

## 펠릭스 클라인의 수학과 교육 개혁

배재대학교 전산정보수학과 김성숙  
sskim@mail.pcu.ac.kr

대구가톨릭대학교 수학과 김주영  
jykim@cu.ac.kr

펠릭스 클라인은 현대 기하학이 나아갈 새로운 방향을 제시하여 현대 수학에 큰 영향을 미쳤을 뿐만 아니라 수학 교육의 개혁을 주도하여 유능한 과학자들이 탄생하는 데 크게 기여하였다. 2004년 7월 국제 수학 교육 위원회(ICME)에서 처음으로 펠릭스 클라인 메달이 수여된 것을 계기로, 클라인이 에를랑겐 대학교에 교수로 취임되면서 강연하였던 '에를랑겐 계획'을 소개하고 그가 현대 수학과 수학 교육에 끼친 영향을 고찰하고자 한다.

주제어 : 클라인, 에를랑겐 계획, 기하학, 변환군론

### 0. 서론

국제 수학 교육 위원회(ICMI, International Commission on Mathematical Instruction)의 국제 위원회는 역사상 처음으로 수학 교육에서 현저한 업적을 인정하는 상을 만들려고 몇 년 전부터 준비해왔다. 이 상은 2003년에 처음으로 수여되었는데, 1908년부터 1920년까지 ICMI의 초대회장으로 봉사하며 수학과 수학 교육에 위대한 업적을 남긴 펠릭스 클라인(Felix Klein)과, ICMI의 8번째의 회장으로 봉사하면서 수학 교육에 중요한 업적을 남긴 한스 프로이덴탈(Hans Freudenthal)의 이름으로 '펠릭스 클라인 메달'과 '한스 프로이덴탈 메달'을 만들었다. 이 상은 홀수 해에 상을 수여하고 그 다음에 열리는 국제 수학 교육 회의(ICME, International Congress on Mathematical Education)에서 메달을 증정하고 메달 수상자들을 초청하여 강의를 듣게 되어 있다. 2004년 7월 ICME에서 처음으로 펠릭스 클라인 메달이 수여되었다.

또한 유럽 수학회에서는 1999년 펠릭스 클라인 상을 제정하여 2000년에 처음으로 상을 수여하였다. 21세기를 열며 그의 이름을 딴 펠릭스 클라인 상이 수여된 것을 계기로 펠릭스 클라인의 수학과 그가 에를랑겐 대학교에 교수로 임명될 때, 관례에 따라 취임강연을 한 '에를랑겐 계획'(Erlangen Program)을 소개하고 그가 현대 수학과 수학 교육에 끼친 영향을 생각해보고자 한다.

## 1. 본론



일반인에게 클라인 병(Klein bottle)으로 더 유명한 펠릭스 클라인(Felix Klein)은 1849년 4월 25일 독일 뒤셀도르프에서 태어났다. 그는 그가 태어난 해( $43^2$ ), 달( $2^2$ ), 일( $5^5$ )이 모두 소수(prime number)의 완전제곱으로 나타내지는 수라는 것을 즐거워했다[8]. 그는 뒤셀도르프에서 초·중·고등학교를 마치고, 1865년에서 1866년까지 본(Bonn) 대학에서 수학과 물리학을 공부하였고 물리학자가 되려고 하였다.

1866년에는 본 대학에서 수학과 실험물리학과장인 플뤼커(Plücker) 교수의 조교를 하였다. 그때 플뤼커 교수는 기하학에 대해 큰 관심을 갖기 시작하였다. 클라인은 플뤼커 교수 지도로 1868년 본 대학에서 19세의 나이에 박사학위를 받았고, 그가 박사학위를 받은 해에 그의 지도교수가 선 기하학<sup>1)</sup>의 기초에 대한 연구를 끝내지 못하고 사망하였다. 클라인은 그의 스승인 플뤼커 교수의 저서 새로운 공간 기하학(Neue Geometrie des Raumes)의 뒷부분을 완성하였다[6]. 이 연구를 통하여 그는 클레브슈<sup>2)</sup>와 잘 알게 되었고 클레브슈가 1868년 괴팅겐으로 옮긴 후, 클라인은 괴팅겐, 베를린 대학 등을 방문하여 연구하였다.

