韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2004. 11. 제 43권, 제 4호, 381-390.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
November. 2004, Vol. 43, No. 4, 381-390.

전형식적 증명의 교수학적 의미에 관한 고찰

홍 진 곤 (건국대학교)
권 석 일 (서울대대학원)

I. 들어가는 글

증명은 문제해결과 더불어 수학적 사고 활동의 핵심이며 그 본질적인 특성이라고 할 수 있는 바, 학교 수학에서도 증명 교육은 지금껏 계속 강조되어 왔고 그 중요성은 앞으로도 변하지 않을 것이다. NCTM(1989)이 수학교육의 개선 방향으로 제시한 '학교 수학 교육과정과 평가의 규준'에서 모든 학생들을 위한 주요한 수학적 소양의 하나로 수학적 추론 능력을 들고 학교 수학의 모든 분야에서 추론을 더욱 강조할 것을 요구하는 것도 그러한 맥락에서 이해될 수 있다.

그러나 학생들의 증명 능력을 조사하기 위하여 수행된 여러 연구 결과를 보면 우리 나라 중학생들의 증명 능력은 대략 10~30% 정도의 학생들만이 기본적인 정리를 증명할 수 있는 정도로 매우 낮은 수준임이 알려져 있다(서동엽, 1999, p.2; 우정호, 1994, p.14). 이러한 현상은 외국의 경우에도 마찬가지로, 많은 조사 연구들에서(Senk, 1985; Fischbein, 1982; Miyazaki, 2000) 학생들이 증명의 필요성을 인식하지 못하거나, 증명을 잘 하지 못하거나, 증명의 가치를 인식하지 못하고 있음이 보고되고 있다.

이렇듯 학생들이 증명의 의미를 충분히 이해하는 것이 근본적으로 어려운 이유는 van Hiele의 이론을 비롯한 여러 수학 학습 수준 이론들을 통하여 설명되어 왔다. 수학적 증명은 학생들이 그 전까지 학습한 수학의 내용과 근본적인 수준의 차이가 있으며, 그렇기 때문에 증명 학습은 학생들의 수학에 대한 인식의 구조적 변화를 요구한다는 것이다(우정호, 1998, p.317).

본 연구의 문제의식은 여기에서 출발한다. 즉, 증명 학습이 이전에 학습했던 수학의 내용에 비하여 질적으로 다른 수준으로의 불연속적인 비약을 통하여 이루어지는 것이라면, 그 비약의 과정을 발생적으로 분해함으로써 그 이행을 점진적으로 도울 수 있으리라고 보는 것이다. 실제로, 서동엽(1999, p.174)의 연구에 따르면, 많은 학생들이 몇 가지 예에 대한 실험이나 측정에 의하여 결과를 확인하는 것을 정당화의 수단으로 받아들이고 있으며 논리적인 증명보다 이를 더 선호하는 경향을 보이는 바, 이와 같은 실험적, 귀납적인 정당화 방식과 수학적, 형식적인 증명 사이에는 논리적으로도 심리적으로도 큰 간극이 놓여 있다고 할 수 있을 것이다. 여기에서 교수학적인 문제가 될 수 있는 것은, 그러한 실험적, 귀납적 정당화 방식과 수학적 증명의 사이에 거칠 수 있는 중간 단계의 이행 과정이나 그 수준을 구체화할 수 있는가 하는 점이다.

예컨대 교사는, 엄밀하게 정의되지 않은 직관적인 개념이나 용어를 사용하거나 시각화된 이미지 등을 이용하여 학생들이 완전히 형식화된 증명 이전 단계에서 받아들일 수 있는 '어느 정도의' 정당화를 시도할 수 있을 것이다. 이 경우 이와 같은 정당화가, 몇 가지의 예만을 실험적이고 귀납적으로 확인하는 수준의 정당화와는 다른, 일종의 '보편성'을 확보하였다고 할 수 있는가 하는 문제와, 그럼에도 불구하고 이것이 완전하게 형식적인 수학적 증명에는 도달하지 못했다고 규정하는 근거가 무엇인가 하는 문제를 밝힐 필요가 있게 된다. 이러한 문제들이 분명해진다면, 우리는 완전한 형식화에 도달하기 이전의 '전형식적(preformal)' 수준에서 '증명하는 활동'을 설정하는 일이 가능해질 것이다. 교육적인 관점에서 볼 때, 이는 형식적인 논리 구조의 완성 이전에 그 구조와

* 2004년 5월 투고, 2004년 9월 심사 완료.
* ZDM 분류 : E53
* MSC2000 분류 : 97C50
* 주제어 : 전형식적 증명, 실험적 증명, 형식적 증명.

기본적인 아이디어를 직관적으로 의미 있게 통찰하는 기회를 제공하는 것과 함께, 진정한 수학적 증명의 수준으로 나아갈 수 있는 토대를 마련해 주는 의미를 가지게 될 것이다.

본 연구는 이러한 맥락에서, 실험적이고 귀납적인 방식으로 이루어지는 정당화[2]와 수학적으로 완전히 형식화된 수준의 증명 사이에, 이 두 가지와 분명히 구별되어 논의될 수 있는 중간 수준의 증명 활동이라고 할 수 있는, 이른바 '전형식적 증명(preformal proof)'의 개념과 사례를 제시하고자 한다. 이를 위하여, 여러 연구 문헌에서 제안하고 있는 학생들의 증명 수준의 발달 단계를 분석 검토하여 '전형식적 증명'의 아이디어를 개념화하며, 개인적인 발달에서뿐만 아니라 역사 발생적으로도 수학적 증명이 그러한 이행 과정을 거쳐왔는지 살펴보고, 구체적인 사례를 통하여 그 교수학적 의미와 적용 가능성에 대해 논의하도록 할 것이다.

II. 전형식적 증명의 개념

Branford(1908, pp.233~234)는 증명의 수준을 실험적(experimental) 증명, 직관적(intuitional) 증명, 과학적(scientific) 증명의 세 범주로 구분한 바 있다.

