

중등수학 탐구를 위한 예비수학교사의 수학프로그램(GrafEq.) 활용 사례

김 남 희 (전주대학교)

1. 머리말

1997년 교육부에서 고시된 제 7차 교육과정¹⁾이 2000년부터 초, 중등학교에서 순차적으로 시행되어 2004년 현재에는 초, 중등학교 모든 학년에서 제 7차 교육과정이 전면적으로 시행되고 있다. 제 7차 수학과 교육과정은 단계형 수준별 교육과정 구성, 학습내용의 적정화, 영역 명의 변경, 수학적 사고력, 문제 해결력의 강조, 다양한 평가방법 제시 등으로 특징 지워짐과 동시에 교육과정 개정의 중점사항 중 하나로 ‘계산기 컴퓨터의 활용 권장’을 강조하고 있음은 주지의 사실이다(교육부, 1997b, p.28).

따라서 각급 학교의 수학수업의 현장에서는 계산능력이나 연산수행능력과 같은 기초기능의 습득을 방해하지 않는 범위 내에서 적절하게 컴퓨터와 계산기, 슬라이드, 교구 등의 다양한 자료를 활용하여 보다 중요한 수학적 사고 능력의 개발이 이루어질 수 있도록 하는 수학수업의 구성에 대한 관심이 높아지고 있다. 특히, 각 교실에는 대형 모니터와 컴퓨터가 보급되어 있으므로 수학교사들은 ICT를 활용한 수학수업, WBI 수업 등 교과서와 칠판에 의존한 한정된 수학수업 분위기에서 벗어나 수학적 사고력을 신장시킬 수 있는 활동적이고도 학생참여적인 수학수업의 구성을 꾀하고 있다.

본 연구에서는 이러한 학교 현장의 변화와 제 7차 수학과 교육과정에서 강조하는 교수-학습 방법의 제안을 고려하여 예비수학교사들을 대상으로 수학프로그램을 안내하고 이를 중등수학의 학습에 적용해 보았다. 본 논문은 중등수학 탐구활동의 한 가지 사례를 제시하고 예비수학교사들에게 이를 실행한 수학교육적 효과를 분석한

것이다. 연구 과정에서는 수학교사연구단체의 연구활동¹⁾이나, 교육청에서 실시하는 수학교사를 대상으로 한 연수프로그램 등을 통해 비교적 현장의 수학교사들에게 잘 알려져 있는 수학교육용 프로그램 수학프로그램 GrafEq.²⁾를 선택하고 예비수학교사들로 하여금 프로그램을 활용하여 중등수학의 내용을 탐구할 수 있는 활동과제를 고안하였다. 그 동안 학교수학에서나 수학교육연구에서 다루어보지 않았던 ‘수학을 이용한 디자인’이라는 특별한 활동주제를 예비수학교사들에게 제시하여 중, 고등학교 때 학습했던 수학지식을 보다 심화하여 이해함과 동시에 새로운 수학학습방법과 문제해결 경험을 할 수 있도록 꾀하였다.

아래에서는 연구 활동을 실행한 과정을 정리하고 본 연구에서 실행한 예비수학교사들의 수학프로그램 활용사례가 수학교육적 측면에서 어떠한 긍정적인 성과를 가져왔는지를 분석하여 제시하고자 한다.

2. 학교수학에서의 테크놀로지 활용

본 연구에서 실시한 수학프로그램을 활용학습의 이론적 근거는 NCTM(미수학교사협회)에서 제시하는 학교수학의 원리와 우리나라 제 7차 수학과 교육과정에서 제안하는 교수-학습방법에 관한 관점이다.

(1) NCTM의 학교수학의 원리

NCTM에서는 현대 정보화 사회에서 수학적 소양의 중요성이 더욱 증대되었음을 지적하면서 학생들의 ‘수학적 힘³⁾’의 획득을 보장하기 위해서는 문제해결능력

* 2004년 7월 투고, 2004년 10월 심사 완료.

* ZDM분류: B54

* MSC2000분류: 97B50

* 주제어: 중등수학탐구, 수학프로그램 GrafEq., 수학디자인

1) 수학사랑(1998); 조성운(2000); 장훈·조성운(2001); <http://www.mathlove.org>의 자료실(수학프로그램).

2) 수학교육용 프로그램 GrafEq.(Graph Equation이라는 뜻으로 해석). <http://www.peda.com/grafeq>에서 영문판 제공.

을 중시하고 수학적인 문제를 탐구하는 과정에서 계산기와 컴퓨터를 적절히 활용하도록 제안하고 있다(NCTM, 1989).

이러한 제안은 NCTM(2000)의 「학교수학의 원리와 표준(Principles and Standards for School Mathematics)」에서 다음과 같은 ‘공학적 도구의 원리(The Technology Principle)’로 더욱 구체화되어 제시되고 있다.

테크놀러지는 수학을 가르치고 배우는데 필수적인 요소이다. 테크놀러지는 가르쳐야 할 수학내용에 영향을 주며, 학생들의 수학학습능력을 높여준다. 테크놀러지는 수학적 환경을 재구성하며 학교수학은 이러한 변화를 반영해야 한다. 학생들은 테크놀러지를 적절히 이용하여 수학을 더 많이 더 깊이 학습할 수 있다. 교사는 테크놀러지를 언제, 어떻게 사용할 것인지를 신중히 결정해야 한다(황혜정 외 5인, 2001, p.110에서 재인용).

우리나라의 제 7 차 수학교육과정도 위와 같은 외국 수학교육의 최신 동향 및 추세를 반영하여 학생중심교육 과정을 개정하는 과정에 테크놀러지의 활용 내용을 강화하여 제시하고 있음이 확인된다.

(2) 제 7차 수학과 교육과정

제 7차 교육과정의 개정은 수학 교육의 획일성과 경직성 개선의 필요, 교수-학습 및 평가 방법 개선의 필요, 정보화 사회에 적응하기 위한 수학교육의 필요라는 세 가지 이유에서 출발하였다(교육부, 1997b, pp.2-3).

특히, 정보화 사회에 적응하기 위한 수학교육에서는 각종 자료와 정보를 수집, 분석하여 종합, 판단할 수 있는 능력을 강조하면서 교육과정 개정의 중점사항으로 제

산기과 컴퓨터의 활용을 권장하고 있다(<표 1> 참고).