1870년 파리로 유학하여 노르웨이<sup>3)</sup> 수학자 리(Marius Sophus Lie)를 비롯한 많은 프랑스 수학자들에게 배웠다. 특히 리와의 만남은 그의 생애에 큰 영향을 끼쳤다. 그는 리로부터 군론(group theory)의 중요성을 배우게 되었고 그 뒤 두 사람은 군론의 두 가지 분야를 집중적으로 연구하였다. 그들은 쿠머(Kummer) 곡면 위의 점근선들의 기본적인 성질들을 발견하였다. 또한 사영 변환군에서 불변하는 W-곡선에 대하여 연구하였다[9]. 클라인은 이 군 개념을 기하학과 연결시켜 연구하였고 이 연구는 그가 에를랑겐 대학의 교수로 취임할 때 발표한 ‘에를랑겐 계획(Erlangen Program)’에도 큰 영향을 미쳤다. 그 후 보불(프로이센-프랑스) 전쟁이 일어나 곧 독일로 귀국하였다.

그는 1882년 클라인 병을 발견하였는데, 이 병은 2차원의 다양체이면서 바깥면과

- 
- 1) line geometry, 선(line)을 원소(element)로 생각하여 연구하는 기하학으로 사영 기하학의 일종이다.
  - 2) Rudolf F. Alfred Clebsch(1833~1872) 독일 수학자. 쾰니히스베르크 출생. 쾰니히스베르크 대학에서 수학과 물리학을 공부하였다. 카를스루에 공업대학 교수, 기센 대학, 괴팅겐 대학 교수를 지냈다. 초기에는 수리 물리학과 물리 분야를 연구하였고, 1868년 괴팅겐 대학에서 리만 교수의 자리를 물려받았으며 대수학과 기하학 분야를 개척하여 변분학, 편미분 방정식, 곡선 및 곡면론 등에 많은 업적을 남겼다.
  - 3) 이때는 노르웨이가 스웨덴의 식민지였다.

안면이 구별되어 있지 않은 면이 하나밖에 없으며 경계(boundary)가 없는 곡면이다. 클라인 병은 3차원의 유클리드 공간에서 존재할 수가 없고 4차원의 유클리드 공간이나 비유클리드 공간인 사영 평면(projective plane)에 존재하는 병이다. 그는 이 클라인 병의 존재를 통하여 새로운 기하의 국면을 열었다.

그는 또한 5차 방정식에 대한 새로운 해법도 창안하였다. 1824년 노르웨이 수학자 아벨(Niels Henrik Abel)은 5차 방정식은 대수적으로 풀 수 없음을 증명했다. 그러나 클라인은 정20면체(icosahedron)의 변환군을 고찰하여 대수적으로는 풀 수 없는 이 5차 방정식의 해를 구하는 데 성공했다. 그는 정다면체의 회전군(rotation groups of regular solids)을 대수적인 문제에 응용하였다. 기하학을 이용하여 대수적인 문제를 푼 것이다. 1884년에 정20면체에 관한 책을 출판하였다.

그는 또한 프랑스의 푸앵카레와 많은 토론을 통하여 복소변수 함수 중 일차 변환에도 변하지 않는 해석 함수인 오토모르픽 함수(automorphic functions)의 연구에도 기여했다[9]. 그는 리만 곡면도 다시 정의하여 복소 함수론에서 리만 곡면이 매우 중요한 역할을 하도록 기여하였다. 부라우(W. Burau)와 쇤베르크(B. Schoenberg)에 의하면 클라인 자신은 그가 가장 기여한 분야는 기하학이 아닌 함수론이었다고 생각하였다고 한다[2].

사실 그는 수학의 모든 분야에 기여하였다고 볼 수 있다[10]. 1871년 그는 두 논문을 발표했는데, 그 논문에서 그는 ‘만약 유클리드 기하학이 모순이 없다면 비유클리드 기하학도 모순이 없다.’는 것을 보였다. 그 후 에를랑겐 계획에서 그는 당시 기하학이 나아가야 할 새로운 방향을 제시하였다.

### 1-1. 에를랑겐 계획

19세기에 와서 유클리드 기하학이 유일한 기하학 아니며 사영 기하학(projective geometry), 아핀 기하학(affine geometry), 쌍곡 기하학(hyperbolic geometry), 타원 기하학(elliptic geometry), 구면 기하학(spherical geometry) 등 여러 기하학이 등장하기 시작했다. 기하학이 무엇이며, 대칭(symmetry)은 무엇이며, 기하학에서 대칭은 어떤 역할을 하는가? 하는 질문이 제기되었다.