첫 번째 단계인 실험적 증명은 주로 감각에 의존하며 전 과정이 '구체적인' 단위로 측정되어 근사적으로 특정한 사실만을 보여주는 정당화의 수준이다. 이러한 실험적인 증명은 '특수한' 사실만을 입증할 수 있고 보편적이고 일반적인 것은 '증명'할 수 없는 것이 원칙이나 일반적인 사실을 '제안'하는 기능은 할 수 있기 때문에, 논의할 새로운 대상을 개발하는 생산적인 역할을 수행한다는 의미에서 그 중요성을 가진다.

두 번째 단계인 직관적 증명은 일반적이고 보편적인 사실을 입증하지만 암암리에 필요할 때마다 감각적 경험에 의존하는 단계이다. 실험적 증명과 비교할 때, 아무리 많은 예를 보인다 하더라도 실험적인 방법은 일반적인 정당화에 도달하지 못하는 반면, 직관적 증명에서는 감각 외에도 개념과 창조적인 통찰이 작용하기 때문에 보편성과 일반성을 어느 정도 확보하는 것이 가능하다고 할 수 있다[2].

세 번째 단계인 과학적 증명은 일반성이 확보된 사실들이 상호적으로 연결되는 체계화를 의미하는데, 공리나 다른 기본적인 정리들로부터 논리적인 추론만을 사용하여 완전하게 연역하는 수학적 증명이 여기에 해당된다. 실험적 증명이 주로 감각에 의존하였던 데에 비하여 과학적 증명에서는 추상적인 개념에 주로 의존하게 된다.

이러한 Branford의 설명에서 나타나는 '직관적 증명'이라는 아이디어는, 특수한 사실만을 확인하는 실험적인 정당화와 수학적으로 형식화된 증명 사이에 존재하는 증명의 수준을 의미하는 것으로, 본 고에서 탐구하려는 전형식적 증명의 아이디어와 거의 일치한다. 그러나 '직관적 증명'에 대한 Branford의 설명은 그것이 (1)일반성을 확보한다는 점과 (2)감각만이 아닌 개념적 통찰에 의존한다는 점만을 지적하는데 그치고 있어서, 교사나 학습자가 그러한 직관적인 증명을 실제로 구성하기 위해서 필요한 요소를 이해하거나 그러한 증명의 수단을 선택하는 구체적인 지침으로 기능하기 위해서는 보다 진전된 개념화를 필요로 한다.

우선 직관적 증명이 확보하는 일반성과 보편성에 대하여 좀 더 고찰해 보자.

Wittmann(1988; Blum & Kirsch, 1991, p.184에서 재인용)은 Branford가 제시하는 증명의 세 수준을 설명하면서, '증명이 아닌 것'과 '증명'의 구획은 직관적 증명과 수학적 증명의 사이가 아니라 실험적 증명과 직관적 증명의 사이에서 이루어져야 함을 분명히 하였다.[3] Wittmann은 '직관적 증명'이라는 용어 대신, 'Inhaltlich-anschaulich proof'이라는 용어를 사용하고 있는데, 이것이 함의하는 바는 그러한 증명이 '실체적인 내용이나 맥락을 보여주고 분명하게 한다'는 것이라고 할

1) 엄밀하게 말하면 '실험적이거나 귀납적인 확인'을 '정당화'라고 부르는 것 자체를 허용하지 않는 견해도 가능할 것이나, 본 고에서는 '학생들이 정당화했다고 생각하는 상태'까지 포괄하여 그 용어를 사용한다.

2) Branford(1908, p.233)는 실험적 증명 활동을 여러 예들이 '기계적'으로 종합되는 것으로, 직관적 증명 활동을 예(감각)들과 개념적 통찰이 '화학적'으로 종합되는 것으로 비유하여 설명한다.

3) 다시 말하면, '증명이 아닌 것'과 '증명'을 구별하는 일차적인 기준은, 그것이 형식적이고 연역적인 체계를 갖추고 있는가 하는 점보다 그것이 '일반적이고 보편적인' 정당화에 도달하고 있는가 하는 점이 우선되어야 한다는 것이다.

수 있다. 즉, 직관적 증명은 실재를 향하고 있기 (reality-oriented) 때문에 완전히 형식화된 대상을 다루는 수학적 증명과는 구별되지만, 그 내용의 일반적인 본질을 지적하고 있기 때문에 실험적 증명과 구별되며 그것 때문에 '증명'이라고 불릴 수 있는 자격을 갖게 된다는 것이다(<표 1> 참조).

<표 1> 직관적 증명의 대상

증명의 수준	증명 대상의 존재성	증명 대상의 일반성
실험적 증명	실체적	특수한 사례
직관적 증명	**실체적**	**일반적 내용**
수학적 증명	형식적	일반적 내용

결국 Branford가 말하는 직관적 증명이란 '일반적으로 타당한 내용'을 '감각으로 지각할 수 있는 (실제 사물이나 그 운동, 기하학적인 그림 등의) 매개체'를 통하여 정당화하는 활동이라고 해석할 수 있을 것이다. 그러나 이와 같은 설명에는 그러한 직관적 증명을 실행하는데 필요한 수단이나 증명의 방법에 관한 논의가 구체화되고 있지 않은 바, 본 고에서 시도하는 '전형식적 증명'의 개념화는 증명의 대상뿐만 아니라 증명의 수단과 방법까지 포괄하고자 한다.