<표 1> 제 7차 교육과정 개정의 중점사항 (교육부, 1997b, pp.25-28; 1997c, pp.26-31)

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"> 가. 단계형 수준별 교육과정의 구성 나. 선택 중심 교육 과정의 구성 및 다양한 선택 과목의 설정 다. 학습내용의 적정화 라. 심화과정의 제시 마. 교육과정 구성 체제의 개선 바. 교육과정 목표와 내용 진술 방식의 변화 사. 영역 구분의 변경과 그에 따른 내용 재조직 아. 고등 사고 능력의 강조 자. 계산기 컴퓨터의 활용 권장 차. 다양한 평가 방법의 활용 권장 및 평가 기준의 수준 구분 준거 제시 |
|---|

제 7차 수학과 교육과정에서는 계산능력이 중요시 되지 않는 문제해결에 계산기나 컴퓨터를 활용할 것을 권장하고 있다(황혜정 외 5인, 2001, p.100). 이를 보다 구체적으로 살펴보면, 제 7 차 수학과 국민공통기본교육과정에 제시된 교수-학습 방법에 ‘다양한 교육기자재의 활용’과 함께

- 복잡한 계산
- 수학적 개념, 원리, 법칙의 이해
- 문제 해결력 향상

등을 위하여 가능하면 계산기나 컴퓨터를 적극 활용해야 함을 명시적으로 권장하고 있음을 확인할 수 있다(<표 2> 참조).

3) 수학의 기본적인 원리, 개념, 법칙을 토대로 탐구하고, 예측하며 논리적으로 추론하는 능력, 수학을 사용한 또는 수학을 통한 정보를 처리하고 교환하는 능력, 실생활이나 다른 교과 영역에서 수학적 지식을 사용하여 문제를 구성하고 해결하는 문제 해결력, 창의력 뿐 만 아니라 수학적으로 사고하는 성향, 사고의 유연성, 자신감 등의 정적 능력을 포함한 제반 고등사고능력(교육부, 1997b, p.2; 황혜정 외 5인, 2001, pp.92-93).

<표 2> 제 7 차 수학과 국민공통기본교육과정에
제시된 교수-학습 방법(교육부, 1997, p.86)

가-아:생략

자. 국민 공통 기본 교육 기간의 수학 교수 학습 과정에서 교육기자재의 활용은 다음 사항에 유의한다.

- (1) 교수 학습의 전 과정을 통하여 적절하고 다양한 교육기자재를 활용하여 학습의 효과를 높일도록 한다.
- (2) 교수 학습 과정에서 계산 능력 배양이 목표인 영역을 제외하고는 복잡한 계산이나 수학적 개념 원리 법칙의 이해, 문제 해결력 향상 등을 위하여 가능하면 계산기나 컴퓨터를 적극 활용하도록 한다.

본 연구에서는 NCTM과 우리나라 제 7차 교육과정에서 강조하고 있는 컴퓨터 활용 및 '수학적 힘'의 획득을 위해 중등수학에서 다룬 그래프를 이용한 '수학디자인' 활동을 고안하고 수학프로그램을 활용하여 이를 예비수학교사들에게 실행하였다. 이 활동에서 예비수학교사들은 중등수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 심화하여 이해하고, 중등수학의 학습내용을 이용해 정보를 처리하며, 디자인이라는 실생활 영역에 수학적 지식을 적용하는 새로운 학습경험을 하게 된다.

3. 수학프로그램 활용 학습 사례

이 장 소개되는 활동은 연구자가 재직하고 있는 사범대학 수학교육과에 입학한 신입생들을 대상으로 한 수학프로그램 활용 사례이다. 예비수학교사들이 수학프로그램 GrafEq.⁴⁾를 통해 중등수학의 내용을 활용하여 생

4) 방정식의 그래프와 부등식의 영역을 탐구할 수 있는 GrafEq.는 프로그램 사용법을 쉽게 익힐 수 있고 그래프를 빠르게 그려줌과 동시에 피드백을 통한 즉각적인 수정작업이 용이하므로 학생들이 프로그램 사용방법을 배우는데 큰 어려움 없이 중,고등학교에서 배운 수학의 내용을 시각화하여 이해하는데 많은 도움을 얻을 수 있다.

활 속의 모습을 디자인한 수학학습활동을 소개하고 이를 실행한 교수-학습과정을 정리하여 제시한다.

(1) 연구개요

본 연구에서 고안한 수학프로그램 활용 활동은 2002, 2003학년도에 수학교육과에 입학한 예비수학교사 (각 학년도 40명, 총 80명)을 대상으로 하여 각 입학년도 1학기 초, 교양수학수업시간을 통해 총 2년간 실시되었다.

먼저 예비수학교사들에게 앞에서 소개된 수학프로그램 GrafEq.의 간단한 사용법을 지도하고 이를 활용하여 중,고등학교 때 배운 수학적 지식을 활용, 재구성하는 학습활동을 안내하였다. 예비수학교사들에게 제 7차 수학과 교육과정에서 제시하고 있는 컴퓨터 활용 내용을 강조하여 설명하고 본 연구에서의 학습활동이 정보화 시대에 요구되는 창의적인 문제해결력의 신장을 위한 훌륭한 학습경험이 될 수 있음을 설명하였다.

수업 진행과정에서는 수학으로 세상의 다양한 모습을 디자인하도록 안내하면서 수학교육을 전공하는 예비수학교사들이 수학을 좀 더 자신에게 가까이 가져오고, 표현 수단으로서의 수학의 언어적 특성과 수학의 심미성, 실용성을 체험으로 느낄 수 있게 하는데 중점을 두었다. 전체적인 과정은 학생들이 집에서 과제를 수행하는 시간을 제외하고 정규 강의시간 2차시 분으로 비교적 짧게 구성되어 진행되었다. 교수-학습 활동과정에서 교사와 학생의 활동내용을 간단히 요약하여 정리하면 아래와 같다.

(2) 교수-학습 활동

예비수학교사들을 대상으로 한 수학디자인 활동의 교수-학습과정을 아래의 <표 3>, <표 4>에 요약하여 제시하였다.

<표 3> 교수 과정

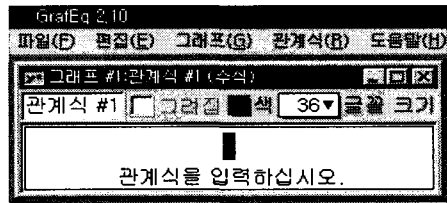
차시	구분	교수과정
1차시	안내	수업의 전체적인 과정에 대한 개요 설명
	도입	수학프로그램 GrafEq에 대한 간단한 사용법 소개 - 자율학습을 위해 사용법을 담은 자료(복사물)배부
	활동	학생활동시간부여: 작품주제 설정 - 배부된 자료를 기초로 스스로 프로그램 사용법을 익히면서 작품 제작 준비하도록 지도
	정리	주제설정의 다양성, 다양한 그래프표현의 가능성 설명 (동료들의 작품 관찰, 분석의 유용성 언급) 차시예고 및 과제 제시
2차시	과제 분석	과제물 수합 제작과정에서의 질문에 대한 답변, 보충설명 제출된 학생작품 소개 및 감상 작품 주제의 다양성, 사용된 수식 관찰
	활동	각 작품의 수정 및 분석파일 제작 (동료들의 작품 감상에서 얻은 아이디어로 자신의 작품을 보완, 발전시킬 수 있는 작업시간 제공) 해당그래프와 수식을 대응시키는 작업지도
	토론	작품과 관련된 아이디어 공유 작품 활용 전시회 구성 계획에 대한 논의
	정리	과제의 우수성 격려 차시 수업 안내 과제부과(작품제작과정에 대한 의견 정리)