클레브쉬는 클라인을 그 시대의 수학을 이끄는 연구자로 인정하고 지지를 해주어서, 1872년 23세의 나이에 클라인은 독일 남부 바바리아(Bavaria) 지역에 있는 에를랑겐 대학교에 교수로 임명되었다. 그는 관례에 따라 전공에 관련한 취임 강연을 하게 되었다. 이 강연에서 그는 당시 기하학 연구에 새로운 방향을 제시하였는데, 이것이 유명한 ‘에를랑겐 계획(Erlangen Program)’이다. 그의 강연 주제는 ‘기하학이란 어떤 변환군에 의해 변하지 않는 성질을 연구하는 것으로서 변환군의 분류에 의해 기하학 분류가 가능하다.’는 것이었으며 강연 원고를 청중에게 배포하였는데 실제로 강연은

하지 않고 글로만 발표하였다고 전해진다.

자신과 리의 군론에 관한 연구에 기초를 둔 이 강연에서, 당시 존재하던 모든 기하학을 통합하여 군론의 입장에서 기하학을 분류하고 본질적으로 특성화하여 분류하는데 기여하였고, 기하학이 나아갈 새로운 방향을 제시하였다. 변환군의 분류가 기하학의 분류가 될 수 있음을 보였다. 이 계획에서 그는 프랑스의 몽주(Gaspard Monge)<sup>4)</sup>가 체계화시킨 화법 기하학의 기본 개념을 더욱 발전시킴으로써 기하학적인 문제를 불변 이론(invariant theory)을 바탕으로 이해하고자 했다. 또한 이 계획을 수행하는 과정에서 그는 가우스와 리만이 발전시킨 비유클리드 기하학을 사영 기하학적 관점에서 파악하였다.

그는 여러 기하학들이 변환군(transformation group)과 연관이 있음을 제시하였다. 예를 들면, 유클리드 기하학은 합동 변환(길이와 각을 변화시키지 않는 대응)에 의해 불변인 도형의 성질을 연구하는 기하학이므로 합동 변환군과 연결되고, 아핀 기하학은 아핀 변환에 의해서 변하지 않는 도형의 성질을 연구하는 기하학이므로 아핀 변환군과 연결되며, 사영 기하학은 사영 변환에 의해서 변하지 않는 도형의 성질을 연구하는 기하학이므로 사영 변환군과 연결되어 정의될 수 있다. 하나의 변환군에 연결되는 기하학과 그 부분군(subgroup)과 연결되는 기하학의 경우, 큰 군(group)에 연결되는 기하학이 그 부분군과 연결되는 기하학보다 더 일반화된 기하학이다. 유클리드 군(Euclidean group)이 아핀 군(affine group)의 부분군이므로, 아핀 기하학은 유클리드 기하학보다 더 일반화된 기하학이고 아핀 군은 사영군(projective group)의 부분군이므로, 사영 기하학은 아핀 기하학보다 더 일반화된 기하학이다. 아핀 기하학은 유클리드 기하학에서 길이와 각의 개념을 일반화한 기하학으로 유클리드 기하학보다 일반적이며, 사영 기하학보다 특수한 기하학이다. 그는 변환군론을 이용하여 기하학을 변환군을 갖고 있는 한 공간(space)으로 정의한 것이다. 이런 변환군들은 현재에는 리군(Lie Group)으로 불리며 행렬군(matrix group)을 이용하여 간단하게 표현할 수 있다.

또한 유클리드 기하학의 공리 중 '직선 밖의 한 점을 지나면서 이 직선과 만나지 않는 직선은 단 한 개 존재한다.'는 평행선의 공리를 '직선 밖의 한 점을 지나면서 이 직선과 만나지 않는 직선이 적어도 두 개 존재한다.'로 치환해서 얻어지는 공리계가 쌍곡 기하학이며, 또 '두 개의 직선은 반드시 만난다'로 치환해서 얻어지는 공리계가 타원 기하학이다. 클라인은 구면기하학을 타원 변환군과 연결되는 기하학으로 보았고 쌍곡 기하학은 쌍곡 변환군과 연결되는 기하학으로 보았다. 이런 관점으로 클라인은 당시 각각 별도로 연구되어 왔던 여러 기하학을 하나로 묶어 그들 사이의 상호 관계

4) 프랑스 본(Beaune) 태생의 수학자이며 물리학자. 3차원의 입체를 2차원 평면에 표현하는 화법 기하학(descriptive geometry)을 창시하였다. 미분 기하학의 아버지라 불리며 편미분 방정식에도 업적을 많이 남겼다. 저서로 '화법 기하학' '기하학에의 해석학의 응용' 등이 있다.

