한국수학사학회지 제17권 제4호(2004년 11월), 123-132

수학 문제 해결의 역사와 모델링 관점

한국교육과정평가원 이대현
leedh@kice.re.kr

전주교육대학교 서관석
ksseo@jnue.ac.kr

이 글에서는 20세기의 문제 해결의 역사에 대하여 개관하고, 21세기에 새로운 경향으로 주목받고 있는 모델링 관점에서의 수학 문제 해결에 대하여 알아보았다. 전통적인 문제 해결에서는 상황과 분리되어 있는 문제의 조건을 수학적 표현으로 바꾸는 번안 기술의 습득을 주요 관심사로 다루었다. 반면에, 모델링 관점에서 문제 해결은 해결할 필요가 있는 현실적인 문제 상황에서 출발하여 수학적인 정리 수단으로 재조직하고, 수학적 상황에서 문제를 해결하여 다시 실제 현상에 적용하는 과정을 따른다. 따라서, 학생들은 문제를 해결해 가는 과정에서 수학화를 경험하게 되고, 수학을 배우게 되는 이점이 있다.

주제어 : 문제 해결, 수학적 모델링, 수학화, 모델링 관점, 수학적 모델

0. 서론

소크라테스의 대화법에서 시작된 문제 해결의 역사는 20세기에 이르러 연합주의와 형태심리학의 관점을 지나, 1980년대의 '학교 수학의 중심으로서 문제 해결의 강조'의 기간을 거쳐 오늘날에 이르고 있다. 이와 같이, 수학의 역사는 문제 해결의 역사라고 할 수 있는바, 문제 해결에 대한 심리학적 초점은 시대와 관점에 따라 차이를 보이고 있다. 그렇지만, 전통적으로 수학 교실에서 문제 해결은 학습한 사실에 대한 확인 과정으로 간주되었고, 이용된 문제도 인위적인 맥락에서 구안되었으며, 짧고 닫혀 있고 특별한 공식이나 알고리즘을 사용하는 전형적인 형태를 취하며, 계산 능력이나 이해 능력, 그리고 낮은 수준의 사고 능력을 강조하였다. 이러한 교육 현장에서 학생들은 이미 학습한 것과 유사한 상황과 문제에서만 그들이 소유한 지식을 활용할 수 있을 뿐이며, 다양한 상황과 문제에 적용하고 응용할 수 있는 능력을 가지지 못했다.

그러나, 최근의 수학 교육은 수학적인 탐구 활동을 통하여 학생들이 접하는 일상 상황을 수학적 수단으로 정리하고 조직하는 수학화를 중시하며, 수학적으로 사고하는 능력을 길러 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를

길러주는 것을 강조하고 있다[1]. 이를 위해, 일상의 여러 현상에서 단순화와 문제 설정의 과정을 거쳐, 이를 수학적 표현으로 추상화하고 수학적 표현에서 해를 구하고, 결과를 다시 일상 현상에 적용하는 수학적 모델링 관점에 의한 문제 해결을 중시해야 한다.

모델링 관점에서 수학을 해석하려는 사람들은 수학이 인간 활동에 의해 만들어진 것이기 때문에, 학습자도 수학을 만들어 갈 수 있도록 해야 한다는 견해를 가진다. 이와 같이, 수학을 행하는 과정을 강조하는 수학적 모델링 관점에 의한 문제 해결은 일상의 문제를 수학적으로 해결해 가는 과정을 중시한다.

모델링 관점에서 중요한 것은 문제를 해결해 가는 과정에서 학생들은 수학을 하게 되고 수학을 배우게 된다는 것이다. 이에 본 연구에서는 20세기의 수학 문제 해결의 역사에서 강조점이 어떻게 변화되어 왔는가에 대하여 알아본다. 다음으로, 모델링 관점의 의의에 대해 알아보고, 모델링 관점에서 수학 문제 해결에 대하여 논의한다.

1. 문제 해결의 역사와 그 관점의 변화

플라톤의 메논에 나오는 소크라테스와 사동 간의 수학 문제 해결에 대한 예시는 오늘날 발견학습의 원형으로 간주되는 수학 문제 해결에 관한 소크라테스의 대화법을 제시하고 있다. 이와 같이, 그리스 시대부터 시작된 수학 문제 해결에 관한 역사는 20세기에 들어와 실용주의·도구주의의 사상을 강조하는 듀이의 생활 중심의 문제 해결을 거쳐, 연합주의와 형태심리학으로 전개되었다.