그러기 위해서는 '형식화된' 수학적 증명이 무엇으로 이루어지는지 논의할 필요가 있다. 우선, 수학적 증명은 그 증명되는 내용들이 연역적인 체계를 이루게 된다는 것이 무엇보다 중요하므로, 수학적 증명은 '공리나 다른 기본적인 정리들로부터 새로운 명제를 논리적으로 연역하는' 활동으로 정의할 수 있을 것이다. 이와 비교할 수 있는 전형식적 증명에 대한 설명은 Miyazaki(2000, p.52)에서 찾아볼 수 있는데, 그는 형식화되지 않은 증명을 '참이라고 생각하는 가정으로부터 새로운 명제가 성립하는 타당한 이유를 찾는' 활동으로 설명한다. 그런데 형식적 증명과 전형식적 증명을 이와 같이 구분하면, 실제로 그 활동의 구조는 본질적으로 같은 것으로 볼 수 있을 것이다. 더욱이, 형식적 증명에서 말하는 '공리나 이미 증명된 정리'와 전형식적 증명에서 말하는 '참이라고 생각하는 가정'이라는 것은, 중등 학교 수학에서는 명확하게 구별되기 힘든 경우가 많다고 할 수 있다. 결국 이와 같은 개념화에서 특징지을 수 있는 두 증명 활동 사이의 차이는, 증명에서 사용되는 언어적 수단에서 찾아야 할 것으로 보인다.

즉, 형식적 증명에서는 그 활동 내에서 기능할 수 있는 논리적 언어가 사용되어야 하지만, 전형식적 증명에서는 그러한 논리적 언어 이외의 구체적으로 조작 가능한 대상이나 일상 언어 등이 사용될 수 있는 것이다. Miyazaki는 수학적 증명에서 기능할 수 있는 논리적 언어가 갖추어야 할 조건을 다음과 같이 제시하였다.

> * 대상과 그 성질, 그리고 그것들 사이의 관계를 표현하기 위한 기호와 그 배열 규칙을 가지고 있어야 한다.
>
> * 명제를 표현하기 위한 용어와 그 배열 규칙을 가지고 있어야 한다.
>
> * 명제들의 연쇄를 표현할 수 있는 문장과 그 배열 규칙, 약어를 가지고 있어야 한다. (Miyazaki, 2000, p.51)

이상을 종합해 볼 때, 전형식적 증명에 대한 개념화는 다음과 같이 이루어질 수 있다.

(1) 특수한 사례만이 아니라 일반적이고 보편적인 사실을 정당화한다.

(2) 증명의 대상은 완전히 형식적으로 추상화되지 않아서 감각으로 지각할 수 있다.

(3) 증명에 사용되는 언어는 형식적 증명에서 기능하는 논리적 언어를 제외한, 일상 언어나 구체적으로 조작 가능한 그림 등의 대상이 사용된다.

이러한 전형식적 증명은 형식적 증명을 도입하기 전의 중간 단계로 도입되어 증명 학습을 도와주는 역할을 할 수도 있지만, 한편으로는 형식적 조작기에 완전히 도달하지 못한 학생들의 추론에 관한 사고 수준을 하위 수준으로부터 점진적으로 향상시키기 위한 수준별 학습의 도구로서 사용될 수도 있을 것이다. 형식적 증명에서 기능할 수 있는 논리적 언어는 학습자가 형식적 조작기에 도달해야만 다룰 수 있는 것인 반면에, 구체적으로 조작 가능한 대상을 이용하는 전형식적 증명은 구체적 조작기의 아동에게도 경험시킬 수 있다. 예를 들어, "연속되는 세 수의 합은 가운데 수의 3배와 같다"는 명제에

대한 증명을 살펴보자. 형식화된 수학적 증명은 다음과 같다.

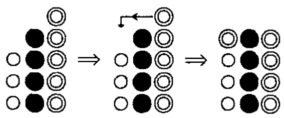
연속되는 세 수를 $n-1$, n, $n+1$ 이라고 하자.

$(n-1)+n+(n+1)$

$=n+n+n-1+1$ (∵결합법칙, 교환법칙)

$=3n$ (∵분배법칙)

이와 같은 증명을 하지 못하는 구체적 조작기의 아동이, $3+4+5=3\times4$, $7+8+9=3\times8$ 등의 특수한 사례들만으로 위의 명제를 정당화하려 한다면 이는 귀납적이고 실험적인 수준에 머무른 정당화로 파악할 수 있을 것이다. 그러나 다음과 같은 정당화를 보자.



위의 그림과 같이 공기돌 4, 5, 6개로 세 줄을 만든 다음, 6개 줄의 맨 위 돌을 4개 줄로 옮기면 세 줄의 공기돌의 개수는 같게 된다. 일반적으로 한 개씩만 차이가 나는 세 줄을 만든다면 항상 그러하다.

이와 같은 방식의 정당화에는 특정한 몇 가지 사례의 경우를 넘어서는 일반성이 내포되어 있으나, 증명의 대상이나 그 표현의 수단은 구체적으로 조작할 수 있는 것이라는 점에서 앞서 논의한 전형식적 증명의 범주에 포함되는 것이라 할 수 있다. 그리고 이러한 전형식적 증명은, 구체적 조작기의 아동들에게는 형식적 증명에서 기능할 수 있는 언어의 필요성이 인식되고 활동이 어떻게 언어로 번역되는지 학습하는 과정을 거침으로써 형식적 증명으로 나아가는 밑거름이 되는 반면에, 형식적 조작기의 아동들에게도 완전히 탈맥락화된 형식적 증명으로부터 필요할 때면 언제라도 그것이 발생한 맥락으로 돌아올 수 있게 하는 좋은 수단으로서 기능할 수 있을 것이다.

