韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2004. 11. 제 43권, 제 4호, 399-404.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
November. 2004, Vol. 43, No. 4, 399-404.

창의적 문제해결과 문제변형을 위한 사고

김 용 대 (진주교육대학교 강사)

Ⅰ. 들어가면서

예측불가능하게 변화하는 디지털 시대에서 잘 적응하기 위해서는 지식이나 정보의 양적인 획득뿐만 아니라 지식이나 정보를 효율적으로 활용할 수 있는 창의성이 더 중요하다. 이러한 창의성은 교육의 중요한 목표가 된다. Gardner(2000)는 창의성이 단일한 것이 아니라 다원적인 개념으로서 창의적인 사람은 문제를 해결하거나 문제를 제기할 수 있는 사람이라고 하였다.

특히, 학교수학에서 창의성은 '만인을 위한 수학'의 본질이 되어야한다. 특히 문제해결은 인지 능력 뿐만 아니라 창의성을 길러주며 수학 학습에 대한 동기를 부여하기 때문에 수학교육의 목표가 된다(Pehkonen, 1997). 또한 문제해결의 지도는 학생들이 수학을 창의적으로 활용하는 방법을 숙달하는데 도움을 준다. 주어진 문제에 대한 여러 가지 해결 방법을 찾는 활동, 문제에 대한 여러 가지 해를 찾는 활동을 통하여 수학적 창의성을 기를 수 있다. 특히 문제 변형은 학생들로 하여금 창의성을 발휘하게 하는 기회를 제공한다(Silver, 1997).

이것으로 볼 때, 수학적 창의성의 교육은 주어진 문제의 해결뿐만 아니라 해결된 문제를 새로운 시각에서 또 다른 해결 전략을 찾거나 새로운 아이디어를 창조하는 쪽으로 이루어져야 한다. 이를 위해서 문제해결과 문제변형의 지도는 수학적 활동의 중심에 있어야 하며 이를 통해 수학적 창의성을 신장시키는 것이 수학교육의 목표가 되어야 한다. 따라서 먼저 수학 교사가 문제에 대한 다양한 접근 방법과 문제변형의 아이디어를 가지고 있어야 한다.

* 2003년 12월 투고, 2004년 11월 심사 완료.
* ZDM분류: C40
* MSC2000분류: 97D50
* 주제어: 수학적 창의성, 창의적 문제해결, 문제변형

본 고에서는 정형적인 문제에 대한 다양한 해결전략과 이를 바탕으로 문제변형의 예를 제시하고자 한다. 이것은 수학적 창의성 교육을 위한 교사의 지도 방법에 근거하고 있다.

Ⅱ. 창의적 문제해결과 문제변형

먼저 수학적 창의성의 의미에 대하여 살펴보면 다음과 같다. Haylock(1985)은 '사고의 고정화를 극복하고 사고방식을 파괴하는 능력으로, 수학적 상황에서 다양하고 독창적인 반응을 창조할 수 있는 능력'을 수학적 창의성으로 보았다. 또한 송상헌(1998)은 수학적 창의성에 발현되어지는 원동력은 개념에 대한 깊이 있는 이해, 추측을 바탕으로 한 직관, 새로운 직관을 만들어내는 추진력 있는 통찰, 장차 무엇이 중요하게 될는지를 예견하는 것과 관련된다고 보고, 창의성은 현 상황을 예전에는 생각지 못했던 방법으로 확장시킬 것을 요구하며, 새로운 아이디어를 만들어내고 더 나아가 기존의 아이디어를 새로운 방법으로 결합시킬 것을 요구한다고 하였다.

이것으로 볼 때, 수학적 창의성은 문제의 해결에 있어서 일정한 알고리즘적 방법에 구속되지 않고 자기 나름대로의 독창적 아이디어를 바탕으로 사고의 고착성에서 벗어나 보다 유용한 아이디어가 되도록 하는 지적인 능력과 이를 성취하고자 하는 성향을 말한다. 즉, 수학적 대상들의 상호 관련성에 기초하여 이를 문제해결이나 문제변형에 창의적으로 적응하는 능력과 성향을 말한다.

1. 창의적 문제해결

제 7차 수학교육과정(교육부, 1997)에서는 '수학의 기본적인 지식과 기능을 습득하고, 수학적으로 사고하는 능력을 길러, 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해

결할 수 있는 능력과 태도를 기른다'라고 함으로써 수학교육의 궁극적인 목표가 문제해결 능력에 있음을 강조하고 있다.

