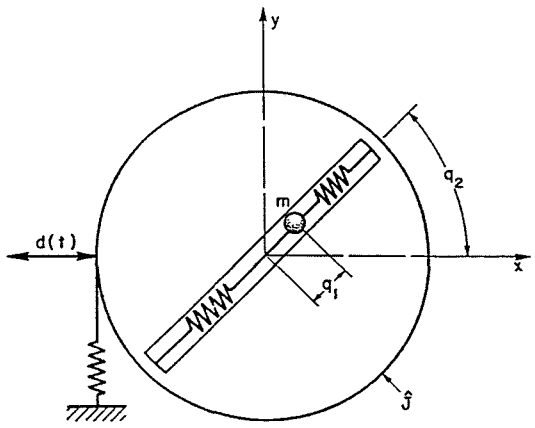


Fig. 1 Simple mechanical analogue

이론적인 해석에서 Crespo da Silva and Glynn[9]이 유도한 운동방정식을 사용하여 비선형 현상을 연구하였다.

x, y, z는 관성좌표이며, t는 시간이고, D_ξ, D_η, D_ζ는 위치 s에서의 사각단면의 주축이다. ξ, η, ζ관성축에서는 각 방향의 강성이다. $B_y = D_\xi / D_\eta$, $B_z = D_\xi / D_\eta$을 의미하며, $u(s,t)$, $v(s,t)$, 그리고 $w(s,t)$는 각각의 관성 축 x, y, z을 따라서 임의의 위치에서 보 중심의 변위성분이다. g는 중력가속도이며, 운동방정식을 유도하기 위하여 다음과 같은 가정을 도입하였다.

(1) 보의 재료특성과 단면에서 a, b는 균일하다.

(2) 보의 분포된 비틀림 모멘트의 관성항은 무시할 수 있다.

(3) 관성저항과 공기저항, 보와 지지대 사이의 상대운동에 의한 에너지의 손실은 점성계수 c에 포함시켰다.

(4) $\omega(s,t) = \bar{\omega}(s,t) + F\cos\Omega t$, $\bar{\omega}$는 기초부에 대해서 z축에서의 변위를 의미한다. 그리고, F와 Ω는 기초부 운동에서 일정한 진폭과 주파수이다.

모든 변수들은 보 L의 제한된 길이와 단위길이당 질량 m을 갖는 characteristics time $L^2\sqrt{m/D_\eta}$을 사용하여 무차원화 했다. 무차원 변수를 사용하여 Crespo da Silva의 방정식을 다음과 같이 유도하였다.

$$\ddot{v} + c\dot{v} + B_y v^{iv} = (1-B_y)[w''\int_1^s v''w''ds - w''\int_0^s v''w'ds]'$$
$$-\frac{(1-B_y)^2}{B_y}[w''\int_0^s\int_1^s v''w''dsds]'' - B_y[v'(v'v'' + w'w'')']'$$
$$-\frac{1}{2}\left\{v'\int_1^s[\int_0^s (v'^2 + w'^2)ds]ds\right\}''$$
$$+[v''(s-1) + v']\frac{L^3}{D_\eta}mg \qquad (7)$$

$$\ddot{w} + c\dot{w} + w^{iv} = -(1-B_y)[v''\int_1^s v''w''ds - v''\int_0^s v''w'ds]'$$
$$-\frac{(1-B_y)^2}{B_y}[v''\int_0^s\int_1^s v''w''dsds]'' - [w'(w'w'' + v'v'')']'$$
$$-\frac{1}{2}\left\{w'\int_1^s[\int_0^s (v'^2 + w'^2)ds'']ds\right\}''$$
$$+[w''(s-1) + w']\frac{L^3}{D_\eta}mg$$
$$+F\Omega^2\cos\Omega t + cF\Omega\sin\Omega t \qquad (8)$$

경계조건:

$$v = w = v' = w' = 0, \quad at\ s = 0$$
$$v'' = w'' = v''' = w''' = 0, \quad at\ s = 1$$

가진항과 중력항은 D'Alembert Principle을 사용하여 얻었다. (7), (8)에서 첫번째와 두번째의 항목은 y와 z방향에서 굽힘진동들 사이의 간섭을 나타내다. 중괄호 안의 것들은 비선형관성 항들이다. 마지막 대괄호 안의 항들은 중력에 의한 것이다. $F\Omega^2\cos\Omega t$는 기초운동에 의한 가진력이다. 만일 $B_y = 1$이면, 비틀림과 굽힘진동을 사이의 간섭은 없는 것이 분명하다. Nayfey는 위 수식을 이용하여 비선형 관성항의 영향과 감쇠의 영향, 선회(whirling)운동, 혼돈운동을 이론적으로 해석했다.

