한국수학사학회지 제17권 제4호(2004년 11월), 65-76

한국 음악 속의 수학

신라대학교 사범대학 수학교육과 김기원
kwkim@silla.ac.kr

신라대학교 교육대학원 수학교육전공 안선필
sunfeel29@hanmail.net

수학과 음악은 그 표현 방법이 아주 다른 학문이지만, 오래 전부터 수학과 음악이 관련이 있음을 이야기 해오고 있다. 이 논문에서는 수학과 한국 음악의 관계를 고찰해보고 수학 교육에의 활용 방안을 모색해 본다.

주제어 : 수학, 한국 음악, 수학 교육에의 활용

0. 서론

수학과 음악이 연관이 있다는 것은 피타고라스에 의해 최초로 발견이 되었다. 유클리드는 음정 조합을 궁금하게 여겨 논문 '음정의 구분과 화성학'을 쓰기도 했다. 1722년 프랑스의 음악가 라모(Jean Philippe Rameau 16831764년)는 화성에 대한 그의 고전 논문을 수학에 대한 칭송으로 시작했다. "수학의 도움이 있었기에 비로소 나의 생각이 명확해지고 빛이 어둠을 물리쳤음을 고백한다."고 말했다. 17세기에 갈릴레오는 "음의 특정 조합이 다른 조합보다 좋게 들리는 이유"를 추측했다. 18세기의 수학자 오일러는 협화음과 정수의 관계에 대한 논문을 쓰기도 했다. 계산법의 추상 개념을 자세히 설명하는 현대 해석 기하학은 진동하는 현의 운동을 설명하려는 노력에서 일부 비롯된 측면이 있다[12].

이처럼 오래 전부터 수학과 음악이 관련이 있음을 이야기 해오고 있고 수학과 음악은 그 표현방법부터가 아주 다른 학문이지만 근본은 같다. 수학과 서양음악의 관계는 여러 학자들의 연구로 비교적 널리 알려져 있으며, 김성숙의 <수학과 음악>에는 피타고라스 음계와 순정률, 평균율에 대하여 자세히 설명되어 있다[5]. 그러나 그에 비해 수학과 한국 음악의 관계에 대한 연구는 거의 이루어지지 않고 있다. 따라서 본 논문에서는 수학과 한국 음악에 대한 관계를 알아보고, 수학 교육에의 활용 방안에 대해 모색해보고자 한다. 본 연구에서 음악의 다양성 전부를 다룰 수는 없지만 가능한 한 많은 문헌 연구를 통해 수학과 한국 음악의 관계성을 정리하고자 한다.

1. 수학과 한국 음악의 관계

우리나라 음악의 변천 과정은 서양 음악의 변천 과정과는 전혀 다르다. 서양 음악은 시대를 달리하여 새로운 악파, 새로운 양식의 흐름이 계속되었는데 반하여 우리 음악은 변화 과정이 지속적이지 못하다. 그 이유는 사대 사상으로 인하여 외래 음악에 대한 지식 계급의 추종과 또 국악인의 지위가 전락한 데 그 주요 원인이 있다고 하겠다. 그러나 외래 음악의 영향을 받아 이를 소화 또는 조절하여 재래 음악을 더 발전시킨 특수성이 우리 음악에는 있다[13]. 동양 사상을 바탕으로 한 한국 전통 음악은 논리적으로 정당하게 정립되지 못했기 때문에 발전하지 못한 것이 사실인 반면에 '자연적'이라는 중요한 의미는 상실되지 않았다는 것도 엄연한 사실이다. 이에 비해서 서구 전통음악은 앞에서 언급했듯이 17세기 이후 기악의 발달과 더불어 수직적 · 조합적 사고를 바탕으로 한 옥타브 음역 안에서의 불균형한 비율의 조정 · 균등화 작업을 통해서 화성체계를 이룩하였다. 다시 말해서 피타고라스의 2 : 3(완전5도) 비율에 의한 산출, 순정율의 4 : 5(장3도) 비율 도입, 이것들에 의해서 발생된 8 : 9와 9 : 10(장2도)의 격차를 조정하는 중간음률 등의 과정을 거쳐서, 한 옥타브를 1200cents로 규정하고 반음을 100cents로 명명하는 평균율 이론을 바탕으로 체계적으로 정립해오고 있다[4]. 이에 비해 한국 음악은 밀고 당기는 것으로 수평적이다. 체계적이지 못한 면은 있지만 과학적인 면에서는 결코 뒤떨어지지 않는다.