<표 4> 학습 과정

차시	구분	학습과정
1차시	안내	수업진행개요 파악
	도입	GrafEq의 사용법 익히기 (별도 배부된 자료 참고)
	활동	자신만의 독자적인 작품 주제 선정 문제해결방법 탐색 GrafEq로 작품제작
	정리	GrafEq로 작품 제작 과제 받기
2차시	과제 분석	과제물 제작과정과 관련된 질의 응답 동료학생 작품감상 작품 주제의 다양성, 사용된 수식 관찰
	활동	동료와의 토론, 공동연구 작업 개인작품의 수정 및 보완
	토론	다양한 작품을 보고 새로운 아이디어 발표
	정리	차시수업 안내 듣기 과제숙지

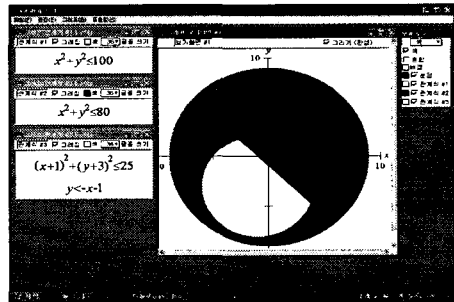
(3) 예비수학교사들의 수학프로그램 활용 작품사례

본 연구에서 사용한 수학프로그램 GrafEq는 예비수학교사들 뿐 만 아니라 중,고등학교 학생들이 프로그램의 사용방법을 익히는 많은 시간을 할애하지 않고도 중등수학의 내용을 탐구할 수 있는 훌륭한 학습보조도구라고 할 수 있다. <그림 1> 과 같은 수식 입력창에 별도의 명령어 없이 우리가 손으로 수식을 쓰는 대로 입력하면 2차원의 평면그래프를 쉽게 시각화할 수 있다.



<그림 1> GrafEq. 수식 입력화면

본 연구과정에 참여한 예비수학교사들은 간단한 프로그램 사용법을 익히고 난 후, 중등수학에서 학습한 다양한 수학내용을 총체적으로 활용하여 여러 가지 주제의 작품을 완성해 내었다. <그림 2>는 <그림 3>의 장애인 표지판을 완성한 학생의 작품제작과정의 일부장면이다.

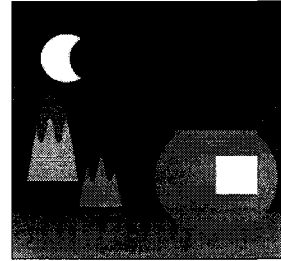


<그림 2> GrafEq.에서의 수식입력과 그래프



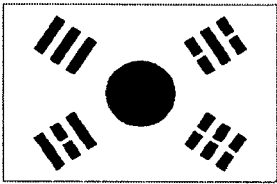
<그림 3> 장애인 표지판

<그림 2>의 과정을 거쳐 완성한 디자인

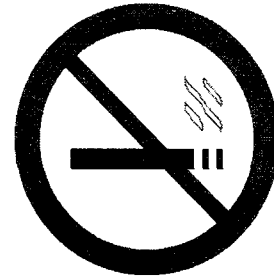


<그림 6> 밤풍경

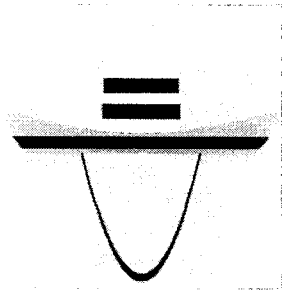
이 밖에도 예비수학교사들이 중등수학에서 학습한 함수식을 GrafEq. 프로그램에 입력한 그래프로 완성한 활동 작품사례를 몇 가지 소개하면 <그림 4> ~ <그림 8>과 같다.



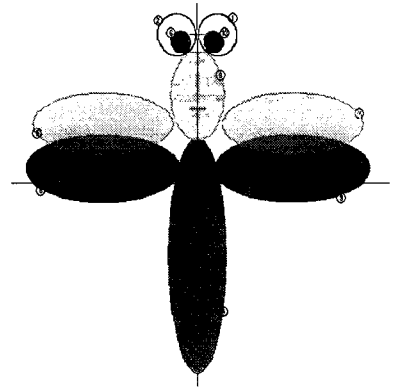
<그림 4> 태극기



<그림 7> 금연 마크



<그림 5> 멕시코 전통모자



<그림 8> 잠자리

위와 같은 디자인 작품을 구성하기 위한 활동에서 학생들은 중등수학에서 다루었던 여러 가지 함수의 그래프, 그래프의 특징과 개형, 부등식의 영역, 조건설정, 대칭이동, 변환, 교점 찾기, 변수의 범위 제한 등 이미 학습한 수학지식을 상기하여 종합적으로 다루는 작업을 해

야 한다. 단순한 지식의 재생이 아니라 응용력과 창의력, 상상력을 필요로 한다. 예비수학교사들은 위의 작업을 하면서 중등수학의 내용을 심화하여 탐구하고 새롭게 해석하는 활동을 하게 된다. 특히, <그림 8>은 좌표축을 보이도록 설정하고 각 그래프에 번호를 붙혀 사용된 수식이 무엇인지를 분석할 수 있게 제작한 것이다.

<그림 8>의 '잠자리' 디자인을 구성하기 위해 사용한 수식을 살펴보면 다음과 같다.

- ① $(x-1.5)^2 + (y-10)^2 = 2$
- ② $(x+1.5)^2 + (y-10)^2 = 2$
- ③ $\frac{x^2}{2^2} + \frac{(y-5.9)^2}{3^2} \leq 1$
- ④ $\frac{x^2}{0.8^2} + \frac{(y+4.9)^2}{3^2} \leq 7$
- ⑤ $\frac{(x+7)^2}{3^2} + \frac{(y-4)^2}{1.2^2} \leq 3$
- ⑥ $(x+1.2)^2 + (y-9.5)^2 \leq 0.5$
- ⑦ $\frac{(x-7)^2}{3^2} + \frac{(y-4)^2}{1.2^2} \leq 3$
- ⑧ $\frac{(x+7)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{1.2^2} \leq 3.6$
- ⑨ $\frac{(x-7)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{1.2^2} \leq 3.6$
- ⑩ $(x-1.2)^2 + (y-9.5)^2 \leq 0.5$