따라서 얇은 직사각형 외팔보의 비선형 진동현상은 Crespo da Silva and Glynn가 유도한 운동방정식을 기본개념으로 이용하여 실험을 하였다. 또한 Nayfay가 이미 이론적 해석을 통하여 저차 모드에서는 보의 강성이 중요한 성분으로 작용을 하여 도약현상이 일

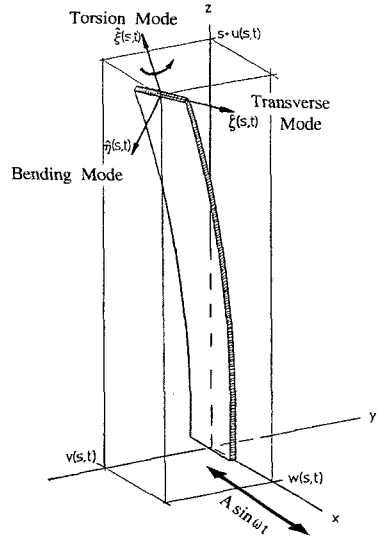


Fig. 2 Coordinate systems: $x-y-z$ = inertial reference frame: $\xi-\eta-\zeta$ = principal axes of the beam's cross sections, which are fixed on the cross section

어나고 고차모드에서는 보의 관성항이 비선형 현상에 중요한 요소로 작용하고 있음을 이론적으로 증명을 하였다. 또한 실험결과를 이용하여 운동방정식의 수정과 외팔보의 안정성 해석, 외팔보의 비선형을 유발시키는 요소들을 체계적으로 분석하는 연구가 진행되고 있다.

3. 2비선형 실험 이론

보 진동에서 선형 이론에서는 보의 고유주파수와 같은 가진주파수로 가진을 하면 공진이 발생하여 응답진폭(response amplitude)이 무한대로 증가한다. 그러나 비선형계에서는 단일주파수 가진 시 응답진폭이 무한대로 증가하는 것이 아니고 여러 가지 비선형 현상들이 일어난다. 보의 가진진폭이 증가하면, 선형계에서는 무시됐던 요소들이 비선형계에서는 중요한 인자들로 작용하여 새로운 보의 운동양상이 나타난다. 이 새로운 형태의 진동 형태는 입력에너지가 증가함에 따라 보의 진동모드의 안정성이 변화되고 새로운 형태의 안정성을 갖는 운동으로 이동한다.

가진주파수 영역에 있던 잉여의 진동에너지가 보의 비선형 요소로 인해 새로운 곳으로 이동하면서, 비선형만의 독특한 현상들이 나타난다. 이 에너지 전이현상이 고차조화운동, 분수조화운동, 준 주기운동(quasi-periodic motion)과 혼돈현상 등을 만들어 낸다.

비선형 진동의 특성을 갖는 모드들은 시스템에 감쇠항이 존재함에도 불구하고, 선형진동과는 다르게 전혀 진폭이 감소하지 않는다. 비선형 진동에서 특정 모드의 고유주파수의 주파수(ω)가 가진주파수(Ω)에 대해서 정확히 $n\Omega=\omega$의 관계가 성립한다. n이 정수이면 고차조화운동이라 하고 n이 분수이면 분수조화운동이라고 한다. 고차조화운동과 분수조화운동에서 발생한 진동의 주파수가 보의 어느 하나의 모드의 공진주파수와 일치하면 그 지점의 진동은 다른 주파수 영역의 진동보다 큰 진폭을 갖는 현상들이 나타난다.