III. 전형식적 증명에 대한 역사발생적 관점

역사적으로 볼 때, 공리적으로 연역적인 체계를 갖춘 수학적 증명은 Euclid의 '원론'에서 처음 그 형태를 갖추었다고 할 수 있다. 그러나 '원론'에서 다루고 있는 많은 내용들은 훨씬 이전부터 사람들이 경험적, 또는 직관적으로 알고 있었을 뿐 아니라 어느 정도의 정당화까지도 소박한 형태로나마 이루어지고 있었음이 확인되고 있다. 이러한 '원론'이라는 수학적인 형태의 증명에 도달하기까지의 역사적인 발달 과정은, II장에서 살펴 본 것과 같은 증명의 발달 수준에 대응시켜서 고찰할 수 있는 바, Branford(1908, pp.234~237)는 기하학이 발달하는 과정을 실험적 단계, 직관적 단계를 거쳐서 Euclid의 '원론'이라는 학문적 단계에 이르는 과정으로 설명하여 실험적 증명, 직관적 증명, 과학적 증명이라는 증명의 세 수준에 대응시켰다.[4]

고대 이집트, 바빌로니아, 고대 중국의 사람들이 이룩했던 문명과 지식에서 가장 초보적인 형태의 기하학을 확인할 수 있는데, 예를 들어 피라미드와 같은 건축물은 정사각형의 밑면, 밑변의 두 배를 지름으로 하는 원의 둘레와 같은 높이, 정확한 방위를 가리키는 배치 등으로 보아 고대 이집트인의 상당한 평면 기하의 지식을 짐작하게 한다. 또한 기원전 1700년경의 것으로 알려진 한 파피루스에는 몇몇 평면도형의 면적을 계산하는 공식들이[5] 남아 있는 바, 이는 이집트인들이 그들의 기하학적 지식을 보존할 필요가 있다고 생각했음을 알게 해 주는 것이다(Stamper, 1909, pp.7-8). 이 외에도, 바빌로니아 시대의 관료 교육에는 수메르 문법 및 문학과 더불어 수학이 기본 덕목으로 자리잡고 있었으며(Robson, 2000), 중국의 고대 수학 또한 책으로 엮일 만큼의 방대한 내용을 가지고 있었다(Siu, 2000).

그러나 이 시기의 기하학적 지식은 그 시대 사람들의 실용적인 요구를 만족시키기에는 충분하였지만 그 내용

4) 다른 연구에서도 이와 유사한 구분을 찾아볼 수 있는데, 예를 들면 Koyama(1990)는 기하 발달의 단계를 순직관 기하의 단계, 그리스 초기 단계, 유클리드 기하의 단계, 비유클리드 기하의 단계로 나누었으며, Stamper(1909)는 두 번째 단계를 Thales 학파의 초기 논리적 단계와 Pythagoras 학파의 교양 학문으로 다루어지는 단계로 나누어 설명하였다.

5) 그 중 일부는 잘못된 것도 있다.

이 논리적인 정당성이나 정합적인 체계를 갖춘 학문의 모습으로까지는 나아가지 못하고 있었다. 이러한 점에서 이 시대의 기하학은 논리적인 정합성을 탐구하기 시작하는 다음 단계와 구별하여 '실험적 단계'의 기하학이라 부를 수 있을 것이다.

기하학적 지식이 논리적인 관점에서 최초로 연구되기 시작한 것은 그리스인들에 의해서였다. Euclid의 원론이 쓰여진 것은 기원전 300년경으로 추정되지만, 원론이 태어나기 전의 약 300여년간은 Thales(B.C. 636-546), Pythagoras(B.C. 580-500) 등에 의하여 실험적인 지식들이 정합적인 체계가 되도록 꾸준히 노력해 온 기간으로 파악될 수 있다.

Thales는 상인으로서 방문한 이집트에서 수학과 천문학을 배웠으며, 기원전 585년 일식을 예언하였던 것이 바빌로니아의 천문학적 지식에 의했던 것으로 파악된다. 또한 그는 이집트의 경험적, 실용적 지식을 바탕으로 하여, '원은 지름에 의해 이등분된다', '이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다', '두 직선이 교차할 때 그 맞꼭지각의 크기는 같다', '반원에 내접하는 각은 직각이다' 등의 정리를 발견하였다. 그런데 이러한 Thales의 업적이 갖는 특징은 그것이 실용적인 동시에 이론적이라는 점이다 (Stamper, 1909, p.11). 이집트의 기하학이 실용적인 테두리에 얽매여 있을 때, Thales는 고도의 추상화를 요구하는 직선과 관련된 이론을 논리적으로 발전시킨 것이다. 그렇기 때문에, 직선의 기하와 기하에 적용되는 추론 방법의 시초를 Thales로부터 찾는 것이 적절하다고 할 수 있다.

Thales로부터 더욱 발전된 결과는 Pythagoras에게서 찾을 수 있는데, Pythagoras는 면적과 부피에 관련된 기하, 그리고 산술에 주로 관심을 기울였으며 Euclid 원론의 1, 2, 5, 6권에 포함되어 있는 많은 명제에 정통하였다고 알려지고 있다(Stamper, 1909, p.12). 특히, 직각삼각형의 빗변의 길이의 제곱이 나머지 두 변의 길이의 제곱의 합과 같다는 Pythagoras의 정리는, 이집트인들의 경우에도 직각삼각형의 변들의 길이의 비가 $3:4:5$일 때 성립한다는 것은 알고 있었지만 이러한 관계가 임의의 직각삼각형에 대하여 성립한다는 것을 최초로 밝힌 사람이 Pythagoras라는 사실에 주목할 필요가 있다. 더구나 Thales의 경우와 비교해 볼 때, Pythagoras는 실용적인 것에 관심을 기울인 흔적을 전혀 찾아볼 수 없기 때문에 그에 이르러 기하학이 실제 생활의 필요를 벗어난 교양 학문의 모습을 갖추게 되었다고 판단할 수 있다 (Stamper, 1909, p.13).

그러나 Euclid 이전의 Thales나 Pythagoras와 같은 초기 학파들의 경우, 실험적으로 얻어진 기하학의 명제들을 논리적이고 일반적인 것으로 정당화하는 데에 그들의 노력을 집중하였을 뿐, 증명된 정리들을 엄밀하고 굳건하게 연역적으로 조직하는 데까지 나아가지는 못하였다. 이러한 점을 고려한다면, 이 시기의 기하학을 공리적 체계를 갖춘 Euclid 이후의 기하학과 비교하여 '직관적 단계'의 기하학이라 부르고, 공리로부터 연역되는 증명이 체계적으로 주어지는 Euclid 이후의 기하학은 '학문적 단계'의 기하학이라 부를 수 있을 것이다.