'잠자리' 디자인을 표현하기 위해 사용한 위의 식들을 살펴보면

- 원의 방정식
- 타원의 방정식

의 단 두 가지 식만이 사용되었음을 알 수 있다. 그러나 사용된 수식의 형태에 주목하여 보면 원, 타원의 방정식을 이용해 디자인을 완성하는 과정에서

- 원의 중심

- 원의 반지름
- 타원의 두 초점
- 타원의 장축, 단축의 길이
- 평행이동
- 대칭이동
- 부등식의 영역(원, 타원의 내부와 외부)

의 수학적 개념이 구체적인 조작활동을 통해서 구성되었음을 확인할 수 있다. 그래프를 이용한 디자인 작업을 하기 위해서는 단지 그래프를 나타내는 수식의 일반형을 기억하거나 재생하는 것만으로는 충분하지 않은 것이다. 식을 구성하는 변수인 문자들이 각각 어떤 역할을 하는 것인지, 모양과 위치에 변화를 가져오는 요소는 무엇인지, 같은 모양을 다른 위치에 놓으려면 수학시간에 배운 개념을 어떻게 적용해야 하는지를 실제로 생각하고 탐구하지 않으면 안 되는 학습상황에 있게 되는 것이다. 따라서 위와 같은 수학디자인 활동에서 요구되는 핵심적인 능력은 수학 교과서에서 독립된 장이나 절로 배웠던 내용들을 통합적으로 고려하면서 학습한 지식을 총체적으로 활용하고 적용하는 능력이라고 할 수 있다. <그림 5>의 맥시코전통토마 디자인에서도 중등수학에서 학습했던 sin 함수, 이차함수, 절대값 함수, 직선의 방정식 등이 통합적으로 다루어진 작품이다.

본 연구에서의 활동은 비록 변화를 함의하는 자연현상을 함수로 조직하는 상황은 아니지만 실생활의 다양한 표현에서 볼 수 있는 곡선의 형태에 주목하고 이를 함수의 그래프로 조직화하는 안목을 형성하는데 큰 도움을 주었다고 할 수 있다. 더불어 좌표축과 범위설정의 문제 해결을 독자적으로 해 나가면서 함수적 사고능력과 태도를 개발하는 데에도 적지 않은 도움을 주었다고 생각된다(우정호, 1998, p.374). 따라서 예비수학교사들에게 현장수학수업구성에서 함수의 그래프를 지도하고 활용하는 새로운 관점의 시각을 제공해주었다는 점에서도 큰 의의가 있다고 볼 수 있다.

4. 연구사례의 수학교육적 효과

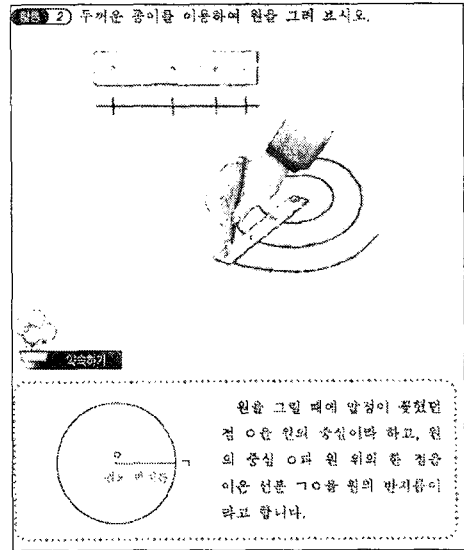
예비수학교사들이 자신만의 독특한 디자인 주제를 설정하고 수학프로그램을 통해 중등수학의 내용을 활용한

본 연구의 학습활동에서는 지필환경에서 다루지 못하였던 중등수학의 탐구활동이 활발하게 있어났다고 할 수 있다. 또한 인지적, 정의적 영역에서의 다양한 학습성과도 관찰되었다.

(1) 디자인 구성에서의 중등수학 탐구활동

GrafEq.를 활용한 수학디자인 활동에서는 학교수학에서 학습했던 다양한 함수식의 탐구활동이 일어난다. 원의 방정식 학습을 예로 들어보면, 지필 학습환경에서는 원의 방정식 학습이 아래의 <그림 9>와 같이 초등수학 수준에서의 구체적 조작을 통한 구성활동과, 약속하기를 거쳐 고등학교 10단계 수학에 이르러 <그림 10>과 같이 형식화된 식으로 정리된다. 일반적으로 원의 방정식의 일반형을 배우고 나면, 학생들에게 주어지는 문제해결의 학습은 <그림 11>과 같이 중심과 반지름에 대한 정보를 주고 그에 따른 원의 방정식을 표현하는 학습이나, 제시된 원의 방정식에서 중심과 반지름을 찾아내는 정도의 학습이다. 교과서의 표준화된 문제의 틀을 벗어나지 않는다면 주어진 문제해결을 위해서 원의 방정식을 사용할 필요성을 느끼거나, 원의 방정식을 사용할 때 중심과 반지름을 학생 스스로 결정하여 해결하는 학습을 제공하기는 어려웠던 것이 사실이다.

그러나 본 연구에서 실시한 수학디자인 활동에서는 자신이 표현하고자 하는 디자인을 위해 어떤 방정식이 필요한지, 그것이 원의 방정식이라면 중심을 어떻게 잡아야 할지, 서로 다른 두 원에서 반지름의 크기를 얼마로 결정해야 할지, 대칭관계의 두 원을 표현하기 위해 수식의 어떤 요소를 변경해야 할지 등을 고려해야만 한다(<그림 8>에서 사용된 ①, ②, ⑥, ⑩의 수식 참조). 예비수학교사들은 주어진 문제상황에서 답을 산출하는 학습에서 나아가 독자적으로 수학을 탐구해가는 과정을 의미있게 구성해 나가는 학습활동을 경험하게 된 것이다. <그림 8>의 예시에서는 원의 방정식 뿐만 아니라 타원의 방정식에 대한 탐구활동도 병행된다.



<그림 9> 수학 3-나 단계(교육부, 2001, p.31)

원의 방정식

① 중심이 (a, b) 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

② 중심이 원점, 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은 $x^2 + y^2 = r^2$

<그림 10> 원의 방정식의 일반형(수학 10-나) (신현성·최용준, 2001, p.42)

다음 원의 방정식을 구하여라.