두개의 모드가 거의 인접해 있는 연성모드의 경우 동시에 두개의 모드가 상호영향을 주고 받으면서 서로 경쟁하면서 나타난다. 하나의 응답진폭이 증가하는 경향이 나타나면 다른 하나의 응답진폭이 감소하는 경향이 나타난다. 이 현상은 매 순간마다 최대에너지 발산형태를 갖는 모드의 이동현상이 일어나는 것을 볼 수 있다.

4.실험 방법

4.1 실험 장치

보는 균일한 탄성재료인 알루미늄합금(AL)을 사용하였고, 알루미늄합금의 물성치는 탄성계수 E=72GPa, 강성계수 G=27GPa, 푸아송 비(poisson's ration), ν=0.3333 외팔보의 단위 길이당 질량 m=0.28 kg/m 보의 형상은 사각형이며 길이는 915 mm, 폭은 25 mm이고, 두께는 4 mm이다. 또한 알루미늄합금은 연성재질이므로 약간의 구조감쇠(structural damping)를 갖고 있다. 보의 가진 방법은 기초조화가진으로 사인파가진(sinusoidal excitation)을 하였다.

보를 고정시키는 지그(jig)는 가볍고 기계적 성질이 우수한 AL2024 을 재료로 사용했으며 지그의 형상은 외팔보의 경계조건을 만족시키며, 보가 횡 방향 가진을 받기에 적합하도록 설계되었다.

지그 전면에는 3-축 가속도계를, 외팔보에는 1-축 가속도계를 부착하여 FRF방법으로 지그의 공진주파수를 분석했다. 외팔보의 비틀림모드를 측정하기 위하여 보에 가속도계를 설치한 모습을 Fig. 3에서 보여주고 있다. 보에서 공진주파수 대역을 0~1600 Hz 이내로 제한했으므로 지그의 공진주파수도 이 대역내에 있는 공진주파수만 분석 했다. 지그는 y축 방향으로 16.25 Hz, 28.50 Hz와 z축 방향으로 149.00 Hz, 456.00

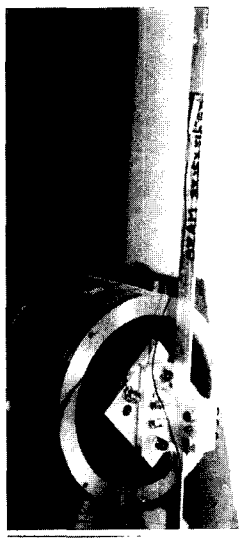


Fig. 3 Shape of the beam

Hz의 공진주파수를 갖는다. 그러므로 지그와 보의 상호 간섭현상에 의해서 발생하는 연성모드의 현상을 제거하기 위하여 각각 지그의 공진주파수에서 ±20 Hz 이내의 주파수대역은 본 실험에서 제외를 하였다. 그 이유는 지그와 보의 각각의 모드에서 상호 연성효과로 인하여 비선형 진동이 발생할 수 있는 가능성이 있기 때문이다.

실험에 사용된 측정장비는 다음과 같다.

Dual channel signal analyzer(B&K type 2035)
Charge amplifier(B&K type 2635)
Accelerometer(1-axis, B&K type 4374)
Accelerometer(3-axis, B&K type 4321)
Shaker(B&K type 4812)
Power amplifier(B&K type 2707)
Phase shifter
Oscilloscope(HITACHI VC-6145)

4.2 실험 방법[2]

먼저 보의 고유주파수의 범위를 0~1600 Hz 이내로 주파수를 제한하였다. 비선형 특성을 분석하는데 좋은 가진특성을 갖는 Pseudo-random신호를 가진신호로 사용하였다. 측정된 FRF 데이터를 이용하여 보의 굽힘모드는 12차, 비틀림모드는 4차, 횡모드는 5차까지 실험적으로 구하였고, Table 1~3에서 이론치와 실험치를 상호 비교하였다.