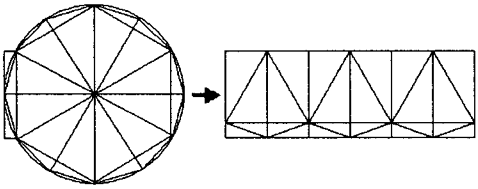
여기에서 우리가 주목해야 할 것은, Euclid의 원론과 같이 완전히 공리적으로 구조화되지 않은 '직관적 단계'에서의 정당화가 실제로 이루어졌던 방식에 관한 것이다. 이는 역사 발생적인 과정으로부터 가장 자연스러운 학습 과정에 대한 시사를 찾는다는 관점에서 볼 때, 앞에서 논의한 전형식적 증명의 모습을 역사 속에서 고찰하는 과정의 출발이라고 할 수 있다.

그런데 Thales나 Pythagoras가 실제로 기하학의 정리들을 증명한 방법에 대해서는 자료가 남아있지 않아서 이들로부터 전형식적 증명의 구체적인 사례를 얻기에는 어려운 점이 있다. 하지만 이에 비하여 공리적인 구조화로부터 자유로웠던 고대 중국의 경우에는 알고리즘과 정당화를 동시에 추구한 사례들을 많이 찾아볼 수 있는데, 대표적인 것이 구장산술에 나오는 알고리즘들 사이의 논리적 연관성을 설명하는 주석을 쓴 유휘(劉徽, A.D. 263)의 수학이다. 유휘는 조작적 텍스트라고 할 수 있는 구장산술에 모종의 구조를 부가하려고 시도하였지만 기본적으로 그 텍스트의 형식을 깨거나 재구조화하지는 않았기 때문에, 그의 저술에서는 실용성과 직관적인 논증이 함께 유지될 수 있었다. 다음의 예를 보자.

今有圓田, 周三十步, 徑十步. 問爲田幾何.

(지금 원 모양의 밭이 있는데, 둘레가 30보, 지름이 10보이다. 밭의 넓이는 얼마인가?) (九章算術, 1-31)

위 문제는 원의 넓이를 계산하는 문제인데, 구장산술은 이 문제의 풀이법을 '둘레의 반과 지름의 반을 곱하는(半周半徑相乘得積步)'[6] 것으로 제시하고 있다. 유휘는 이 공식을 설명하기 위하여, 둘레의 반과 지름의 반을 각각 가로와 세로의 길이로 갖는 직사각형으로 원을 변형시켰다(그림 참조).



이를 위하여 유휘는 원의 내부에 정육각형을 내접시킨 후 계속해서 변의 수를 늘린 정다각형을 원에 근사시켜 나갔다.[7] 그리고 이러한 과정을 계속하면 "원에 대한 내접 정다각형의 차이가 계속 작아질 것이고, 더 이상 자를 수 없을 때까지 계속하면 정다각형은 원과 일치할 것(Horng, 2000, p.40)"이라고 설명하는데, 이는 극한 과정에 대한 유휘의 직관적인 이해를 짐작하게 하는 것이다.

이와 비교해 볼 때, Euclid가 원의 면적에 대하여 설명하고 있는 부분은 그의 '원론(Heath, 1956)' 12권의 명제 2로서, "원과 원 사이의 비율은 각 원의 지름으로 만든 정사각형의 비율과 같다", 즉 원의 넓이가 지름의 제곱에 비례한다는 사실뿐이며 그 비율이 실제로 얼마인지는 설명하고 있지 않음을 살펴볼 수 있다. Euclid는 이 정리를 증명하기 위하여, 유휘가 사용한 할원의 방법과 똑같은 아이디어를 사용하지만(원론 10권 명제 1), 내접 다각형이 실제로 원에 '일치'한다고 가정하지는 않는다. 그 대신 내접하는 다각형을 원하는 만큼 얼마든지 원에 '근사'시킬 수 있다고만 설명하며, 실제 증명은 정리의 내용을 직접적으로 구성하는 것이 아니라 결과가 참이 아니라고 가정했을 때 모순이 생긴다는 '귀류법'을 사용하고 있다.

결국, 엄밀함을 추구하는 Euclid의 방법은 여러 가지 면에서 현대 미적분학에서의 극한의 존재성 증명에 사용되는 논의의 형태와 유사하지만, 극한 개념을 실제로 얻는 과정은 포함하고 있지 않은 반면에, 공식에 직접적으로 도달하는 유휘의 정당화 방법은 보다 직관적이고 증명의 각 단계에서 그의 목적을 분명하게 보여주고 있다고 할 수 있다.

유휘의 증명은 Euclid의 경우와 같이 공리화되어 있지 않았고 따라서 그만큼 엄밀하지는 못하지만, 그의 증명이 직관적인 수준에서의 정당화의 역할뿐만 아니라 공식을 (재)발견하는 방법까지도 설명하고 있다는 점에서, 전형식적 증명의 구체적인 모습을 모색하는데 하나의 시사를 얻을 수 있는 것으로 보인다. "엄밀한 논증과 발견술적인 추론은 보다 나은 이해를 추구한다는 목적에 따라 균형있게 사용되어야 한다(Horng, 2000, p.40)"는 유휘의 신념은 오늘날의 우리에게도 해당되는 말이다.

IV. 전형식적 증명의 활용 사례

이 장에서는 교수학적 상황에서 완전히 형식화된 증명 단계 이전에 사용할 수 있는 전형식적 증명의 두 가지 사례를 검토하고자 한다. 첫 번째는 중학교 과정인 모든 삼각형의 내각의 합이 180°라는 명제에 대한 증명이고, 두 번째는 대학 과정의 초보적인 미분방정식 $f'=f$의 자명하지 않은 해는 0의 값을 갖지 않는다는 사실에 대한 증명이다.