(1) 중심이 $(0, 3)$ 이고 반지름의 길이가 5인 원

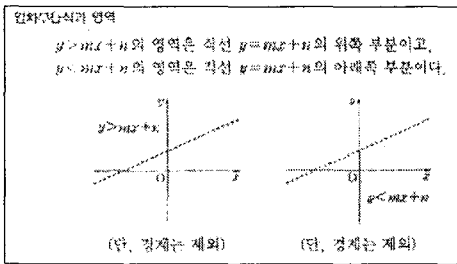
(2) 중심이 $(2, -1)$ 이고 원점을 지나는 원

<그림 11> 원의 방정식 문제(수학 10-나) (신현성·최용준, 2001, p.42)

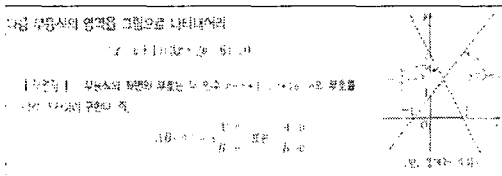
중등수학 탐구활동의 또 다른 사례로 부등식의 영역 개념을 들 수 있다. GrafEq.에서 많이 활용되는 부등식의 영역 개념은 지필환경에서는 해당영역에 특정한 점을 대입해보는 활동을 바탕으로 그래프의 내부, 외부, 위, 아래의 직관적인 개념으로 학습된다. 일반적으로 <그림 12>, <그림 13>와 같이 특정한 함수식(일차식, 원)에서의 부등식의 영역개념이 확장되어 <그림 14>와 같이 일

반적인 경우에 대한 해석으로 정리된다. 이 후의 학습은 주로 좌표평면에 영역이 칠해진 부분을 두 그래프의 교집합으로 표현하는 학습이나 <그림 15>와 같이 주어진 식을 나타내는 그래프의 영역을 좌표평면에 나타내는 학습이다.

본 연구의 GrafEq. 활동에서는 기존의 학습된 지식을 바탕으로 하여 원하는 디자인을 위해 수식의 부등호를 자신이 어떻게 결정해야 할지를 판단하는 과정이 부가된다. 표현하고자 하는 디자인의 구성을 위해서는 어떤 수식을 결정해야 하는가? 뿐 만 아니라 그 수식을 바탕으로 영역을 어떻게 처리해야 하는가? 를 고민하면서 부등식의 형태를 스스로 결정하는 과정이 필요한 것이다. 때로는 예상한 것이 맞지 않아 시행착오를 겪기도 하지만 시각화에 의한 즉각적인 피드백으로 수정, 보완하는 학습의 기회를 갖게 되므로 '예상과 확인'의 문제해결 전략도 경험할 수 있게 된다(G. Polya, 1986). <그림 5>와 <그림 6>의 디자인은 일차함수와 원의 방정식을 기본 소재로 하여 부등식의 개념을 적절히 활용한 사례이다.



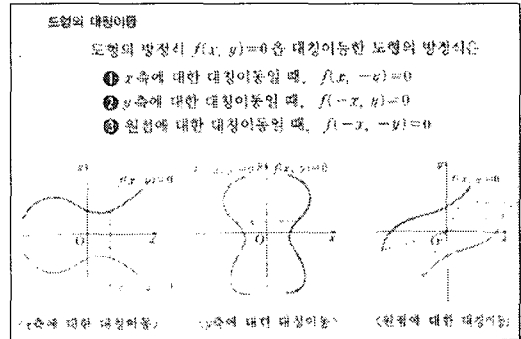
<그림 12> 일차부등식과 영역(수학 10-나)
(신현성 · 최용준, 2001, p.86)



<그림 13> 부등식의 영역 문제(수학 10-나)
(신현성 · 최용준, 2001, p.93)

이 밖에도 지필환경에서는 간단한 정수 계수 정도의 그래프만 다루었던 내용을 본 연구과정에서는 컴퓨터 프로그램을 활용하여 보다 큰 수, 보다 복잡한 수의 그래프 구성 활동으로 확장하여 탐구할 수 있었다.

학교수학에서 다루는 대칭이동, 평행이동 개념의 학습도 지필환경에서는 <그림 16>과 같이 x 축, y 축, 원점 대칭 각각에 대해 수식의 어떤 문자기호가 바뀌는가를 학습하고 그림을 통해 보충하는 학습을 주로 하였지만 본 연구의 수학프로그램 활용 디자인 활동에서는 한 단계 더 나아가, 원하는 디자인을 위해 처음 주어진 대상을 어떻게 대칭이동 시킬 것인가? 어떤 방향으로 얼마만큼 평행이동 시킬 것인가? 를 스스로 결정하고, 자신이 결정한 바에 따라 수식으로 적절히 표현해야 하는 보다 상위 수준의 수학적 활용이 이루어지는 탐구과정이 전개될 수 있었다. <그림 4>, <그림 8>의 디자인 구성이 대칭개념이 효과적으로 적용된 작품사례라고 볼 수 있다.



<그림 14> 도형의 대칭이동(수학 10-나)
(신현성 · 최용준, 2001, p.68)

위에서 다룬 몇 가지 탐구 사례 이외에도 자신이 표현하고자 하는 디자인을 구성하기 위해서 중등수학에서 다루었던 여러 가지 함수의 그래프, 그래프의 특징과 개형을 익히게 되고 조건설정, 변환, 교점 찾기 등 이미 학습한 중등수학의 지식을 상기하여 보다 종합적으로 다루는 활동을 할 수 있다. 그 동안 학교수학에서나 수학교육연구에서 다루어보지 않았던 '수학을 이용한 디자인'이라는 특별한 활동주제를 통해 예비수학교사들은 중,고등학교 때 배우는 수학적 지식을 심화하여 이해하고 나아

가 수식이 일상생활 속에서도 적용될 수 있음을 체험함으로써 수학적 표현을 새롭게 해석해 보는 학습의 기회를 얻게 되었다고 할 수 있다. 예비수학교사들은 이러한 활동을 통해 컴퓨터가 학생들의 흥미를 유발하고 수학적 활동에의 적극적인 참여를 유도하여 탐구활동과 반성활동을 촉진시키고 아울러 창의성 신장을 촉진시킬 수 있음을 확인하게 되었다(우정호, 2000, pp.479-480).

(2) 인지적, 정의적 영역의 신장

본 연구의 활동에서 예비교사들은 자신만의 독자적인 작품 주제 선정에서 출발하여 작품의 완성에 이르기까지 수많은 문제해결의 어려움에 부딪히고 이를 해결해 나가기 위해 다양한 시도를 경험하게 되었다. 원하는 디자인을 표현하기 위해 적절한 수식을 찾지 못할 때에는 중, 고등학교 때 배웠던 식을 다시 검토해보고, 대학 1학년 때 배우는 미적분학 책을 펼쳐가며 필요한 식을 찾기도 하였다. 때로는 적절한 수식 표현을 위해 측정 작업⁵⁾이 병행되기도 하였다. 동료들의 작품, 사용된 수식과 그래프를 세밀히 관찰한 후, 동료와의 토론과 분석활동을 거쳐 자신의 작품을 좀 더 세련되게 수정하는 작업도 자연스럽게 진행되었다.