연합주의자들은 지식이 아무리 복잡하더라도 자극과 반응의 단순한 결합으로 이루어져 있다고 주장한다. 이런 입장에서 문제 해결 과정은 자극과 그에 대한 여러 가지 반응의 시행착오적인 적용 과정이라고 할 수 있다. 따라서, 교사는 주의 깊은 과제 분석을 거쳐 적절한 반응에 강화 계획을 제공함으로써, 학생들이 문제 해결에 이르는 자극-반응의 연쇄를 형성할 수 있는 기회를 제공해야 한다. 이러한 연합주의 이론은 알고리즘을 적용하는 재생적 사고가 중심을 이루는 초보적인 수학 문제 해결 과정에 대한 설명은 가능하지만, 창의적인 사고가 요구되는 문제 해결 과정에 대한 설명으로는 불충분하다는 비판을 받았다[4].

한편, 형태심리학은 '의식의 전체성'을 중시하여, 인간의 지각이나 사고의 전체적인 형태를 강조하였다. 이들은 관련 요소의 재조직으로부터 비롯되는 통찰이 문제 해결에서 결정적인 역할을 하며, 통찰은 문제를 전체로 이해하거나, 전체와 부분들간의 관계에 대한 인식으로부터 이루어진다고 한다. [14]에 따르면, '생산적 사고(productive thinking)'는 구조의 개선적 변화가 일어나 구조적 혼란이 해소되고 간격이 메워짐으로써 의미 있는 형태로 바뀌는 순간에 일어나는 통찰을 경험하는 사고이다. 그가 제

시하고 있는 평행사변형의 넓이를 구하는 문제나 1부터 n까지의 자연수의 합을 구하는 문제에 대한 논의는 문제 해결에 대한 통찰이 문제의 내적인 구조적 관련성이 파악되면서 돌연히 일어남을 보여주고 있다. 베르트하이머(Wertheimer)는 '생산적 사고' 과정이 수학적 구조에 대한 이해를 통해 일어나는 지적인 과정으로 기술하고 있지만, 그러한 사고 과정을 유발하는 구체적인 교육적 조처는 명확히 논의하고 있지 않다.

1970년대 중반부터 제기되는 문제 해결에 대한 논의가 1960년대까지의 일반적인 논의와 구별되는 점은 문제 해결에 대한 구체적인 방법이 고려되고 있다는 점이다. 이런 점에서, 체계적인 문제 해결 방법론을 제시하고 있는 폴리아(Polya)의 문제 해결에 대한 논의가 1970년대 이후에 부각이 된 것은 우연이 아니다. 폴리아는 문제를 해결하는 사고 과정을 '관념의 연상에 의한 관련된 지식의 동원 과정'으로 설명하기도 하고, '문제와 관련된 요소를 재 조직화하는 과정'으로 설명하기도 하는데, 이것은 연합주의 심리학과 형태심리학의 입장을 모두 수용하고 있는 것으로 해석된다[4]. 그는 문제 해결자로 하여금 문제의 목표를 생각하여, 이전에 풀었던 유사한 문제를 기억하고, 문제에 제시된 자료를 분석하도록 지도해야 한다고 제안하고 있다. 이러한 제안은 통찰을 일으키는데 유용한 문제의 재구성과 목표의 분석을 증진시키는데 도움을 줄 수 있다. 이런 면에서 폴리아의 현대적인 발견술은 문제와 관련된 요소와 자료가 재조직되어 전체와의 관련성과 기능이 파악되어 문제의 구조적 관계에 대한 통찰이 일어날 수 있도록 도와주는 질문과 권고로 이루어진 대화술로 볼 수 있다.