를 명확히 하고 기하학이 나아갈 새로운 방향을 제시했다. 한편 1916년 아인슈타인이 일반 상대성 이론에 응용한 이후 중요시되어 연구되었던 리만 기하학은 일반적으로 항등 사상(identity map) 이외에는 변환군을 갖지 않는 집합을 연구 대상으로 했기 때문에 에를랑겐 계획에는 포함되지 않았다. 에를랑겐 계획이 모든 기하학을 통합한 것은 아니지만, 기하학에 대한 클라인과 리의 깊은 통찰은 현대 기하학에 크게 기여하였다.

## 1-2. 뮌헨 대학과 괴팅겐 대학의 클라인

에를랑겐 대학의 수학과에는 학생들이 많지 않아서 그는 제자를 많이 길러내지 못하였다. 1875년에 뮌헨 공업 대학의 학과장으로 가게 된다. 그는 1880년까지 5년 동안 뮌헨 공업 대학 교수로 있으면서 유명한 수학자인 후르비츠(Hurwitz), 폰 디(von Dyck), 론(Rohn), 룡계(Runge), 프랑크(Planck), 비안치(Bianchi), 리치-쿠르바스트로(Ricci-Curbastro) 등을 가르쳤다. 1875년에 그는 유명한 철학자 헤겔(Georg Wilhelm Friedrich Hegel)의 손녀인 안네 헤겔(Anne Hegel)과 결혼했다[9].

1880년부터 1886년까지 라이프치히 대학의 기하학과 학과장을 역임하였다. 조용한 수학자이며 또한 여러 수학 저널의 편집인, 우수한 강의자, 과학적 행정가로 열심히 활동하던 그는 1882년에 건강이 나빠지기 시작하였고 1883년부터 1884년까지 우울증에 시달렸다. 연구자로서의 그의 경력은 이때 마감하고, 그 후 그는 탁월한 행정가와 우수한 교육자로 활동하였다.

1886년에 괴팅겐 대학에 학과장으로 부임한 후부터 학문 활동보다는 과학조직가로서 많은 공헌을 하였다. 라이프치히 대학의 기하학 학교(geometrical school)에서는 기하학 연구를 이끄는 선도자의 역할을 하였지만, 괴팅겐 대학에서는 그 역할이 미미하였다. 괴팅겐 대학에서는 주로 수학과 물리학과 관련된 여러 과목을 가르쳤다. 이곳에서 그는 세계적으로 유명한 수학 연구소를 만들어 쾨니히스베르크(Königsberg)에 있던 힐베르트(Hilbert)를 초대해 함께 연구하였다. 또한 매주 세미나를 열고, 수학과 도서관을 만들어 그들이 이 대학에서 공부하거나 가우스(Gauss), 디리클레(Dirichlet), 리만(Riemann)의 훌륭한 계승자로서 재직하여 괴팅겐 대학 수학과를 20세기 초에 세계 수학의 중심이 되도록 하는 데 기여하였다[9].

## 1-3. 괴팅겐에서의 교육 개혁

그가 괴팅겐 대학에 학과장으로 재임하던 시절, 대학 교수 중에서 수학 교육 개혁 운동을 가장 집요하고 영향력 있게 추진하였다. 그의 주도 아래 응용 수학과 순수 수학의 만남이 이루어졌다. 이때에는 응용 수학이 정식으로 교육 과정에 들어 있지 않았다. 1898년에 프로이센에 있는 대학 중에서는 처음으로 응용 수학을 정식 교육 과정에 채택하였다. 수학에 대한 그의 태도는 융합적이며 직관적이었고, 응용 수학, 즉