작품제작활동 후에 예비수학교사들도 하여금 수학프로그램을 활용하여 그래프로 디자인을 구성하는 활동 과정에서 자신이 수학을 학습하고, 수학에 대해 경험하고, 수학을 느끼고, 수학에 대해 탐구한 내용들을 글로 정리하여 제출토록 하였다. 예비수학교사들이 제출한 글에는 단순한 수학 지식의 재생이 아니라 응용력과 창의력, 상상력을 발휘하면서 독자적인 문제해결의 경험 속에서 느낀 의견들이 기록되었다. 제출한 글에 담긴 예비수학교사들의 의견을 토대로 하여 본 연구에서의 학습활동에 대한 수학교육적 효과를 분석해 보았다. <표 5>는 분석 내용을 인지적 영역과 정의적 영역에서의 수학교육적 효과로 나누어 정리한 것이다.

<표 5> GrafEq.를 활용한 수학디자인 활동의 수학교육적 효과 분석

정의적 영역에서의 효과	① 수학에 대한 긍정적 관점 획득
	② 수학에 대한 흥미 유발
	③ 자신의 수학적 능력에 대한 만족감, 수학학습에 대한 의욕, 자신감 회복
	④ 수학과 생활과의 연결성, 수학의 실용성, 심미성 경험
인지적 영역에서의 효과	⑤ 능동적이고 활발한 수학적 탐구활동
	⑥ 중등수학에 대한 심화된 이해와 활용
	⑦ 시행착오 등을 통한 수학문제해결 과정의 경험
	⑧ 수학의 특성(식의 간략화, 단순화, 형식화) 인식

위 분석 자료의 근거는 예비수학교사들이 수학 디자인 작품 활동 후 제출한 의견 내용이다. 특히 인지적 영역에서의 효과 ⑥은 앞 절에서 정리한 ‘중등수학 탐구활동’의 내용과 유사하지만 여기서는 예비수학교사들의 의견을 중심으로 분석한 자료의 범위에서 별도로 취급한다. <표 5>에 제시된 분석 내용과 연결된 의견사례를 몇 가지 소개하면서 아래와 같다. 의견 제시 사례들을 보면 장차 수학을 가르쳐야 할 예비수학교사들이 수학에 대한 지식, 관점, 흥미, 태도 등에 있어서 긍정적인 진전이 있었음을 쉽게 파악할 수 있다.

[사례 1] 저는 이 GrafEq.라는 작업을 하면서 수학에 대해서 새로운 면을 많이 느낄 수 있었습니다(효과 ①). 처음에 이 과제를 받았을 때 어떻게 해야 할 지 정말 막막했습니다. 수학을 가지고 그림을 그리라니... 지금까지 저의 생각으로는 상상할 수 없는 일이었습니다. 그래서 많은 고민도 했지만 하나씩하나씩 시행착오도 겪으면서 그려나갔더니 조금씩 드러나는 그림을 보고 뿌듯함도 느끼고 저 스스로가 대견스러웠습니다(효과 ③, ⑦). 중·고등학교 때 배웠던 간단한 식들만 이용하여 그림을 완성할 수 있었습니다. 저는 간단한 포물선과

5) 태극기 디자인을 구성한 학생은 태극문양 주변의 4괘를 표현하고자 실제 태극기를 보고 4괘의 네 방향 각도를 모두 측정하여 직선의 기울기로 번역해내는 활동을 함(<그림 4> 참조)

원, 삼각함수의 그래프를 이용(효과 ⑥)하여 이 그림을 그렸습니다

[사례 2] 어렸을 때 자주 그렸었던 달팽이그림을 수식으로 표현해보고 싶었습니다. 선위주로 된 그림으로 부등식의 영역을 거의 사용하지 않기 때문에 처음에는 쉬울 것이라 생각했는데 막상 해보니 생각보다 쉽지는 않았습니다. 가장 눈에 띄는 부분인 달팽이껍질을 표현하는 것에 의외로 많은 시간을 필요로 했습니다. 원의 방정식을 이용해서 달팽이껍질부분을 표현했습니다(효과 ⑥). 그러기 위해서는 중점을 두 군데나 잡아야하고 반지름 같은 경우도 일정한 간격으로 큰 여러 개를 잡아야 하므로 생각이 필요한 부분이었습니다.(효과 ⑤)

[사례 3] 처음엔 함수식을 이용해 그림을 그린다는 게 너무 어렵게 느껴졌습니다. 어떤 그림을 그릴까 고민 고민하다가 제 눈에 보인 것은 고양이였습니다. 고양이를 그려야겠다고 마음은 먹었지만 고양이를 그리는건 쉽지 않았습니다. 하지만 이 식도 이용해보고 저 식도 이용해보면서 차츰 그림이 완성되가는 것을 보니 기뻐했습니다(효과 ⑤). 어떤 식을 이용해야 되나 고민할 때는 친구들의 도움도 받았습니다. 고양이 그림은 직선과 원의 방정식만을 이용(효과 ⑥)했기 때문에 식을 쓰는데 어려움이 없습니다. 하지만 정확한 식의 위치를 찾기는 좀 어려웠습니다. 직선의 기울기나 원의 위치, 크기에 따라서 그림자체가 달라지기 때문에 원하는 그림을 그리기 위해서 많은 시행착오가 따랐습니다(효과 ⑦)

[사례 4] 처음 무얼 할까 고민하다 돌고래 사진을 보게 되어 도전해 보았습니다. 원래 돌고래가 물 위로 솟구치는 모습을 표현하려고 했는데 수식으로 하기가 상당히 힘들었습니다. 그렇지만 친구들과 함께 궁리하면서 돌고래를 완성했습니다. 여기서 바다를 표현할 때 \cos 함수와 \sin 함수를 이용(효과 ⑥)하니 바다풍경이 훨씬 멋있었습니다. 또, 갈매기 부분에서 원 방정식 두 개를 이용하여

날개를 만들어서 사용했습니다. 이렇게 수식을 이용하여 만든 그림을 보니 마음이 참 뿌듯했고(효과 ③), 수학을 통해 그림을 그릴 수 있다는 게 무척 흥미로웠습니다(효과 ②).