대부분의 문제해결에 관한 모델들은 문제해결이 창의성과 밀접한 관계가 있음을 보여준다. 왜냐하면 문제해결에서 말하는 문제란 학습자가 해를 구하는 방법을 모르는 익숙하지 않은 문제 사태를 의미하고 있기 때문에 그 해결이란 학습자의 편에서 보았을 때 새로운 방식으로 자신이 알고 있는 개념, 기능 그리고 사고전략을 문제사태에 적절하게 연결짓는 창의적인 과정을 의미하고 있기 때문이다(김정효・권오남, 1999)

만약 창의성을 '창의적인 문제해결 능력'의 측면에서 본다면, 수학적 창의성 교육은 다름 아닌 창의적 문제해결 교육이 되어야 한다. Urban(1995)은 창의적으로 문제를 해결하기 위해서는 문제를 새롭게 형식화하고 문제를 다르게 정의하고, 새로운 해결 방법이나 대안적인 해결 방법을 찾는 상황에서 확산적 사고가 요구된다고 하였다. 확산적 사고는 다양하고 새로운 대안을 찾아내려는 노력으로서 호기심, 여러 가지 아이디어, 모순과 갈등, 긴장감, 애매모호함에 대한 개방성, 모험하기, 상상, 결정적 요소를 찾아내는 것 등이 포함된다. Pehkonen(1997)에 의하면, 수학적 문제해결 능력은 인지 능력뿐만 아니라 창의성을 길러주며 수학 학습에 대한 동기를 부여하기 때문에 수학교육의 중요한 목표가 된다. 또한 Silver(1997)에 의하면, 수학적 문제해결에 의한 지도는 학생들이 수학을 창의적으로 활용하는 방법을 숙달하는데 도움을 준다. 주어진 상황에서 문제를 만드는 활동, 주어진 문제에 대한 여러 가지 해결 방법을 찾는 활동, 주어진 문제에 대한 여러 가지 해를 찾는 활동을 통해 수학적 창의성을 기를 수 있다. 그리고 이러한 창의적 활동은 창의적으로 생각하고 행동하려는 의지의 결과이다. 따라서 창의적 문제해결을 요구하는 과제가 되기 위해서는 정형적인 문제보다는 비정형적인 개방형 문제가 되어야 함을 알 수 있다. 그런데 정형적인 문제와 개방형 문제는 서로 분리되는 것이 아니라 정형적인 문제를 변형하여 개방형 문제로 바꿀 수 있고 개방형 문제를 변형하여 정형적인 문제로 바꿀 수 있다.

이러한 것을 종합해 볼 때, 창의적 문제해결을 위해서는 하나의 문제에 대한 다양한 해결 방법을 찾는 것이 수학적 창의성을 위해 중요하다.

3. 창의적 문제변형

주어진 문제에 대한 다양한 해결 방법 못지않게 문제를 변형하는 것도 중요하다. Silver(1997)에 따르면, 문제변형은 학생들로 하여금 상당한 창의성을 나타내보이도록 하는 기회를 제공한다. 이러한 문제변형과 창의성 사이의 관계에서 중요한 것은 문제의 변형 자체에 있는 것이 아니라 문제의 변형과 그 변형된 문제의 해결 사이의 관련성에 있다. 창의성은 본질적으로 그 다양성에서 문제 변형과 유사하다. 가치 있는 수학은 창의성에 의해서 만들어지게 된다. 이러한 '만들어 가는 과정 중의 수학'의 측면에서 보면, 문제변형 그 자체를 창의적인 과정으로 볼 수 있다. 아래 <표 1>은 문제해결과 문제변형 활동과 창의성의 세 가지 요소인 유창성, 융통성, 독창성 사이의 관계를 나타낸다(Silver, 1997).

<표 1> 문제해결과 문제변형에서의 창의성

문제해결	창의성	문제변형
문제에 대한 여러 가지 해결방법이나 해를 탐구한다.	→유창성←	해결을 요하는 여러 가지 문제를 제기한다.
한 가지 관점으로 해결한 후 다른 관점으로 해결한다.	→융통성←	'What-if-not?' 방법을 사용하여 여러 가지 방법으로 해결되는 문제를 제기한다.
여러 가지 해결 방법이나 해 가운데 독창적인 것을 찾는다.	→독창성←	제기된 문제 가운데 독창적인 문제를 찾는다.

문제해결에서 해결 방법이나 답이 여러 가지로 나올 수 있는 문제의 사용은 수학 지도의 중요한 특징으로 학생들의 표현상의 융통성과 전략상의 융통성을 향상시키는 것과 밀접하게 관련된다. 이러한 융통성을 계발시키기 위한 한 가지 방법은 Brown과 Walter(1983)에 의해 개발된 'What-if-not'의 방법이다. 이것은 문제를 해결한 후 원래 문제의 조건이나 목표를 변형시키는 과정을 통하여 새로운 문제를 만드는 것이다.