수학을 물리학이나 공학에 응용하는 데 지대한 관심을 가졌으며 수학, 자연과학, 공학은 서로 통합적으로 발전해야 한다고 생각하였다. 클라인은 자신의 기하학적 선구자인 몽주와 마찬가지로 빌헬름 시대의 대학 및 중등 교육 개혁 과정에서 프랑스식의 이상형, 즉 파리의 에콜 폴리테크니크를 모범으로 삼고 교육 개혁 운동을 진행시켰다. 프랑스혁명 과정에서 생겨난 에콜 폴리테크니크 출신의 우수한 수학자들은 상당수가 유명한 공학자들이기도 했는데 클라인은 이것이 바로 당시 독일의 대학이 본받아야 할 점이라고 생각했다. 그는 수학을 물리학이나 기술에 응용하는 데 지대한 관심이 있었으며, 빌헬름 시대의 교육 개혁 과정에서 수학, 자연과학, 공학의 통합이라는 자신의 생각을 관철시키려고 노력했던 것이다. 고등 기술 학교와 대학의 통합을 추진하던 클라인은 공학자들과의 긴밀한 관계를 유지하기 위해 1895년 대학 교수의 신분으로 독일 공학자 협회에 회원으로 가입했으며, 공학자들에게도 박사학위를 수여하고, 고등 기술 학교가 박사학위를 줄 수 있도록 노력했다.

클라인의 이런 개혁 활동은 그의 절친한 친구이며 프로이센<sup>5)</sup> 정부 관리였던 알트호프(Friedrich Althoff)와의 협력을 통해서 이루어졌다. 두 사람의 끈질긴 노력과 카이저의 호의 속에서 마침내 고등 기술 학교는 1899년 처음으로 박사학위를 수여할 수 있게 되었고 중등 학교 교육 개혁이 추진되었는데 그 동안 차별 대우를 받던 실업계 김나지움과 상급 실업 학교도 이때부터 전통적인 김나지움과 동등한 대우를 받게 된다. 이것이 공학박사 학위의 시초로 여겨진다. 알트호프는 '과학의 중재자'라고 일컬어졌는데, 프로이센의 대학 개혁과 고등 기술 학교의 급성장, 중등 교육의 개혁 등은 거의 대부분 그의 재직 중에 이루어졌다. 독일 연방제가 성립한 후 교육은 제국의 관할 아래 있던 것이 아니라 개별 국가에 맡겨져 있었다. 그러나 프로이센의 교육 개혁은 전체 독일어권 교육 정책의 변화에 커다란 의미가 있다. 우선 프로이센은 독일의 개별 국가 중에서 가장 크고 영향력이 강했으며, 당시 21개의 독일 대학 중 10개를 포함하고 있었다. 또한 프로이센의 교육 정책은 다른 개별 국가의 모범이 되었기 때문에 프로이센의 교육 정책의 향방은 다른 개별 국가의 교육 정책의 흐름에도 커다란 영향을 미쳤다. 이런 의미에서 클라인과 알트호프의 연결은 역사적 의미를 갖고 있다 [1].

이런 자연과학과 수학을 강조하는 중등 교육의 개혁은 프로이센 이외의 다른 독일어권 국가에도 파급되었으며, 20세기 초에 큰 활약을 하게 되는 물리학자들의 학창 시절 교육에 커다란 영향을 미쳤다. 1905년 26세의 젊은 나이에 에테르 개념과 고전 물리학의 절대 시공 개념을 부정하고 광속도 불변의 원리와 새로운 동시성 개념을 바탕으로 특수 상대성 이론을 주창했던 아인슈타인에게도 큰 영향을 미쳤다. 개혁되지 않았던 독일 학교의 엄하고 현학적인 단체 훈련 속에서 아인슈타인은 적응을 잘하지

5) 당시 프로이센은 독일의 일부이지만 자치정부를 가진 국가의 형태였다. 영어로는 프리시안이라 부름.

못하고 역사, 지리와 어학에서 낮은 점수를 받아 졸업장도 못 받고 학교를 그만두었다. 후에 그는 프로이센 교육 개혁의 영향을 받아 수학과 실용적 학문을 강조하는 자유로운 분위기의 개혁 중등 학교인 스위스 아라우에 있는 칸톤 학교에서 교육을 받으며 자신의 학문적 세계관과 독창적인 사고를 형성하였다. 그 이외에 상대성 이론의 형성과 수용에 직접 또는 간접적인 영향을 미쳤던, 많은 학자들도 개혁 중등 학교 출신이었다[1].