국악음계에서 삼분손익법은 중국 고대에 제일 일찍 기재된 수학운산을 이용하여 구해낸 5율로서 현에서 구하는 방법이다[6]. 그리고 관으로 율을 정하는 것이 있다. 또, 국악 악보인 정간보는 음의 시간량을 그 음이 기보되는 면적의 공간량으로 바꾸어 적으므로써 음의 시간량과 악보의 공간량이 일치한다는 합리성을 지니고 있다[7]. 이에 본 연구자는 삼분손익법과 율관 그리고 정간보를 소개하고, 수학 교육에의 활용 방안에 대해 논하고자 한다.

2. 삼분손익법

나라와 민족이 다르면 문화가 다르고 언어도 다르다. 각 나라마다, 민족마다, 언어체계가 다르듯 음악에 쓰이는 음들의 체계도 다양하고 그 높이도 제 각각이다. 우리가 알고 있는 '궁 상 각 치 우'라는 계명은 중국의 것이지 우리나라의 것이 아니라고 한다. 우리나라도 우리나라만의 계명이 존재한다. 우리 음악에도 한 옥타브 내에 서양 음악에서의 음이름에 해당하는 12개의 음이 있으니, 이 12반음을 12율(律)이라 한다. 이를 낮은 소리부터 황종을 C음으로(황종이라는 기본음의 높이는 시대와 나라와 악기에 따라서 다르다) 생각하여 쓰면 다음과 같다.

< 표1 > 한국 음악 음계

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
도	도#	레	레#	미	파	파#	솔	솔#	라	라#	시
黃	大	太	夾	姑	仲	蕤	林	夷	南	無	應
황종	대려	태주	협종	고선	중려	유빈	임종	이칙	남려	무역	응종

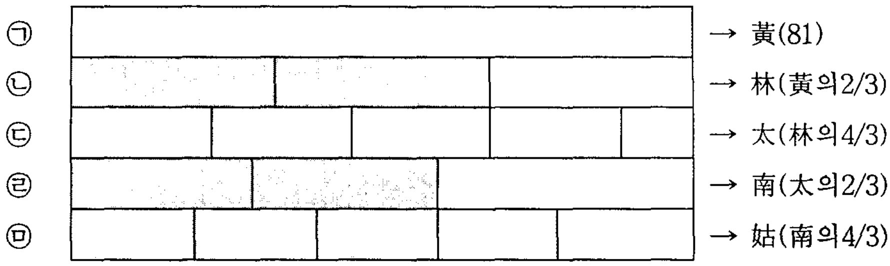
정약용의 <악서고존>이라는 책에 의하면 황종, 임종, 태주 등의 음이름은 원래 선진(先秦)시대[1]에 각 나라를 상징하는 정(鼎)[2]들의 이름이었다고 한다[11].