이것을 종합해볼 때, 창의적 문제해결과 문제변형의 지도는 주어진 문제에 대한 다양한 해결의 아이디어를 적용하고 이를 바탕으로 문제를 변형하는 방향으로 이루어져야 한다. 이를 위해서는 수학교사가 창의적 문제해결과 문제변형의 지도를 위해서 적절한 과제를 선택하는 것이 중요하다.

Ⅲ. 창의적 문제해결과 문제변형의 지도

창의적 문제해결과 문제변형의 지도 방법은 다음과 같은 순서로 이루어질 수 있다. 먼저 여러 가지 해결 방법이 나올 수 있는 문제를 통하여 여러 가지 해결 방법을 지도한다. 그리고 이를 바탕으로 변형된 문제를 제시하는 것이다.

먼저, 다음과 같은 문제를 살펴보자.

[문제 1] 1시와 2시 사이에 시침과 분침이 만나는 시각은?

이 문제는 다음과 같은 여러 가지 방법으로 지도할 수 있다.

① 식에 의한 해결[1]

만약 1분을 1칸으로 보면, 분침이 12칸을 움직일 때 시침은 1칸을 움직이므로 분침이 x만큼 움직이면 시침은 $\frac{x}{12}$만큼 움직인다. 따라서 구하고자 하는 시각을 1시 x분이라고 하면, 1시부터 시침과 분침이 만날 때 까지 시침과 분침이 움직인 양의 차는 $x-\frac{x}{12}=5$이다. 여기서 $x=5\frac{5}{11}$이므로 구하는 시각은 1시 $5\frac{5}{11}$분이다.

② 식에 의한 해결[2]

시침과 분침이 처음으로 만나는 시각을 1시 x분이라 하면, 그 때의 시침과 분침이 이루는 각은 $0°$가 되어야 한다. x분 동안 분침이 회전한 각도는 $(6x)°$이고 x분 동안 시침이 회전한 각도는 $(\frac{x}{2})°$이므로 $6x-\frac{x}{2}=30$이다. 따라서, $x=\frac{60}{11}=5\frac{5}{11}$(분)이다.

③ 비율에 의한 해결

만약 1분을 1칸으로 보면, 분침은 시간당 60칸을 움직이고, 시침은 시간당 5칸을 움직인다. 분침은 시침보다 시간당 55칸을 앞선다. 또 정각 12시를 출발 시점으로 하였을 때, 시침과 분침이 처음으로 겹치려면 분침은 60칸을 지나서 시침을 따라잡아야 한다. 그러므로 12시 정각부터 처음으로 만날 때 까지 걸린 시간은 $\frac{60}{55}$시간이다. 즉, 1시간 $5\frac{5}{11}$분이 걸렸다.

④ 등분할에 의한 해결

정오와 자정 사이에 시침과 분침은 10번 만난다. 그러므로 원 모양의 시계에서 1시부터 12시까지로 12등분된 원주를 11등분하면 그 안에 등분점이 10개가 생기고 그 가운데 첫 번째 등분의 크기가 시침과 분침이 처음으로 만나는데 걸린 시간 즉, $\frac{12}{11}$시간에 해당된다.

위에서 처음 방법 ①, ②는 변수를 이용한 것이고 방법 ③, ④는 변수를 이용하지 않은 방법이다. 만약 문제를 '자정에서 정오 사이에 시침과 분침이 만나는 시각을 모두 구하라'로 변형할 수 있다. 이것을 해결하기 위하여 방법 ④를 통해 각 시간대(1시대~10시대)별로 시침과 분침이 만나는 시각을 차례로 구하면 다음과 같다(단위: 시).

$$\frac{12}{11}, \frac{24}{11}, \frac{36}{11}, \frac{48}{11}, \frac{60}{11}, \frac{72}{11}, \frac{84}{11}, \frac{96}{11}, \frac{108}{11}, \frac{120}{11}$$

또한, 이 문제를 다음과 같이 변형할 수 있다.

[문제변형 1] 만약 1시간을 50분이라고 할 때, 시침과 분침은 몇 번 만나는가? 매번 만나는 시각은?

[문제변형 2] 만약 하루를 20시간이라고 할 때, 시침과 분침은 몇 번 만나는가? 매번 만나는 시각은?

[문제변형 3] 만약 1시간을 M분이라고 할 때, 시침과 분침은 몇 번 만나는가? 매번 만나는 시각은?