1980년대 이후의 문제 해결에 대한 강조는 '*An Agenda for Action*'[11]과 '*The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*'[12]에서 확인된다. 또한, 1988년에 미국 수학 장학사회(NCSM)에서도 수학을 배우는 중요한 요소로 문제 해결을 들고 있다. '*An Agenda for Action*'은 1980년대의 10년 동안 수학과 교육 과정 개발과 교수학적 강조 사항에 대한 지침을 제공한 문서로, 북미에서의 수학 교육에 많은 영향력을 발휘하였다. '문제 해결이 1980년대 학교 수학의 중심이 되어야 한다'는 진술은 문제 해결에 대한 수학 교육자들의 태도에 많은 영향을 끼쳤다. 그러나, 이 진술은 문제 해결에 대한 구체적인 방안에 대해서는 언급하고 있지 않다. 한편, '*The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*'는 문제 해결의 교수 · 학습에 관한 많은 구체적인 제안을 하고 있으나, 여전히 문제 해결을 교육 과정의 중심으로 만드는 이슈에 대해 주목하도록 개발된 프로그램은 거의 없다는 한계를 가지고 있다[9].

1980년대 이후의 문제 해결에 대한 관심은 국제 수학교육자 단체(ICMI)의 협의회(ICME)에서도 나타난다. 1980년 캘리포니아 버클리에서 개최된 제4차 ICME 프로그램에는 소주제로서 문제 해결에 관한 단 하나의 회의만 있었으나, 호주의 아델아이드에서 개최된 제5차 ICME에서는 문제 해결이 7개 주요 주제 중 하나였고, 계속하여 ICME의 중심 주제가 되었다. 또한, PME[1)]의 프로시딩에서도 문제 해결은 연구의 중요 주제가 되었다[9].

이후에도 문제 해결은 학교 수학에서 강조해야 할 중요한 요소로 제시되고 있다. 특히, [13]은 문제 해결을 학교 수학에서 우선적으로 강조해야 할 사항으로 제시하고 있다. 이 규준집에 따르면, 문제 해결은 모든 수학 학습의 통합된 부분이어야 하며, 수학 교수 프로그램은 수학을 이해하는 중요한 요소로서 문제 해결에 초점을 맞추어, 모든 학생들이 다음과 같이 할 수 있도록 해야 한다.

- 문제 해결을 통하여 새로운 수학적 지식을 형성한다.
- 수학 내·외의 상황에서 제기되는 문제를 해결한다.
- 문제 해결을 위한 다양한 전략을 적용하고 적응시킨다.
- 수학 문제 해결 과정을 모니터하고 반성한다[13, p. 52].

한편, [9]는 1970년에서 1994년까지 이루어진 문제 해결에 대한 연구에서 강조된 내용과 연구에 이용된 방법을 (표 1)과 같이 제시하고 있다. 이 표에서는 1970년대 이후의 수학 문제 해결에 대한 연구에서 특히 관심을 끈 4가지 영역, 즉 문제의 어려움을 결정하는 요인, 성공적인 문제 해결자와 성공적이지 못한 문제 해결자의 비교, 메타인지와 관련된 연구, 상황에서의 문제 해결에 대한 연구 등을 제시하고 있다.

년도	문제 해결 연구의 강조점	사용된 연구 방법론
1970 - 1982	문제를 어렵게 하는 결정 요인의 분리; 성공적인 문제 해결자들의 특성 확인; 발견술 훈련	통계적 회귀 분석; 초기에는 교수 실험
1978 - 1985	성공적인 문제 해결자와 비성공적인 문제 해결자의 비교; 전략 훈련	사례연구; 생각한 것을 말하기 (think aloud) 프로토콜 분석
1982 - 1990	메타인지; 문제 해결에 대한 정서/신념의 관계; 메타인지의 훈련	사례연구; 생각한 것을 말하기 (think aloud) 프로토콜 분석
1990 - 1994	사회적 영향; 문맥(문제 해결 상황에 놓인)속에서 문제 해결	민족학적 방법

(표 1) 문제 해결 연구의 강조점과 방법론[9, p. 664][2)]

특히, 1990년대에는 상황 속에서 제기되는 문제를 해결해 가는 과정과 방법 등에 대한 연구에 관심이 고조되었다. 이런 면에서 문제 해결 교육은 사회적이고 발달적인 관점을 취하며, 문제 해결의 유용한 전략도 주어진 상황과 무관하지 않다는 특징이 있다. 그러나 문제 해결에 대한 관심이 고조되었던 시기에서도 문제 해결에 대한 연구는 수학 교육 사회가 문제 해결에 대한 지식을 다 알고 있다고 생각하고, 의사소통

1) Psychology in Mathematics Education
2) 제시된 기간들은 대략적인 것이지만, 연대의 순서는 타당하다.