[1] 모든 삼각형의 내각의 합은 180°이다

이 명제는 Euclid 기하학의 아주 기본적인 내용이지만, '원론' 내에서 이루어지는 이 명제에 대한 형식적 증명의 경로는 그렇게 간단하지 않다. 평행선의 공리를 연역적 전개의 출발점으로 삼는 Euclid는 그의 원론 제1권의 명제 32에서야 비로소 삼각형의 내각의 합이 180°라는 것을 증명하고 있는데, 그 증명은 한 쌍의 평행선과 다른 한 직선이 만날 때 생기는 엇각과 동위각이 같다는 제 1권의 명제 29와 직선이 다른 직선과 만나서 만드는 두 각을 더하면 2직각이 된다는 명제 13을 이용함으로써 이루어지고 있다.

6) 둘레의 반(πr)=15, 지름의 반(r)=5이므로 넓이는 15×5=75(보)이다.

7) 이 방법은 '할원(割圓, Ge Yuan)'의 방법이라고 불린다(Horng, 2000, p.39).

그러나 이 명제의 경우에도 실험적인 수준과 직관적, 또는 전형식적 수준에서의 정당화가 각각 가능하다. 역사적으로는, 고대 이집트인들이 정삼각형이나 직각삼각형 등의 특수한 경우에 그 내각의 합이 180°라는 것을 '경험적으로' 알고 있었으며, 그리스에서도 Euclid 이전의 많은 수학자들이 나름의 방법으로 모든 삼각형의 내각의 합이 180°임을 증명하였다고 한다(Heath, 1956, pp.317-318).

우리 교육과정의 경우, 구체적 조작 단계인 초등학교에서는 "삼각형 모양의 종이를 잘라서 세 각을 한 직선 위에 모아 보는" 실험 등을 통하여 그 내각의 합이 180°임을 경험적으로 알게 하는데 이것은 전형적인 형태의 실험적 증명이라고 할 수 있을 것이다.[8] 이와 비교하여 중학교 과정(7-나 단계)에서 제공되는 증명을 살펴보면, (1)평행선이 한 직선과 만나는 경우 그 동위각이 같다는 성질을 직관적으로 받아들이게 하고 (2)맞꼭지각이 같다는 성질을 이용하여 평행선의 엇각이 같다는 성질을 증명한 후 (3)삼각형의 한 변에 평행한 보조선을 그어서 엇각이 같음을 이용하여 삼각형의 내각의 합이 180°임을 증명하는 순서로 되어 있는 바, 이는 '평행선의 성질'을 '공리'가 아니라 '직관적으로 당연한 명제'로 받아들이는 점만 다를 뿐 사실상 Euclid의 원론에서 명제 13과 명제 29를 이용해서 32번째의 해당 명제를 증명하는 것과 같은 연역적인 형식 구조를 가지고 있다고 할 수 있다.

결국 이러한 방식의 증명과 초등학교에서의 실험적 증명 사이에는 일반성을 확보하면서도 공리적인 구조를 필요로 하지 않는 전형식적 수준의 증명이 이루어질 수 있는 여지가 있는데, 여기에서는 Branford(1908, pp.126-139)가 제안하는 방식이 그러한 예로서 고려될 수 있을 것이다.

Branford(1908, p.131)에 따르면, 우선 아동은 대칭성에 대한 직관의 작용에 의해 직사각형이 두 개의 똑같은 직각삼각형으로 나누어질 수 있고, 어떤 두 개의 똑같은 직각삼각형도 직사각형으로 합쳐질 수 있음을 알 수 있다. 또한, 직사각형의 네 각의 합은 직각의 네 배라는 것, 직사각형이 분해되는 두 개의 똑같은 직각삼각형의 대응하는 내각이 각각 일치한다는 것도 직관적으로 알 수 있는 사실이므로, 아동은 "완벽한 직각삼각형이 그려질 수 있다면 그 세 각의 합은 직각의 두 배와 같으며, 직각삼각형의 두 예각의 합은 직각"이라는 결론을 내릴 수 있게 된다.

그 다음 단계는 이러한 사실을 활용하여 다음과 같이 증명을 구성할 수 있다.

(1) 모든 삼각형은 두 개의 직각삼각형으로 분해될 수 있다. (2) 분해된 두 직각삼각형의 내각의 합을 모두 더하면 360°이다. (3) 그 중에서 두 직각이 합쳐지는 부분은 원래 삼각형의 내각이 아니므로 원래 삼각형의 내각의 합은 180°이다.

여기에서 특히 (1)의 과정은 아동이 이해한 사실을 '모든' 삼각형으로 확장하는 핵심적인 과정이라는 점에서 매우 중요한데, 이 단계의 정당화는 부분적으로는 실험적으로, 또 부분적으로는 직관에 의존하게 된다. Branford(1908, p.134)는 '모든' 삼각형이 두 개의 직각삼각형으로 나누어질 수 있는가 하는 문제는 삼각형 모양의 종이를 접는 경험과 직관을 통하여 결론 내릴 수 있는 것이라고 설명한다. 물론, 이 결론의 엄밀한 증명을 위해서는 종이를 접은 선이나 삼각형에 그린 보조선 등이 삼각형의 안쪽으로 들어간다는 사실[9]을 증명해야 하지만, 학교 수학의 상황에서는 그러한 증명 없이 이를 활용할 수 있을 것이다.

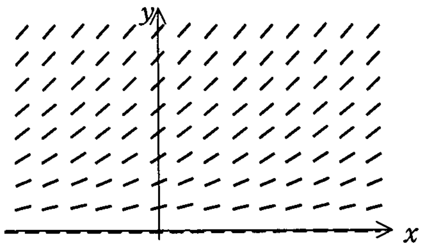
[2] 미분방정식 $f'=f$의 자명하지 않은 해는 0의 값을 갖지 않는다

이 방정식은 가장 간단한 형태의 '변수분리형' 미분방정식이며, 적분 공식에 익숙한 학생들은 쉽게 그 해를 '계산'할 수 있는 것이다. 그러나 이와 같은 미분방정식의 해법이 갖는 의미를 분명히 하기 위해서는 분수함수의 적분으로 정의되는 로그함수, 그 역함수인 지수함수, 그리고 미분형식(differential form)의 의미까지 이해해야

8) 사실상 모든 삼각형에 대하여 이와 같은 실험을 수행할 수 없으므로 이러한 정당화 방식으로는 일반성이 확보되지 않는다.