음악이 만들어질 수 있는 기본적 틀은 음체계(음조직, 음계)의 확립에서부터 시작된다. 이론적으로 한국 음악의 음체계는 삼분손익법(三分損益法)에 의해서 만들어진다. 삼분손익법이란 한국 및 중국의 음률 산정법으로 삼분손일과 삼분익일을 교대로 적용하여 음을 얻는 방법이다. 삼분손익법에 관한 내용은 <관자(管子)>, <회남자(淮南子)>, <사기(史記)>, <한서(漢書)>, <율려신서(律呂新書)> 등 중국의 옛날 경전에 담겨져 있다. 우리나라의 경우 조선 시대(성종 24년)에 쓰여진 <악학궤범>에 의하면 한국 음악은 삼분손익법에 의한 12율에 근본을 두고 있다고 기록하고 있다. 즉, 어느 일정한 길이를 셋으로 나누어 그 중 1/3을 빼내고(삼분손일) 나머지 2/3의 길이를 취하는 방법과, 이 취해진 2/3의 길이를 다시 셋으로 나누어 그 중 1/3의 길이만큼 더한(삼분익일) 길이 즉 1/3의 길이를 취하는 방법이다. 정해진 길이에서 1/3을 잘라 버리면 짧아진 줄은 원래의 줄보다 진동수가 많으므로 자연히 음고(音高: pitch)는 높아진다. 반대로 원래의 줄보다 1/3이 더 길어진 줄은 음고가 낮아지게 된다. 원줄보다 1/3이 짧아진 줄은 원줄보다 5도 정도 높아지고, 길어진 줄은 원줄보다 4도 가량 낮아지게 된다. 4도 낮다는 말은 자리바꿈하면 5도가 되어 결국 삼분손일(2/3, 즉 5도 위의 음)하거나 삼분익일(4/3, 즉 4도 아래 음)하거나 원래의 음과는 5도권을 형성하게 된다. 그러므로 삼분손익법이란 삼분손일의 방법과 삼분익일의 방법을 교대로 적용시켜 아악(좁은 의미에서의 중국계 정악)에 쓰이는 12율명을 얻어내는 방법을 말하는 것이다.

이것은 모든 음이 완전5도의 관계에서 생성되는 피타고리안 음계(Pytagorean)와 동일한 원리라고 이해해도 좋다. 삼분손익법에 의한 열세 번째 음은 이론적으로 맨 처음 음의 옥타브가 된다. 그런데 이 옥타브는 이론적으로 정확한 것이 아니고 약간 높다. 이 차이를 서양음악이론에서는 "피타고라스 콤마(Pythagoras Comma)"라고 한다. 이와 같이 동서양의 음높이에 대한 인식구조는 같다. 다만 피타고라스는 삼분익일을 하지 않고 삼분손일만 해나가는 것이 다를 뿐이다. 다음 <표2>를 보면 좀 더 쉽게 이해할 수 있다.

1) 기원 전 221년, 즉 진시황이 중국을 통일하기 이전을 의미.
2) 정괘의 준말. 육십사괘의 하나.

< 표2 > 삼분손익법



기본음 황종(81)을 ㉠의 길이로 정하고 삼분손일을 먼저 하기 위해 셋으로 나눈 다음(삼분) 그중 1/3을 잘라내면 ㉡의 길이가 되는데, 이 음이 황으로부터 8번째 율인 임종(81×2/3=54)이다. 다음엔 임의 길이를 셋으로 나눈 다음 그 1/3에 해당되는 길이를 더해 주면 ㉢처럼 길어지게 되는데, 이 음은 태주(54×4/3=72)가 된다. 처음엔 손일하여 임을 얻었고, 임을 익일 하여 태를 얻은 것이다. 태의 길이를 삼분손일하면 ㉣처럼 짧아져 이제까지의 음들보다도 가장 높은 남려(72×2/3=48)가 된다. 다시 이번에는 삼분익일 할 차례이므로, 남을 삼분하여 그 1/3의 길이를 더해주면 ㉤의 길이가 되어 고선(48×4/3=64)이 되는 것이다[17]. 이러한 방법으로 12율을 모두 얻게 되는데, 생성 과정과 순서를 대략 보면 다음과 같다.

黃(81) → 林(54) → 太(72)→ 南(48) → 姑(64) → 應(42) → 蕤(56) → 大(38) →
夷(52) → 夾(34) → 無(44) → 仲(30) → 黃(40)

<표1>에 의하면 임은 황으로부터 8번째 율이 되고, 태는 임으로부터 또 8번째 율이 된다. 이처럼 간격 8로 서로(相) 생겨나는(生) 법칙이라는 뜻에서 삼분손익법을 달리 '격팔상생법(隔八相生法)'이라고 부르기도 한다.