· 추론 · 연결성과 같이 새로 제기된 여러 이슈에 대한 관심으로 인해 그 연구가 쇠퇴하고 있다고 [9]는 제시하고 있다. 이에, 문제 해결에 대한 더 많은 관심과 새로운 측면의 연구가 요구되며, 이것은 모델링 관점으로의 변화가 적합할 것이다.

2. 수학적 모델링 관점과 문제 해결

수학 교육은 학생들이 각자의 삶을 살아가는데 있어서, 수학적 지식을 활용하여 삶 속에서 부딪히는 다양한 상황을 이해하고 예측하고 통제하는 능력을 길러 주는데 초점을 두어야 한다[2]. 이를 위해서 먼저 주어진 상황을 전체적으로 조감하고 그 속에서 여러 가지 요소와 관계를 분석하고 탐구할 수 있는 교수학적 환경이 필요하며, 실제로 학생들로 하여금 그 환경 속에서 추론하고 개념적 지식과 절차적 지식을 적용하고, 동료들과 의사소통 할 수 있도록 해야 한다. 이러한 교수학적 환경은 실생활에서 출발하여 의미 있는 수학적 상황으로 번안하는 수학화를 포함하는 수학적 모델링 과정을 강조하는 환경에서 구축될 수 있다.

수학적 모델링은 비수학적 대상, 또는 과정에서 수학적 표상을 찾는 것으로, 대상이나 체계 또는 과정의 중요한 특징을 조정하는 수학적 구조나 이론을 세우는 것을 말하며[6], 수학 교육에서 여러 가지 함의점을 제공한다. 첫째, 수학적 모델링은 어떤 현상에 대한 문제를 해결하기 위하여 원래의 문제 상황을 수학적으로 표현하고 번안하는 수학화를 중시한다[7]. 프로이덴탈은 수학적 사고 활동의 본질을 수학화로 보고, 학습자의 현재 상황에서 출발하여 이를 정리하고 조직하는 수단으로서 수학을 이해하는 수학화를 강조하고 있다. 이와 같이 수학화는 수학적 모델링과 거의 같거나 유사한 의미이다.

둘째, 한 체계에서의 개념이나 문제 상황을 다른 체계로 번안(translation)하여 내면화하거나 해결하는 수학적 모델링은 모델링 과정이 전이를 쉽게 일어나도록 할 수 있음을 의미한다. 일상에서의 경험이 모델링 과정을 통해 수학적으로 재조직 될수록 한 체계에서 다른 체계로 쉽게 전이되어 요소들 사이의 관계 구조의 파악이 용이하고, 이를 바탕으로 실세계에 비추어 제기된 문제를 해결 할 수 있다.

셋째, 수학적 모델링은 수학과 다른 과목 또는 일상 생활과의 연결성을 강조한다. 이러한 수학적 모델링 과정은 새로운 수학적 개념을 도입하거나 개발된 수학적 개념을 새로운 상황에 적용하고 문제를 해결하는 데 유용하며, 수학 교수 · 학습이 완결된 지식의 획득이 아닌, 지속적인 모델의 구안과 수정을 통해 원 개념의 이해에 초점이 맞추어져야 함을 의미하며, 다음과 같은 목적을 달성할 수 있다.

새로운 수학적 개념과 방법을 이해한다.

실생활 또는 다른 교과에서의 수학의 응용과 모델링의 실제를 이해한다.

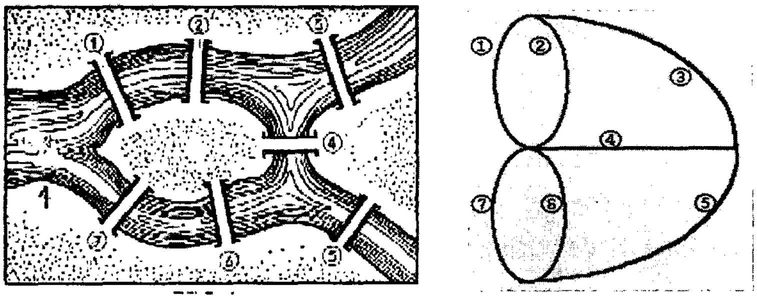
창의적 사고와 문제 해결 태도, 활동, 능력을 기른다.