이런 클라인의 영향 아래 괴팅겐 수학자들은 지구 물리학, 상대성 이론, 양자 물리학 분야에 진출하여 이론 물리학 분야가 형성되는 데 커다란 역할을 했다. 막스 플랑크 유체학 연구소의 설립 과정에서 드러났듯이 괴팅겐 수학자들은 항공 우주와 같은 공학 분야에서도 선구자적인 역할을 했다. 더 나아가 산업체와 대학을 연결하는 산학 협동을 독일 최초로 이루어낸 사람 역시 수학자였던 클라인이었다. 수리 과학이 처음부터 실용적인 산학 협동 활동에서 소외된 것은 아니었다.

#### 1-4. 클라인의 업적과 명예

그는 학교일 외에도 많은 수학 저널의 편집인으로 일하다가 1913년에 건강이 악화되자 괴팅겐 대학을 은퇴한다. 그러나 그는 1차 세계 대전 동안 그의 집에서 수학을 가르쳤다. 그는 대학 수학 교육뿐만 아니라 중·고등 학교 수학에도 지대한 관심을 보여 미적분과 함수를 고등 학교 수학 과정에 넣도록 노력하였다. 초대 ICMI의 회장이 된 후에 그는 많은 수학 교육에 관한 책을 출판하도록 영향력을 미쳤으며 실용적 측면, 심리학적 측면, 교수학적 측면, 그리고 수학적 측면에서 건전한 수학 교육의 실현을 부르짖었다. 그는 여성 수학자들이 박사를 받을 수 있게 하는 데에도 기여하였다.

그는 1885년에 왕립학회의 위원으로 뽑히고, 1893년에 런던수학회로부터 드 모르간 메달<sup>6)</sup>을 받았으며 1912년에는 왕립학회의 코플리(Copley) 메달<sup>7)</sup>을 받았다. 그는 잡지 <Mathematische Annalen>을 비롯한 각종 수학 저널의 편집인이었으며 수학대백과사전(The Great Mathematical Encyklopadie)의 편집인으로 있으면서 19세기의 수학계를 이끌었다. 그는 또한 ICMI의 첫 번째 회장을 역임하였고 2003년에 ICMI는 그의 이름을 따서 수학 교육에서 뛰어난 업적을 갖고 있는 수학 교육학자에게 수여하는 클라인 메달을 만들어 그를 기념하고 있다. 또한 1999년 EMS(European Mathematical Society)에서도 38세 이하의 젊은 과학자나 연구 그룹에게 주는 펠릭스 클라인 상을 제정하였다.

6) 영국수학회에서 첫 번째 회장이었던 드 모르간(De Morgan) 교수를 기리기 위해 제정된 메달이며 3의 배수가 되는 해에 수여한다. 영국수학회에서 수학자에게 주는 상중에 가장 큰 상이다.

7) 1660년 만들어진 영국 왕립학회에서 과학자들에게 수여하는 메달 중 가장 명예로운 상이다.

또한 일반인에게도 유명한 클라인 병뿐만 아니라 그의 이름을 따서 부르는 클라인 사원군(Klein four group)도 유명하다. 이 이름은 푸앵카레가 붙인 것이라고 한다. 추상 대수학에 나오는 클라인 사원군은 가장 작은 비순환군(non-cyclic group)이며, 클라인 4차 방정식  $x^3y + y^3z + z^3x = 0$ 의 해는 리만 곡면이며 복소수 상에서 종수(genus) 3인 곡면으로 널리 알려져 있다.

클라인은 또한 학생들에게 생기를 불어넣는 명강의로 유명한 타고난 선생이었으며 56명의 박사를 배출하였다[7]. 그 당시에는 여성이 대학에서 강의를 할 수 없는 상황이었지만 그는 뇌터(Emmy Noether)가 괴팅겐 대학에서 강의할 수 있도록 노력하였으며[5] 윈스턴(Mary Frances Winston)과 같은 여성이 괴팅겐 대학에서 박사학위를 위하여 공부하도록 격려했다[6].

그가 1925년 괴팅겐에서 세상을 떠난 뒤 강의노트 몇 권이 출판되었다. 강의록 '위에서 본 초등 수학 I, II, III'은 명저로 꼽힌다. 그 밖의 저서로 '기하학의 기초', '대수함수의 리만 이론'과 '20면체에 관한 강의'가 있다.