9) 이 사실을 엄밀하게 증명하기 위해서는 점, 직선, 평면에 대한 순서공리 또는 분리공리(separation axiom)를 필요로 한다. 그러나 사실 Euclid의 경우에도 유사한 내용들을 적절한 공리나 증명 없이 사용하였다. (Greenberg, 1980, pp.59-69 참조)

하는 것이기도 하다. 여기에서 제시하려는 예는, 미분계수의 의미만을 바탕으로 한 벡터장의 아이디어로부터 이 미분방정식의 개략적인 해를 구해 보는 수업에 관한 것이다(Blum & Kirsch, 1991).

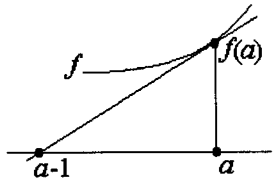


그림과 같은 벡터장을 관찰한 학생들은 직관적으로 자명한 해($f\equiv 0$)와 자명하지 않은 해[10]의 개형을 그 위에 그릴 수 있다. 그러나 "자명하지 않은 해가 x축과 만날 수 있는가"하는 문제는 벡터장의 그림만으로는 직관적으로 판단하기 어려운 문제인데, 이는 거의 유사한 벡터장의 그림을 가지지만 모든 해가 x축과 만나는 미분방정식 $f'=\sqrt{f}$ 의 경우와 비교해 볼 때 더욱 분명해진다.

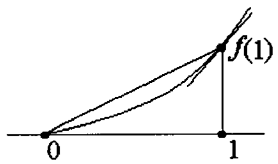
따라서 이 수업이 적분이나 미분형식의 개념이 도입되기 전에 미분계수의 아이디어만으로 미분방정식을 다루어 보거나 이를 이용하여 지수함수를 도입하려는 의도로 진행된다면, 이 문제에 대한 답은 우리가 논의한 전형식적 증명으로써 도입되기에 적절한 것이라고 할 수 있다.[11] 이제 그 증명을, 다음의 두 명제로 나누어 생각해 보자.[12]

(A) $f'=f$의 어떤 해 f가 어떤 곳에서 양의 값을 갖는다면 f는 x축과 만날 수 없다.

(B) $f'=f$의 어떤 해 f가 어떤 곳에서 x축과 만난다면 f는 양의 값을 가질 수 없다.



(A의 증명) $f'=f$의 해 f가 $f(a)>0$ 이라고 하자. $x>a$ 일 때 $f(x)>0$ 임은 분명하다(f가 계속 증가해야 하므로). 이제 $(a, f(a))$ 에서 f의 접선은 $f'(a)=f(a)$ 를 기울기로 가지므로, $f(a)$ 의 값에 관계없이 x축과 $a-1$에서 만난다. f는 $f''=f>0$ 으로부터 아래로 볼록하므로 결국 $[a-1, a]$ 전체에서 양이다. 이를 계속 $a-2$, $a-3$ 등으로 진행하면 $x<a$ 일 때에도 $f(x)>0$ 임을 알 수 있다.



(B의 증명) $f'=f$의 해 f가 $x=a$에서 0의 값을 가진다면 f가 계속 증가해야 한다는 사실로부터 $x\le a$에서는 모두 0의 값을 가짐을 알 수 있다. 이제 f가 $x\le a$에서 0의 값을 가지면서 어떤 곳에서 양의 값이 된다고 가정할 경우, $f(n)=0$, $f(n+1)>0$ 인 정수 n을 택할 수 있다. 평행이동을 통해 n을 새로운 원점으로 택하여 $f(0)=0<f(1)$ 이라 하자. 그런데 이 경우 $f'(1)>f(1)/1$ 이어야 하므로 $f'=f$라는 전제에 모순이 된다.

이와 같이 (A), (B)를 증명함으로써 주어진 미분방정식의 자명하지 않은 해는 x축과 만날 수 없음을 보일 수 있는데, 이러한 방식의 증명은 '모든 접선이 위로 향하면 그래프는 위로 향한다', '접선의 기울기가 계속 커지는 것은 그래프가 아래로 볼록함을 의미한다'와 같은, 직관적으로는 분명하지만 형식적으로 증명하는 것은 쉽

10) 실제로 그 함수는 $f(x)=ke^{x}$이지만 학생들은 이 식을 구하지는 못하는 상태이다.

11) 앞서 벡터장의 그림으로부터 직관적으로 몇몇 해의 개형을 도출해 보는 것은 '실험적 증명'의 단계라고 할 수 있을 것이다.

12) 이 증명은 Blum과 Kirsch(1991)에 의한 것이다.

지 않은 전제들을 기하학적인 직관만으로 사용하고 있다는 점에서 전형식적 증명의 특성을 잘 보여주는 것이라 할 수 있을 것이다.

V. 맺는 글

본 연구에서는 수학의 명제에 대한 실험적이고 귀납적인 정당화와 완전히 형식화된 수학적 증명 사이의 중간 수준인 증명 활동이라고 할 수 있는 '전형식적 증명'을 개념화하고, 그것이 구체적으로 나타나는 모습을 역사-발생적인 상황과 교수학적인 상황에서 고찰하였다.

전형식적 증명은 실험적인 증명이 확보하지 못하는 일반성과 보편성을, 그 정당화하는 내용 안에 담을 수 있다는 점에서 실험적 증명과 우선 구별된다. 그러나 증명에서 다루는 대상은 완전히 형식화되지는 않은, 실재 지향적인 상태이며, 증명에 사용되는 언어 또한 논리적이고 형식적인 체계를 갖춘 언어가 아니라 일상 언어나 구체적으로 조작 가능한 대상, 그림 등이 사용된다는 점에서 형식적인 증명과도 구별된다.