[문제변형 4] 만약 하루를 T시간이라고 할 때, 시침과 분침은 몇C번 만나는가? 매번 만나는 시각은?

[문제변형 5] 한 변의 길이가 1인 정오각형의 한 꼭지점에서 동시에 시계 방향으로 움직이는 두 점 A, B가 있다고 하자. A가 1만큼 갈 때, B는 5만큼을 각각 일정한 속도로 간다. 이때 A가 한바퀴를 도는 동안 A와 B는 모두 몇 번 만나는가? 매번 만날 때까지 A와 B가 각각 움직인 거리는?

[문제변형 6] 한 변의 길이가 1인 정N각형의 한 꼭지점에서 동시에 시계 방향으로 움직이는 두 점 A, B가 있다고 하자. A가 1만큼 갈 때, B는 N만큼을 각각 일정한 속도로 간다. 이때 A가 한바퀴를 도는 동안 A와 B는 모두 몇 번 만나는가? 매번 만날 때 마다 A와 B가 각각 움직인 거리는?

이러한 변형된 문제들의 해결은 위에서의 여러 가지 해결 방법을 통해서 해결할 수 있다.

그리고 다음과 같은 문제를 살펴보자.

[문제 2] 농도가 4%인 소금물과 8%인 소금물을 섞었더니 농도가 5%인 소금물 500g이 되었다. 이때, 농도가 4%인 소

금물과 8%인 소금물은 각각 몇 g인가?

이 문제는 다음과 같은 여러 가지 방법으로 지도할 수 있다.

① 연립방정식에 의한 해결

4%의 소금물을 xg, 8%의 소금물을 yg이라 할 때, 다음 식이 성립한다.

$$\begin{cases} x+y=500 \\ \frac{4}{100}x+\frac{8}{100}y=\frac{5}{100}\times 500 \end{cases}$$

따라서 $x=375\,(g), y=125\,(g)$이다.

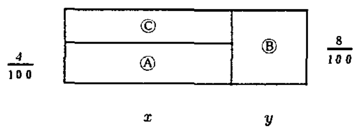
② 사각형 모델에 의한 해결

농도 4%의 소금물 xg속에 있는 소금의 양은 $\frac{4}{100}x$ …Ⓐ,

농도 8%의 소금물 yg속에 있는 소금의 양은 $\frac{8}{100}y$ …Ⓑ,

그리고 전체 농도 5%의 소금물 500g속에 있는 소금의 양은 25g이다.

이것을 사각형 모델을 이용하여 해결 할 수 있다.

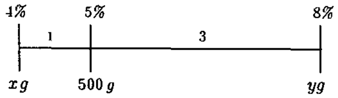


위의 그림에서 Ⓐ의 넓이는 농도 4%의 소금물 xg속에 있는 소금의 양이고 Ⓑ의 넓이는 농도 8%의 소금물 yg속에 있는 소금의 양이므로 이들의 합은 $\frac{5}{100}\times 500=25g$이 되어야 한다. 그리고 전체 사각형의 넓이는 $(x+y)\frac{8}{100}=500\times\frac{8}{100}=40$이므로 ©의 넓이는 $40-25=15$가 되어야 한다. 그러므로,

$$x=15\div\frac{4}{100}=375\,(g),\ y=500-x=125\,(g)$$

임을 알 수 있다.

③ 비례식에 의한 해결



여기서 x와 y사이의 관계를 구하면,

$x\times 1=y\times 3$(즉, $x:3=y:1$)이 된다. 그리고 $x+y=500$이므로

$$x=500\times\frac{3}{4}=375\,(g),\ y=500\times\frac{1}{4}=125\,(g)$$

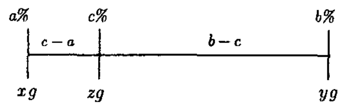
이 된다.

위에서 사각형에 의한 해결 방법은 '닭과 돼지가 모두 50마리 있고, 다리 수가 모두 130개일 때, 닭과 돼지는 각각 몇 마리인가?'와 같은 문제의 기하학적인 해결방법의 하나로 알려져 있다.

위의 <문제 2>를 일반화하면 다음과 같다.

[일반화에 의한 변형] 농도가 a%인 소금물 xg과 b%인 소금물 yg을 섞었더니 c%인 소금물 zg이 되었다. 이 때, x와 y를 각각 a,b,c,z에 관한 식으로 나타내시오.