## 2. 결론

ICMI에서 펠릭스 클라인 메달을 만들고, 올해 ICME에서 클라인 메달이 처음으로 수여된 것을 계기로 클라인의 수학과 교육 개혁에 대하여 고찰해보았다. 그는 현대 기하학에 위대한 업적을 남긴 순수 수학자이면서도 수학 교육에도 적극적으로 참여하여 현대 수학 교육에 큰 기여를 하였다. 사실 그는 변환 군론을 이용하여 기하학을 분류한 것뿐만 아니라 수학 전반에 걸쳐 큰 기여를 하였다. 그는 또한 많은 연구, 저술활동, 수학 사전 발간, 우수한 강의 등을 통하여 수학의 위상을 올리는데 기여하였다.

ICMI의 첫 번째 회장이었던 클라인이 주도하였던 수학과 과학의 통합 교육으로 교육받은 사람들 중에서 아인슈타인과 같은 위대한 과학자가 배출될 수 있었다. 그는 '기하학이란 어떤 변환군에 의해 변하지 않는 성질을 연구하는 것으로서 변환군의 분류에 의해 기하학 분류가 가능하다.'는 에를랑겐 계획을 통하여 현대 기하학이 나아갈 방향을 제시하였고 대수적으로는 풀 수 없는 5차 방정식의 해를 기하학을 이용하여 구하는 데 성공했다. 그는 사실 기하학, 해석학, 대수학 등 수학 전 분야에 기여하였다.

또한 수학대백과사전을 주도적으로 만들어서 후학들에게 기여하였을 뿐만 아니라 여성 수학자인 뇌터가 괴팅겐 대학에서 강의할 수 있도록 노력하였으며 윈스턴과 같은 여성이 박사학위를 받을 수 있도록 노력하였다.



우리나라에서도 클라인과 같이 우수한 수학자들이 수학 연구뿐만 아니라 수학 교육에도 관심을 갖고 교육 개혁을 주도적으로 이끌어서 우리나라 청소년들이 지금보다 더 좋은 교육을 받을 수 있도록 노력하여 세계 수학 교육학자들이 우리나라 초, 중, 고등, 대학 교육 과정을 모델로 삼아 연구하는 날이 오길 기대한다. 우수한 수학자들에게 주는 상과 메달을 많이 만들어 미래의 수학자들을 격려하여 펠릭스 클라인 메달을 받는 수학 교육학자와 필즈 메달(Fields medal)을 받는 수학자들이 나오기를 바라는 마음으로 글을 맺는다.

### 참고 문헌

1. 임경순(2001), 현대 물리학의 선구자, 다산출판사
2. *Biography in Dictionary of Scientific Biography*, New York, 1970-1990.
3. Howard Eves/이우영 · 신향균 역, 수학사, 경문사, 2000.
4. Carl B. Boyer · Uta. C. Merzbach/양영오 · 조윤동 역, 수학의 역사, 경문사, 2000.
5. Emmy Noether (<http://www.sdsc.edu/ScienceWomen/noether.html>)
6. Mary Frances Winston (<http://www.agnesscott.edu/lriddle/women/newson.htm>)
7. Mathematics Genealogy Project  
(<http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/html/id.phtml?id=7401>)
8. Obituary in The Times (<http://www.aam314.vzz.net/Klein.html>)
9. J.J. O'Connor · E.F. Robertson(2003), Felix Christian Klein,  
(<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Klein.html>)
10. Why A Felix Klein Prize?  
(<http://www.it.lut.fi/mat/EcmiNL/ecmi27/initiativesprop/node1.html>)

## **Felix Christian Klein**

Dept. of Applied Mathematics, Paichai Univ.    **Sung Sook Kim**  
Dept. of Mathematics, Daegu Catholic Univ.    **Ju Young Kim**

Felix Klein profoundly influenced mathematical developments throughout the world by showing a new direction for modern geometry. He also influenced the lives of excellent scientists like Einstein by reforming mathematical education. The first Felix Klein medal of the Internal Commission on Mathematical Instruction was awarded at ICME-10 in July of 2004. In this article, we discuss Klein's Erlangen Program and investigate his influence on modern mathematics and mathematical education with this medal as momentum .

*Key words* : Felix Christian Klein, Erlangen Program, geometry, transformation group  
2000 Mathematics Subject Classification : 01-02, ZDM Classification : A30