이와 같이 완전한 수학적 증명이라고 할 수는 없지만 귀납적으로 특수한 몇몇 사례만을 확인해 보는 수준을 넘어서 일반적인 정당화에 도달하는 수준으로서의 전형식적 증명이 가능하다면, 이는 교수학적으로도 다양한 그 활용 가능성을 탐색할 수 있는 것으로 보인다. 우선 주목할 것은, 형식적 증명의 언어를 사용할 수 없는 구체적 조작기의 아동에게도, 그들이 조작할 수 있는 대상만으로 '일반성'을 확보한 내용의 정당화가 이루어질 수 있다는 점이다. 구체적 조작기의 아동에게 이러한 전형식적 수준의 정당화 경험은 그들의 활동을 형식적 언어로 번역해야 할 필요성을 깨닫게 하는 과정을 통하여 이후 형식적 수준의 증명 학습 단계에 이르도록 하는 토대로 기능할 것이다. 또한, 전형식적 증명은 형식적 증명이 가능한 시기의 학생들에게도 그 증명의 예비 단계 혹은 증명의 발생적 맥락을 탐구하는 단계에서 그 학습을 돕는 역할을 수행할 수 있다. 앞에서 다룬 사례들에서 볼 수 있듯이, 전형식적 증명은 중등 학교 수학의 증명 학습 뿐 아니라 대학 수준의 내용에 대한 증명에서도 증명 내용에 대한 풍부한 맥락을 갖게 하거나 완전한 형식적 증명을 위한 개념들의 엄밀한 정의가 이루어지지 않은 상태에서 직관적인 내용의 이해를 도모하고자 할 때 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

한편 마지막으로 고려해야 할 것은, 학습자에게 주어지거나 스스로 발견한 전형식적 증명의 타당성이나 정확성은 학습자 스스로 파악하기에는 많은 어려움을 가지고 있다는 점이다. 이는 결국 충분히 수학적으로 숙련된 교사의 역할을 요구하게 되는 문제이다. 교사는 하나의 전형식적 증명을 학생들에게 제공하였다고 해서 곧바로 전이를 기대할 수 없음을 인식해야 하며,[13] 주어진 내용에 대한 서로 다른 수준의, 특히 실재 지향적인 아이디어를 중심으로 한 증명을 알고 반성할 수 있어야 할 것이다. Lakatos(1976)가 지적하듯이, 현재의 논증이 심지어 부정확한 것이라 하더라도 그것은 학습 과정에서 유용하고 건설적인 역할을 할 수 있는 것이기 때문이다.

참 고 문 헌

서동엽 (1999). <u>증명의 구성 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색</u>. 서울대학교 박사학위 논문.

우정호 (1994). 증명 지도의 재음미, <u>대한수학교육학회논문집</u> **4(1)**, pp.3-24.

우정호(1998). <u>학교수학의 교육적 기초</u>. 서울: 서울대학교 출판부.

차종천 역 (2000). <u>구장산술/주비산경</u>. 서울: 범양사.

Blum, W. & Kirsch, A.(1991). Preformal Proving: Examples and Reflections, *Educational Studies in Mathematics* **22**, pp.183-203.

Branford, B .(1908). *A Study of Mathematical Education*, Oxford: Clarendon Press.

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof, *For the Learning of Mathematics* **3**, pp.9-24.

Greenberg, M. (1980). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. San Francisco: W. H. Freeman and Company.

Heath, T. L. ·(1956). *The thirteen books of Euclid's Elements with introduction and commentary*. New York: Dover Publications.

13) 형식적 증명을 제공하는 경우에도 이는 물론 당연히 고려해야 할 문제이다.

Horng, W. (2000). Euclid vs. Lin Hui: A Pedagogical Reflection, in V. I. Katz(ed.), *Using History to Teach Mathematics -An International Perspective.* MAA, INC., pp.37-47.

Koyama, M .(1990). A Study on Intuition in Mathematics Education, in 數學教育學의 觀點. 東京: 聖文社.

Lakatos, I. (1976). Worrall, J. & Zahar, E.(ed.). *Proofs and Refutations - The Logic of Mathematical Discovery.* Cambridge University Press.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* The Council.

Miyazaki, M. (2000). Levels of Proof in Lower Secondary School Mathematics, *Educational Studies in Mathematics* 41, pp.47-68.

Robson, E. (2000). Mesopotamian Mathematics: Some Historical Background, in V. J. Katz(ed.), *Using History to Teach Mathematics - An International Perspective.* MAA, INC., pp.149-158.

Senk, S. L. (1985). How Well Do Students Write Geometry Proofs?, *The Mathematics Teacher* **78(6)**, pp.448-456.

Siu (2000). An Excursion in Ancient Chinese Mathematics, in V. J. Katz(ed.), *Using History to Teach Mathematics - An International Perspective.* MAA, INC., pp.159-166.

Stamper, A. W. (1909). *A History of the Teaching of Elementary Geometry.* New York: AMS press.

Wittmann, E. C. & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis?, in Bender, P.(ed.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis.* Berlin: Cornelsen.

On the Didactical Meaning of Preformal Proofs

Hong, Jin Kon

Dept. of Math. Education, Konkuk University, Seoul Korea, 143-701

Kwon, Seok Il

Graduate School of Seoul National University, Seoul Korea, 151-742

In this study, we conceptualized the 'preformal proof', which is a transitive level of proof from the experimental and inductive justification to the formalized mathematical proof. We investigated concrete features of the preformal proof in the historico-genetic and the didactical situations. The preformal proof can get the generality of the contents of proof, which makes a distinction from the experimental proof. And we can draw a distinction between the preformal and formal proof, in point that the preformal proof heads for the reality-oriented objects and does not use the formal language.

* ZDM classification : E53

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C50

* Key words : preformal proof, experimental proof, formal proof.