이것을 비례식에 의해 유도하면 다음과 같다.



x, y, z, a, b, c 사이의 관계를 구하면,

$$x+y=z,\ x(c-a)=y(b-c)$$

이므로 이것을 정리하면,

$$x=z\times\frac{(b-c)}{(b-a)},\ y=z\times\frac{(c-a)}{(b-a)}$$

가 된다. [위의 결과는 연립방정식 $\begin{cases} x+y=z \\ \frac{a}{100}x+\frac{b}{100}y=\frac{c}{100}z \end{cases}$ 을 풀면 같은 결과가 나옴을 알 수 있다]

이와 같은 지도 방법이 소금물 문제를 해결하는데 활용 되어진다.

지금까지 살펴본 창의적 문제해결과 문제변형의 예를 통해서 다음과 같은 논의를 펼 수 있다. 창의적 문제해결과 문제변형에는 공통적으로 사고의 다양화가 요구된다. 문제의 해결 방법을 새로운 관점에서 본다든가 문제의 조건을 변경함으로써 문제해결자의 사고의 다양화를 유도할 수 있다. 따라서 수학교사가 문제에 대한 해결의 관점을 다양하게 갖추거나 문제의 조건을 변형시켜 학생들에게 제시하는 것은 중요하다. 다시 말해 창의적 사고

를 지도하기 위해서는 교사가 문제를 창의적으로 접근하려는 성향을 갖는 것이 필요하다.

Ⅳ. 나오면서

창의성은 학교수학의 중요한 목표가 된다. 이러한 창의성에는 확산적 사고와 수렴적 사고가 함께 요구된다. 창의적인 문제해결에서 다양한 해결 방법을 찾는 것은 확산적 사고에 의해 이루어지고 각각의 해결 과정을 수행하는데는 수렴적 사고가 요구된다. 마찬가지로 문제변형은 확산적 사고에 의해 이루어지고 변형된 문제를 해결하는데는 수렴적 사고가 요구된다. 따라서 문제해결이나 문제변형을 통한 수학적 창의성 계발을 위해서는 확산적 사고와 수렴적 사고가 함께 작용해야 한다. 여기서 중요한 것은 어떤 문제를 다루는가에 있다. 해결방법이 다양한 정형문제나 답이 여러 가지인 비정형 문제가 좋은 소재가 된다. 그런데 정형문제를 통해 비정형문제가 만들어지고 비정형문제를 통해 정형문제를 만들 수 있다. 정형문제에서 비정형문제로 진행하는 데는 확산적 사고가 요구되고 비정형문제에서 정형문제로 진행하는 데는 수렴적 사고가 요구된다. 따라서 수학적 창의성을 위한 문제해결과 문제변형의 지도에서 교사가 비정형적인 개방형 문제뿐만 아니라 다양한 해결방법이 나타날 수 있는 정형적인 문제에서 문제를 변경할 수 있다는 관점을 갖는 것이 필요하다.

참 고 문 헌

교육부 (1997). 제 7차 수학과 교육과정. 서울: 교육부.

김정효 · 권오남 (1999). 창의적 문제해결력 신장을 위한 수학교육과정 개발: 개념적 지식을 중심으로. 교과교육학 연구 **3(2)**. pp.247-264.

송상헌 (1998). 수학 영재성 측정과 판별에 관한 연구. 서울대학교 대학원 교육학 박사학위 논문.

Brown, S. J. & Walter, M. I. (1983). *The art of problem posing*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gardner, H. (2000). *Fostering creativity in the knowledge-based society*. 교원교육 85주년 국제학술 심포지움. 이화여대 사범대학.

Haylock, D. W. (1985). Conflicts in the assessment and encouragement of mathematical creativity in schoolchildren. *International Journal of Mathematical Education and Technology* **16(4)**, pp.547-553.

Pehkonen, E. (1997). The state-of-art in mathematical creativity. *ZDM* **27(3)**, pp.63-67.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and Problem Posing. *ZDM* **27(3)**, pp.75-80.

Urban, K. K. (1995). *Creativity A component approach model*. A paper presented at the 11th World Conference on the Education for the Gifted and Talented. Hong Kong: July 31-Aug.4.

Thinking for creative problem solving and problem posing

Kim, Yong Dae
Bonggok 13-18. Changwon Kyungnam, 641-821
E-mail: yongmath77@www.hanmail.net

Mathematical creativity is a main topic which is studied within mathematics education. Also it is important in learning school mathematics. It can be important for mathematics teachers to view mathematical creativity as an disposition toward mathematical activity that can be fostered broadly in the general classroom environment. In this article, it is discussed that creativity-enriched mathematics instruction which includes creative problem-solving and problem-posing tasks and activities can be guided more creative approaches to school mathematics via routine problems.

* ZDM classification: C40
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* key word: mathematical creativity, creative problem solving, problem posing