[사례 5] 미술도구가 아닌 수학식을 이용해서 더욱 뜻 깊은 작품입니다. 각각의 식들이 모여서 하나의 작품을 이룰 수 있다는 사실을 알게 되었고 수학의 심미성을 눈으로 경험한 뜻 깊은 시간이었던 것 같습니다(효과 ④). 달 모양을 좀 더 예쁘게 표현하고 싶었는데 두 원의 교점을 잡는 것(효과 ⑥)이 생각보다 쉽지 않아서 다른 것을 그릴 때 보다 좀 더 시간이 걸렸고 시간이 걸려서 완성된 부분이라서 그런지 제일 애착이 가는 부분입니다. 수학식을 이용해 여러 가지 풍경을 그리고 이를 넣어 손수 달력을 만들어 방안에 걸어 보면 어떨까요? 수학을 낯설게만 느꼈던 사람들도 한 번씩 이 달력을 보며 수학의 아름다움에 빠지지 않을까요?(효과 ④)

[사례 6] 저는 일상 속에서 우리가 접할 수 있는 풍경에 대해서 표현하고 싶었습니다. 그래서 어렸을 때 가족끼리 바다낚시를 갔던 기억을 떠올려 다음 작품을 표현해 보았습니다. 배, 사람, 바다 등을 표현하기 위해 부등식의 영역이나 포물선, 원, 삼각함수 등의 함수식을 사용했습니다(효과 ⑥). 제가 사용한 함수식들은 미세한 범위지정을 필요로 했기 때문에 작업이 많이 까다로웠습니다. 그 중에서 가장 어려웠던 부분은 배를 표현하는 작업으로 두 개의 포물선을 겹쳐서 교점을 찾아 범위를 잡는 작업이 가장 어려웠습니다(효과 ⑦).

[사례 7] 수학으로 세상의 어떤 것도 표현할 수 있다는 것을 알게 되었습니다(효과 ①, ④). 그래서 그래프 이큐를 통해 사자성어도 수학으로 한번 표현해 보고 싶은 마음이 생겨 배산임수라는 주제를 잡고 작업을 하였습니다. 많이 미흡하지만 수학적으로 작품을 표현하였다는데 만족감을 얻었습니다(효과 ③).

[사례 8] 처음에는 ‘노을’ 그림을 15개의 수식으로 나타낼 수 있을지 걱정됐습니다. 될 수 있으면 간단한 식으로 그림을 그리기 위해 노력했습니다(효과 ⑧). 뾰족한 파란지붕을 그릴 때 식이 모자라서 포기하고 그냥 삼각형을 이용해서 그렸습니다. 여러 번의 시행착오를 거치고 나니 포기하고 다른 그림을 그릴까 하는 생각도 들었습니다. 하지만 맨 처음의 각오가 생각났기에 포기하지 않았습니다. 오랜 시간이 흐르고 그림의 마지막 식을 완성하고 나니 너무 기뻐서 저도 모르게 “다했다!!”하고 소리쳤습니다. 지금 봐도 저 그림을 수학적 식으로 제가 그렸다는 것이 너무 자랑스럽습니다(효과 ③).

[사례 9] 이 작품을 제작 할 때 가장 어려웠던 부분이 물결 부분이었습니다. 지금 그려진 물결 모양은 처음부터 제가 의도했던 수식이 아니었습니다. 여러 가지 수식을 해보면서 시행착오를 겪다보니 처음에 제가 원했던 이상의 물결이 나왔습니다(효과 ⑤, ⑦).

작품을 만들면서 힘은 들었지만, 많은 수식들을 접할 수 있어서 저에게 작은 발전을 가져다 줄 수 있는 작업(효과 ③)이었습니다. 특히 삼각함수 방정식을 활용하면 상상치도 못한 멋진 디자인을 만들 수 있다는 점에 놀라웠고(효과 ②, ④) 이번 기회로 삼각함수 방정식을 다시 한번 공부할 수 있었습니다(효과 ⑥)

[사례 10] 그냥 시계만 그린다면 멋있을 것 같아서 저의 작품의 키포인트라 할 수 있는 잠자리를 그려 넣었습니다. 특히 잠자리의 눈과 눈 사이의 연결, 잠자리의 눈과 몸통을 연결하는 부분이 저에게는 가장 어려웠고 많은 시행착오를 겪었습니다(효과 ⑦). 하지만 저에게는 GrafEq.를 이용해 수학을 공부할 수 있어서 좋았고(효과 ①), 이 프로그램으로 인해 수학을 가지고 그림으로 표현할 수 있다는 점이 신기했습니다(효과 ②, ④). 저는 잠자리 시계를 원의 방정식, 직선의 방정식, 타원의 방정식을 이용(효과 ⑥)한 결과 식이 복잡하게 나

왔는데, 좀 더 생각한다면 다른 수식을 이용해 간단히 표현할 수 있을 것 같습니다(효과 ⑧).

[사례 11] 아기자동차 ‘붕붕’을 만들 때 현실감을 주기 위해서 약간 비틀게 만들었던 것이 제 고생의 시작이었습니다. 창문같은 경우는 $|x|+|y|=1$ 이런 다이아몬드 함수식으로 표현했는데 30° 회전이동을 했는데 각도가 맞지 않아 거기에서 또 15° 회전이동 시켜서 식이 좀 복잡하게 되었습니다(효과 ⑤,⑥). 완성한 후에 아이들이 한마디씩 해줄 때 힘들었지만 고생한 보람이 있다는 걸 느꼈습니다. 자동차 틀은 직선의 방정식으로 했는데 자동차를 비틀게 하다보니 직선의 방정식을 이어서 하면서 함수식을 찾기가 힘들었습니다. 회전이동에 대해서 잘 알고 있어야 할 것입니다(효과 ⑥).

[사례 12] 텔레비전에서 재미있게 보았던 호빵맨을 제작해 보았습니다. 호빵맨은 모두 원의 방정식을 이용하여 그렸습니다(효과 ⑥). 원의 방정식만 알고 있으면 아무나 제작할 수 있을 것입니다만 한 가지 주의 할 점은 평행이동인데 원의 방정식의 평행이동에 대해 잘 알고 있어야 할 것으로 생각됩니다(효과 ⑥).

수학프로그램을 활용한 ‘수학 디자인’ 활동은 중등수학의 내용지식을 우리 세상의 모습을 표현하는 활동과 연결하여 그래프에 대한 예비수학교사들의 이해를 증진시키고 궁극적으로는 수학을 활용한 독자적인 문제해결 능력을 배양하는 데 초점을 둔 것이다.

연구과정에 참여한 예비수학교사들은 중등수학에서 다루었던 여러 가지 함수의 그래프, 그래프의 특징과 개형, 부등식의 영역, 조건설정, 대칭이동, 변환, 교점 찾기, 변수의 범위 제한 등 이미 학습한 수학적지식을 상기하여 종합적으로 다루는 작업을 하면서 학습한 수학의 내용을 단순히 재생하는 것에서 나아가 창의적으로 활용하는 응용력을 갖추게 되었다. 위에서 분석하였듯이 인지적 영역과 정의적 영역에서 얻은 수학교육적 효과는 제 7차 수학과 교육과정에서 강조하는 수학적 개념과 원리, 법칙의 이해 측면에서의 효과 뿐 만아니라 ‘수학에 대한

흥미와 관심을 지속적으로 가지고, 수학적인 지식과 기능을 활용하여 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 태도를 기른다'의 목표가 현장에서 적절하게 구현될 수 있도록 예비수학교사를 준비시킨다는 측면에서 큰 의의를 갖는다고 생각한다.