수학을 활용하여 실생활 또는 다른 교과와 연결된 맥락을 비판적이고 합리적으로 사고하려는 태도를 기른다.

수학이 이미 완성된 산물이 아니라, 인간 활동의 결과로 만들어진 것임을 이해한다[5, p. 173에서 재인용].

한편, 모델링되고 있는 대상이나 과정에 모델을 이용할 수 있다. 이러한 모델은 특별한 문제 상황을 기술하기 위해 사용되는 하나의 간단한 문장에서 표나 그래프, 수식, 다이어그램, 구체물, 은유, 시뮬레이션 도구와 같은 다면적이고 복잡한 체계를 포함하며, 수학적 관행에 맞도록 구안된 표현 체계를 의미한다. 이에 수학적 모델은 현실 상황을 정리하고 조직하고 분석하기 위해 만들어진 수학적 구안물을 의미한다. 모델은 외면적인 표현 체계를 사용함으로써 표현되며, 다른 체계의 움직임을 구성하고 기술하거나 설명하기 위해 사용되는 개념적 체계이다[8].

예를 들어, 오일러(Leonhard Euler, 1707~1783)에 의해 제시된 그래프 이론은 (그림 1)과 같이 4개의 지점을 연결하는 7개의 다리로 구성된 도로를 산책하는데, 한번 지나간 다리는 다시 지나가지 않는 산책 방법이 가능한가에 대한 문제를 해결하고자 하는 현실 상황에서 출발하였다.



(그림 1) 쾨니히스베르크의 다리와 그 그래프

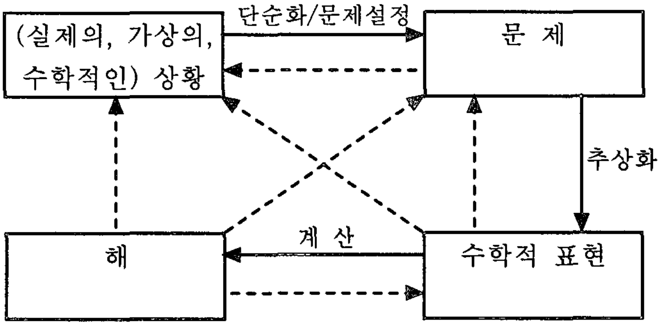
오일러는 이 문제를 해결하기 위하여 4개의 각 지점을 점으로, 7개의 다리를 선으로 표현하는 '점과 선으로 이루어진 그래프'라는 수학적 모델을 구안하여 이 문제를 해결하였다. '쾨니히스베르크의 다리'라고 알려진 이 그래프 이론은 각 도시를 연결하는 도로망, 항공망, 통신망뿐만 아니라, 컴퓨터 네트워크, 고집적 회로의 설계 등 다양한 분야에서 현재에도 응용되고 있다.

이와 같이, 수학적 모델링은 수학 교육 현장에서 학생들이 친숙하게 접할 수 있는 여러 현상에서 출발하여 이를 정리 · 조직하기 위한 수단으로 수학을 도입하는 실제를

수학화하는 과정과 추상화 과정에서 얻은 사실을 다시 현상에 적용하는 수학을 실제화하는 과정을 동시에 추구할 수 있는 측면에서 수학의 유용성과 교수학적 의의를 가진다[3].

정보처리 관점에 바탕을 둔 전통적인 문제 해결에서는 잘 정의된 조건에서 목표로 진행하는 경로를 발견하는 것에 중점을 두며, 문제에 주어진 조건을 수학적 표현으로 바꾸는 번안 기술의 습득을 주요 관심사로 다루었고, 이 경우에 수학은 상황과 분리되어 학습되었다.