실험적으로 구한 보의 고유주파수를 기초로 하여, 모든 주파수의 고유주파수를 기초조화가진을 시켰다. 위의 고유주파수 중 특히 비선형 현상이 잘 일어나는 몇 개의 모드의 고유주파수를 찾아서 집중적으로 분석했다. 이때 가속도계의 부착 위치는 각각의 모드에서 측정할 때 마다 변화하였다. 그 이유는 측정 시 가장 큰 진폭을 갖는 보의 위치가 변화하므로 가장 큰 진폭을 갖는 위치를 찾아서 보에 순간접착제로 가속도계를 부착을 하였다. 일반적으로는 측정 가속도계의 부착위치는 보의 고정점에서 100 mm 높이로 하였다. 실험 시, 노드점(node point)의 위치를 피하고 보다 정확한 신호를 받기 위해서 기준위치에서 상,하로 가속도계를 조금씩 이동하면서 신호를 측정하였다.신호분석은 주파수분석기(FFT)와 오실로스코프를 사용했다. 비선형 현상은 주파수분석기에서 모드의 공진주파수 대한 조화성분으로 나타난다. 가진진폭을 증가시키면 주파수분석기 상에 차수조화성분과 분수조화성분이 단일피크(peak)로 나타남을 알 수 있다. 주파수분석에서는 혼돈을 발생하는 신호를 분석하는 힘들다. 보에 혼돈현상이 일어나면 주파수분석기 상에서는 잡음의 형태로 나타나며 전 주파수영역에서 진폭이 증가하는 현상이 일어난다. 즉 잡음인지 혼돈현상인지 잘 구분되지 않는다. 오실로스코프를 이용하면 시간영역에서 Phase portrait을 분석할 수 있으며, 위상지연기를 사용하여 신호를 지연시킬 수 있어서 혼돈의 형태를 보다 쉽게 분석할 수 있다.

5. 실험 결과 및 고찰

외팔보의 기초를 사인파가진을 하여 다음과 같은 실험결과를 얻었다. 횡방향으로 보의 비틀림 1차 모드인 260 Hz을 가진 하였을 때 Fig. 4에서 주파수 스펙트럼을 보면, 260 Hz에서 대한 고차조화 운동이 일어남을 볼 수 있다. 고차조화운동은 3차($3\Omega=\omega$)가 비틀림 2차 모드인 788 Hz와 일치하고 고차조화운동의 5차($5\Omega=\omega$)가 비틀림 3차 모드인 1332 Hz와 일치함을 볼 수 있다. 이것은 고차조화 운동으로 인하여 저주파의 진동에너지가 비선형 현상으로 고주파쪽으로 이동하는 것은 보여주고 있다. 또한 외팔보의

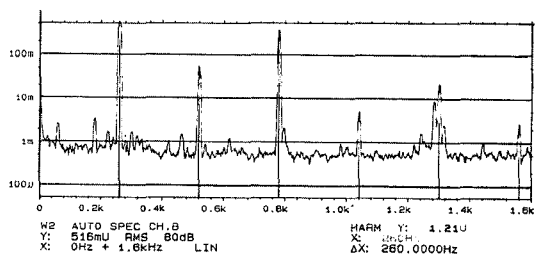


Fig. 4 Superharmonic motion at torsion 1st mode (260 Hz)

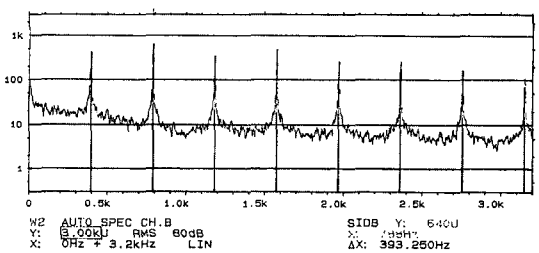


Fig. 5 Subharmonic motion and superharmonic at transverse 4th and torsion 2nd mode (788 Hz)

비선형 요소 중 강성항의 영향으로 고차조화운동이 발생하였음을 알 수 있다.