5. 맺음말

본 연구는 예비수학교사에게 NCTM에서 강조하는 '기술공학의 원리'와 제 7차 수학과 교육과정의 컴퓨터의 수학교육적 활용에 대한 제안을 인식시키고 이를 구체화할 수 있는 학습활동의 예를 고안하여 실행한 것이다.

본 연구에서 고안한 수학 디자인 활동은 예비수학교사들이 중등수학의 학습내용을 심화하여 이해함과 동시에 수학을 활용하여 독자적인 문제해결능력을 배양하는데 도움을 주기 위한 것이었다. 아울러 장차 학교현장에서 수학을 지도하게 될 때 학생들의 '수학적 힘'의 육성을 위한 교수-학습의 기초지식을 갖추게 하는 것을 목적으로 하고 있다.

연구과정에서 실행한 GrafEq. 활용 수학디자인 활동은 수학을 더 많이, 더 깊게 이해하고, 실생활에 적용하는 방법으로서 수학프로그램을 적절히 활용한 사례라고 볼 수 있다. 본 연구에서는 수학프로그램을 활용한 중등수학 탐구활동 사례의 수학교육적 효과를 분석하여 인지적 영역과 정서적 영역에서의 성과를 제시하였다. 예비수학교사들이 스스로 고안한 흥미로운 주제를 가지고 능동적이고 활발한 수학적 탐구활동을 하면서 중등수학의 내용을 심화하여 이해하고 이를 활용하여 수학적 문제해결의 경험을 한 것이 인지적 영역에서의 성과로 정리된다. 뿐만 아니라 수학에 대한 긍정적 관점을 획득하고, 수학과 생활과의 연결성, 수학의 실용성, 심미성 경험하면서 수학학습에 대한 흥미, 의욕, 자신감을 얻은 점이 정서적 영역에서의 효과로 분석되었다. 본 연구에서의 예비수학교사들의 활동경험은 장차 중등학교 현장에서 수학수업의 구성을 피할 때, 학생들로 하여금 수학의 심미성과 실용성을 느끼게 하거나 또는 지필환경에서 구현할 수 없는 보다 발전적인 수학수업을 실행하고자 할 때 자신의 교수방법과 학습자료 선택에 어떠한 형태로든 구체화되어 나타날 것이라고 기대된다.

본 연구가 사범대학 수학교육과에 입학한 예비수학교사들을 대상으로 실시한 수업활동이기는 하지만 우리나라에서 정상적인 중등수학교육을 갖 마친 대학신입생들의 수학학습활동이므로 그 내용을 중등학교 현장의 수학교육 활동으로 연결지어 활용하는데도 큰 무리가 없을 것이다. 여기서의 활동사례에 대한 연구내용과 방법이 중등학교 수학 교수-학습의 현장에 그대로 적용된다면 해당 학년에 따라 다루는 수학적 개념의 내용과 수준에 차이가 있으므로 수학교사는 활동내용의 수준과 범위를 적절하게 재구성하는 작업을 해야 할 것이다. 중,고등학교에서 다루는 간단한 방정식의 그래프와 부등식의 영역만으로도 수학프로그램을 활용하여 훌륭한 탐구작품을 만들 수 있으므로 현장학교의 수행평가나 재량활동, 특별활동 수업에 활용하면 수학수업방법의 다양화 구현에도 큰 도움을 얻을 수 있을 것이다.

본 연구의 내용과 관련하여 현장의 수학교사들은 컴퓨터를 수학수업에 다양하게 활용할 수 있는 훌륭한 교육자료들을 개발하는 문제에도 접근해야 할 것이다. 컴퓨터를 활용한 수학학습활동을 계획할 때에는 우리나라 제 7차 수학과 교육과정에서 수학적 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제 해결력 향상을 위해 컴퓨터나 계산기를 활용할 것을 권장하고 있음을 인식하고 학생들의 기초기능의 습득을 방해하지 않는 범위 내에서 적절하게 컴퓨터를 활용하여, 보다 중요한 수학적 사고능력의 개발이 이루어질 수 있도록 유도하는 학습을 고안하는데 노력을 기울여야 할 것이다. 나아가 본 논문에서 다룬 GrafEq. 이외의 여러 가지 수학 프로그램을 수학교육에 바람직하게 활용하는 방법에 대한 연구가 학교현장에서 개발되고 그 실천사례에 대한 교수학적 분석이 수학교사들 간에 활발하게 공유되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

- 교육부 (1997a). 수학과 교육과정. 교육부.
 교육부 (1997b). 중학교 교육과정 해설(III) - 수학, 과학, 기술·가정. 교육부.
 교육부 (1997c). 고등학교 교육과정 해설 - 수학. 교육부.
 교육부 (2001). 수학 3-나. 교육부

- 수학사랑 역 (1998). GrafEq. 사용설명서. 수학사랑.
- 신현성 · 최용준 (2001). 고등학교 수학 10-나. (주)천재 교육.
- 우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.
- 우정호 (2000). 수학학습-지도 원리와 방법. 서울대학교 출판부.
- 장훈 · 조성윤 (2001). GrafEq.를 활용한 수학수업. 제 3회 MathFestival 프로시딩, 제 3 집 제 2 권, pp.201-208.
- 조성윤 (2000). GrafEq.와 함수수업. 제2회 MathFestival 프로시딩, 제 2 집 1 권, pp.367-377.
- 황혜정 외 5인 (2001). 수학교육학신론. 문음사.
<http://www.mathlove.org>
- NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. 수학교육과정과 평가의 새로운 방향(구광조 외 2인 역, 1992). 경문사.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for school Mathematics*. The National Council of Teachers of Mathematics.
- Polya, G. (1986). How to solve it?. 어떻게 문제를 풀 것인가? 우정호(역). 천재교육

The Case Study of Using GrafEq. by Pre-service Mathematics Teachers for Exploring Secondary School Mathematics

Kim, Nam Hee

Jeonju university

This study is on the use of mathematics program for School Mathematics Education. According to the 'technology principle' by NCTM and teaching-learning methods by the 7th curriculum, we developed mathematics learning activities with mathematics program. This activity is to construct designs with graphs by using mathematics program(GrafEq.). In this study, we practiced these learning activities with pre-service mathematics teachers.

The mathematics educational effects of these learning activities in this study are analyzed as follows; active & spontaneous search for mathematical knowledge, the experience of problem solving,

affirmative view-point of mathematics, understanding of practical use of mathematics, acquisition an interest & motivation of learning mathematics etc. When students learn graphs of function, the concept of inequality in secondary school mathematics class., mathematics teachers can make a good use of constructing designs by mathematics program(GrafEq.). This will help to practice of teaching-learning methods by the 7th curriculum

* ZDM Classification : B54

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97B50

* Key Words : Exploring Secondary School Mathematics,
 GrafEq., Designs by Mathematics