그러나, 모델링 관점에서 문제 해결은 실제적인 상황에서부터 출발하여 상황에 주어진 요인을 분석하여 문제를 구성하는 문제 설정을 중시한다. 설정된 문제는 원 상황의 필수적인 요인들을 내포하고 있으면서도 이해하기 쉽고 해결하기가 용이하다는 특징이 있다. 다음은 수학적 표현을 도입하는 추상적인 측면이 도입되고 수학적 결론을 이끌어 내는 과정이 따른다. 이 과정에서 문제 해결자는 그가 가지고 있는 수학적 사실, 추론 능력 등을 이용한다. 산출된 해는 실제 상황에 적용될 뿐만 아니라, 각 단계에서 얻어지는 결과물은 문제 해결 행동이 일어나는 모든 과정 중에서 서로 비교해 보고 해석하는 메타인지 활동을 중시한다(점선). 따라서, 이 관점에서 문제 해결자는 자신의 수행과정과 사고과정을 되돌아보고, 각 단계의 결과를 현실에 적용 가능성의 측면에서 반성하는 과정을 통해서 복잡한 수학적 사고의 발달을 경험할 수 있다. 이 과정을 (그림 2)와 같이 요약할 수 있다.



(그림 2) 모델링 관점에서 수학 문제 해결의 과정[10, p. 514]

모델링 관점에서 문제 해결은 실제적인 상황에서 주어진 문제를 파악하고 절차를 선택하고 이를 수행하는 것을 강조하며, 학생들은 문제를 해결하기 위하여 유용한 모델을 구안하고 이를 해석하고 기술하고 수행해야 한다. 이것은 전통적인 학교 수학 프로그램에서 교사에 의해서만 가르쳐지는 여러 가지 문제 해결 전략만으로는 현재의 상황을 해석하고 분석하고 해결하는데 한계가 있다는 것을 의미한다. 그리고, 모델링 관점에서 문제 해결에 유용한 절차와 전략은 상황을 어떻게 해석하는가에 의존하기

때문에 내용이나 상황에 독립적이지 않다. 즉, 절차와 전략은 사용되는 목적이나 상황에 따라 생산성이 달라질 수 있다. 또한, 이 관점은 문제 해결자가 모둠에서 서로 협동하여 문제를 해결하는 팀의 일원으로 행동할 수 있는 사회적 차원을 중시한다[15]. 이러한 사회적이고 발달적인 관점은 학생들이 내리는 초기의 해석을 문제의 특성에 비추어 지속적으로 수정해 가도록 이끄는 원동력이 된다.

그러면, 삼원 일차 연립방정식을 내포하는 실세계 상황에서 수학적 모델링을 통한 문제 해결의 예를 들어보자. 학생들은 가게에서 묶음으로 파는 음료수를 사야 하는 상황에 자주 접하고, 이때 현명한 판단을 해야 한다. 어느 가게에서 세 종류의 음료수가 서로 다른 종류로 2~3개씩 묶음으로 파는데, 두 종류의 2개 묶음은 각각 900원, 1000원, 1100원에 팔고, 세 종류의 3개 묶음은 1450원에 판매한다. 학급 학생에게 줄 음료수를 사기 위하여 어떻게 사는 것이 현명한가?

이 문제 상황을 모델링하기 위하여 학생들은 그림으로 그려보고, 문자를 도입하여 수학적 모델인 수식(방정식)으로 표현할 수 있다. 학생들은 교사의 특별한 안내 없이도 문제에 접근해 갈 수 있으며, 서로 협동하고 토론을 통하여 수학적 결론을 이끌어 낼 수 있고 상황에 타당한 해석을 제시할 수 있다. 이러한 과정에 교사는 학생들의 수행 과정을 모니터링하고, 수행 결과에 대하여 학문적인 체계로 이끌어 주는 제도화 과정을 제공해야 한다. 이와 같이, 실세계의 도전적인 과제로부터 제기되는 상황에서 문제를 설정하고 해결해 가는데 수학적인 도구를 활용하여 접근해 가는 모델링 관점은 수학을 하는 과정을 강조한다.