횡 4차 모드인 788 Hz와 비틀림 2차 모드인 788 Hz는 같은 고유주파수를 갖는 연성모드의 현상을 Fig. 5에서 보여주고 있다. 횡방향으로 사인파을 788 Hz로 가진하여 얻어진 실험결과로 $1/2\Omega = \omega$ 인 분수조화운동이 발생함을 볼 수 있다. 이것은 횡모드와 비틀림모드의 결합모드인 non-local mode의 영향으로 발생을 하였다. 주파수 스펙트럼 상에서 분수조화운동은 392 Hz의 조화성분으로 나타나고 있으며, 오실로스코프를 이용하여 Phase portrait 해석을 하면, Fig. 6에서 분수조화운동으로 인하여 내부에 작은 원이 하나 더 생긴 것을 볼 수 있다. 횡 4차 모드에서는 비선형 관성항의 영향으로 분수조화운동이 발생하였음을 보여주고 있다.

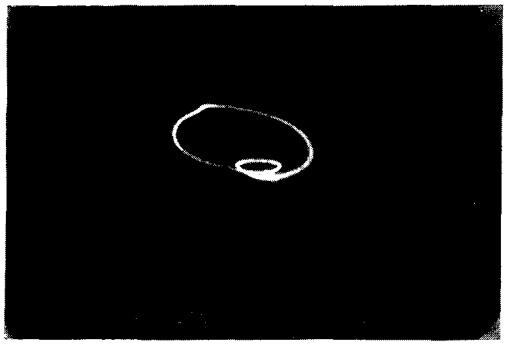


Fig. 6 Subharmonic motion and superharmonic motion at transverse 4th and torsion 2nd mode(788 Hz)

Fig. 7은 횡모드 412 Hz를 사인파가진을 하여 얻어진 결과이다. 보의 횡방향은 굽힘이나 비틀림 방향보다 관성항의 불안정한 특성을 갖고 있다. 횡방향으로 가진을 하면 보가 관성항의 불안정성으로 Fig. 8과 같이 준주기운동을 하게 된다. 이 때 가진력을 더 증가시키면 보의 운동은 혼돈상태가 되며, 주파수 스펙트럼에서 전 주파수대역에서 스펙트럼의 모양이 핑크잡음(pink noise)의 형태를 보인다. Fig. 10의 Phase portrait에서 보의 운동궤적을 보면 복잡한 형태의 진동특성을 보여주고 있다.

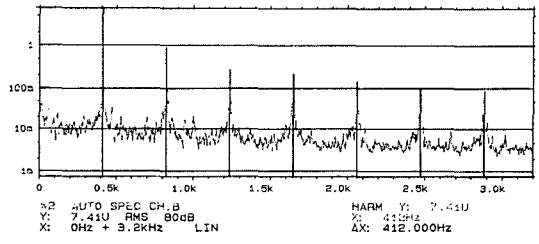


Fig. 7 Superharmonic motion and quasi-periodic motion at transverse 3rd mode (412 Hz)

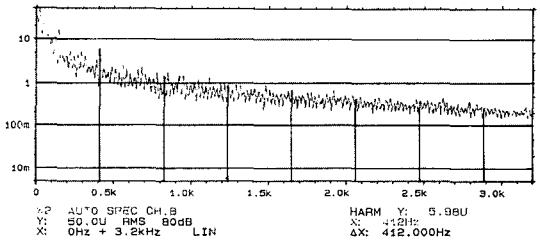


Fig. 9 Chaos motion at transverse 3rd mode (412 Hz)

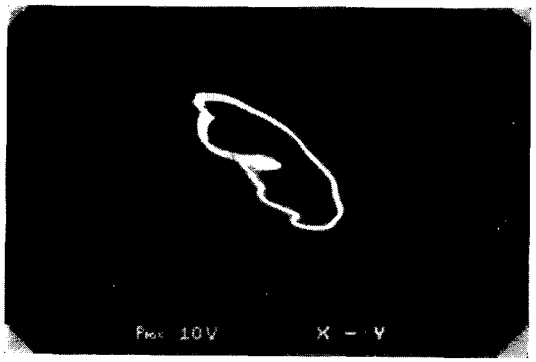


Fig. 8 Superharmonic motion and quasi-periodic motion at transverse 3rd mode(412 Hz)