3. 결론

수학의 역사는 문제 해결의 역사라고 할 수 있다. 20세기에 들어와 듀이의 생활 중심의 문제 해결에서 시작된 문제 해결의 역사는 21세기에 들어와 새로운 전기를 맞이하고 있다. 이것은 기존의 문제 해결이 인위적으로 조직된 상황에 수학적 사실을 적용하는 측면을 강조해 왔다는 반성에서 시작되었다.

이런 면에서, 현실 세계의 여러 현상을 출발점으로 하여, 이를 정리・조직하는 수단으로서 수학적 모델을 구안하는 수학적 모델링을 통한 문제 해결이 강조되고 있다. 특히, 수학적 모델링은 실세계의 현상에서 출발한다는 의미에서 수학화의 원리와 그 맥을 같이 한다고 볼 수 있다. 그리고, 수학적 모델링은 수학의 실용성을 확인시켜 주는데 유용하고, 폭 넓은 수학의 응용을 경험할 수 있는 기회를 제공하며, 모델링 과정에서 얻은 지식이나 기능은 새로운 상황에 적용 가능하다.

이에, 수학 교사는 풍부한 수학적 내용이 내포되어 있는 실생활의 상황을 구안하여 학생들이 이를 탐구할 수 있는 기회를 제공해 주어야 하며, 이를 통해 수학의 유용성

을 인식하고 탐구하고 발견해 가는 수학적 힘을 신장시키도록 이끌어 주어야 한다.

참고 문헌

1. 교육부, 제7차 수학과 교육 과정, 서울: 대한교과서주식회사, 1997.
2. 류희찬, "수학교육에서 '모델링' 지도의 의미와 방안", 청람수학교육 11(2003), 1-19.
3. 신은주 · 이종희, "모델링 과정에서 지각적, 인지적, 메타인지적 활동의 상호작용에 관한 사례", 학교수학 6(2)(2004), 153-179.
4. 우정호, 학교수학의 교육적 기초, 서울: 서울대학교 출판부, 1998.
5. 조완영, "미적분 영역에서의 모델링", 청람수학교육 11(2003), 167-187.
6. Dreyfus, I., "The psychology of advanced mathematical thinking", in Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991, 25-41.
7. Leherer, R. · Schauble, L., "Origins and evolution of model-based reasoning in mathematics and science", in Lesh, R. · Doerr, H.M.(Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching,* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 2003, 71-96.
8. Lesh, R. · Doeer, H.M., "Foundations of a model and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving", in Lesh, R. · Doerr, H.M. (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching,* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 2003, 3-33.
9. Lester, F.K., "Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994," *Journal for Research in Mathematics Education* 25(6)(1994), 660-675.
10. Lester, F.K. · Kehle, P.E., "From problem solving to model: the evolution of thinking about research on complex mathematical activity," in Lesh, R. · Doerr, H.M. (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching,* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 2003, 501-517.
11. NCTM., *An Agenda for Action: Recommendation for School Mathematics of the 1980's,* NCTM, 1980.
12. ______, *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics,* Reston, V.A.: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc, 1989.

13. ______, *Principles and Standards for School Mathematics,* Reston, V.A.: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc, 2000.
14. Wertheimer, M., *Productive Thinking,* New York: Harper & Brothers Published, 1945/ 矢田部達郎 譯, 生産的 思考, 岩波現代叢書, 1952.
15. Zawojewski, J.S. · Lesh, R., "A models and modeling perspective on problem solving," in Lesh, R. · Doerr, H.M.(Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching,* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 2003, 317-336.

The History of Mathematical Problem Solving and the Modeling Perspective

Korea Institute of Curriculum and Evaluation **Lee Dae Hyun**
Dept. of Math. Edu., Jeonju National Univ. of Education **Seo Kwan Seok**

In this paper, we reviewed the history of mathematical problem solving since 1900 and investigated problem solving in modeling perspective which is focused on the 21th century. In modeling perspective, problem solvers solve the realistic problem which includes contextualized situations in which mathematics is useful. In this case, the problem is different from the traditional problems which are routine, close, and words problem, etc.

Problem solving in modeling perspective emphasizes mathematizing. Most of all, what is important enables students to use mathematics in everyday problem solving situation.

Key words: problem solving, mathematical modeling, mathematizing, modeling perspective, mathematical model.
2000 Mathematics Subject Classification: 97D50, ZDM Classification: D50