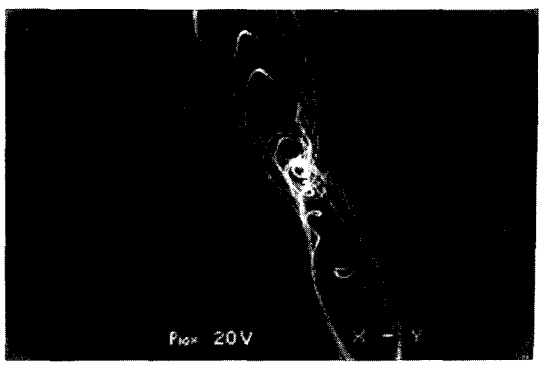


Fig. 10 Chaos motion at transverse 3rd mode (412 Hz)

6. 결 론

비선형 특성을 갖고 있는 보의 공진주파수를 선택하여 가진진폭을 점점 증가시키면 보는 어느 순간 보의 진동특성이 변화하게 된다. 그러므로 보의 진동특성은 외부가진력에 대하여 최대에너지 발산상태로 진동의 양상이 변화하게 된다. 이때 보의 운동은 불안정하게 되며, 이 때문에 비선형 진동현상인 차수조화운동과 분수조화운동이 일어난다. 보의 공진주파수에서 가진진폭을 더 증가시키면 보의 운동은 결국 혼돈상태가 된다. 가진진폭을 일정 이상이 되면, 보의 운동은 결국 혼돈상태가 된다. 보의 비선형 운동과정은 고차조화운동 → 분수조화운동 → 혼돈으로 진행됨을 알 수 있다

외팔보의 운동에서 횡모드와 비틀림모드가 결합하는 Non-local mode가 생김을 볼 수 있다. 빔에서 횡방향의 가진주파수가 Ω일 때, 응답주파수의 조화주파수가 ω으로 나타난다. 즉 $\Omega=\omega$인 경우에 1차 공진(primary resonance)이 일어나며, 또한 $1/2\Omega=\omega$인 분수조화운동이 일어남을 볼 수 있다.

외팔보의 응답신호를 시간신호(time signal) 및 지연좌표를 이용하여 오실로스코프에서 Phase portrait 방법으로 비선형거동의 분석하면 주파수 분석에서 나온 결과와 상호 유사함을 알 수 있다. 혼돈현상을 주파수분석기로 분석하면 전 주파수 대역에서 진폭이 증가하면서 핑크잡음 형태의 신호특성을 갖는다. 따라서 주파수 분석기만을 이용하여 혼돈현상 분석하는 것은 실험적으로 어렵다는 것을 알 수 있다.

참 고 문 헌

(1) Pai, P. F. and Nayfeh, A. H., 1990, "Nonlinear Non-Planar Oscillations of a Cantilever Beam under Lateral Base Excitation", Int.J. Nonlinear Mechanics, Vol. 25, No. 5, pp. 455~474.

(2) Nayfeh, A. H. and Pai, P. F., 1989, "Nonlinear Non-Planar Parametric Responses of an Inextentional Beam", Int. J. Nonlinear Mechanics, Vol. 24, No. 2, pp. 139~158.

(3) Haigh, E. C. and King, W. W., 1972, "Stability of Nonlinear Oscillations of an Elastic Rod", J.Acost.Soc.Am.52, pp. 899~911.

(4) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, "Nonlinear Oscillations".

(5) Abraham, R. H. and Shaw, C. D., 1992, "Dynamics the Geometry of Behavior", 2nd Ed., Addison-Wesley.

(6) Blevins, R. D., 1979, "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape", Van Nostrand Reinhold.

(7) Cusumano, J. P., 1990, "Low-dimensional, Chaotic Nonplanar Motions of the Elastica", Ph. D. Thesis, Comell University, New York.

(7) Pak, C. H., Rand, R. H, and Moon, F. C., 1992, "Free Vibrations of a Thin Elastica by Normal Modes", Nonlinear Dynamics, Vol. 3, pp. 347~364.

(8) M. R. M. Crespo da Silva and C. C. Glynn., 1978, "Nonlinear Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beam-I. Equations of Motion", J. Struct. Mech. 6., pp. 437~448.

(9) Y. S. Lee, J. M. Joo and C.H. Pak, 1996, "On the Chaotic Vibrations of Thin Beams by a Bifurcation Mode", Autumn Annual Conference of Korean Soc. Noise and Vibration Engineering, pp. 121~128.