황종을 81로 두고(왜 81부터 시작했는지는 현재로도 정확한 이유를 알지 못한다. 단지 3의 배수인 9 그리고 9의 배수인 81인 것으로 짐작할 뿐이다.) 삼분손익법의 계산을 하면 다섯 번째 음인 고선이 64이다. 64는 3으로 나누어지지 않는다. 그러니까 삼분손익을 제대로 할 수 없어서 응종 이하의 숫자는 정확한 숫자가 아니고 대략으로 환산한 숫자이다. 옛 경전에서는 이 숫자들 때문에 여러 가지의 계산방법이 척(尺, 자)의 길이로 환산되어 있다. 그리고 3으로 나누어져서 만들어진 고선(64)까지의 다섯 음을 정음(正音)이라 하고 3으로 나누어지지 않는 숫자인 응종 이하 중려까지의 일곱 음을 변음(變音)이라 불렀다[11].

3. 율관[3]제작에 필요한 율산 방법

조선 시대에는 삼분손익법이란 조율체계 이외에도 음계의 기본음이 되는 황종 기본음을 산출하는 율관 체계(표준 율관)인 황종율관이 존재했었던 것으로 알려져 있다. 그러나 조선 시대의 표준율관과 우리 음악 음계의 기본음이 되는 세종 황종척 등은 남아 있지 않다고 한다. 이렇게 사라져 버린 한국 음악의 기본음 황종의 절대 음고를 되살리고자 국립국악원은 1990년부터 지속적으로 "한국 전통 음악 음 체계의 표준화 작업"을 추진해왔다. 한국 전통 음악에 대한 보다 체계적이고, 과학적인 연구를 위해서 음고 분석 프로그램의 제작을 기획하고 이를 서울대학교 부설 뉴미디어 통신공동연구소 음향공학연구실에 의뢰하여 PC를 활용하여 음고를 측정, 분석할 수 있는 소프트웨어인 "아리랑 1.0"을 완성하여 2000년에는 이것을 배포하기도 하였다. 또 1990년 12월에는 국립국악원의 "한국 전통음악 기본음 설정위원회"의 의뢰에 의해서 서울대학교 공과대학 공학연구소에서 "편경의 황종 주파수 측정연구"라는 연구를 하였다[2].

음향학과 악기학의 각도로부터 볼 때, 현의 진동과 관의 진동은 서로 다르며, 현으로 율을 정하는 것과 관으로 율을 정하는 것이 매우 큰 차이가 있다. 두 끝을 팽팽하게 조인 현에서 동등한 장력으로 삼분손익법 원리를 이용하여 여러 율을 쉽게 구할 수 있으나, 관으로 율을 구할 때엔 관내 기주(氣柱)의 일부분이 관구(管口) 밖에 나오기 때문에, 기주의 길이가 관의 길이에 비해 약간 길다. 때문에 기주의 주파수를 계산하거나 음의 높이에 따라 관의 길이를 계산할 때 관구교정을 하여야 한다[6]. 이처럼 관의 진동을 이용해서 율을 정하는 것은 어렵고, 또한 한국 전통음악에서 본청(조율음)의 높이는 각 장르에 따라서 다르다. 아악(雅樂)은 황종이 기준이 되고 그 높이는 대략 서양음악의 C에 가깝다. 영산회상이나 가곡 등의 향악(鄕樂)곡들은 아악과 같은 황종이라는 명칭을 쓰고 그 높이는 서양음악의 E♭에 가깝다고 하지만, 점차 높아져서 근래에는 E에 가깝다. 그러나, 이러한 악곡들에서는 황종보다는 임종을 조율음으로 사용해 왔다. 기본음은 조율음(Turning Tone)으로서의 기능을 한다. 서양음악의 경우 A를 440Hz로 결정(1933년 런던회의)하고 이를 기준으로 다른 음들의 관계를 설정하거나, 각종 악기들의 음을 맞추고, 아악에서는 거서법(秬黍法) 등으로 황종을 설정한 다음 삼분손익법에 의하여 12율을 얻어낸다. 그러나 한국 전통음악 가운데 아악에 속하는 악곡들에 사용되는 음들은 아악의 12율명을 빌어 표시하지만, 각 악기의 음을 맞출 때에는 대금의 임종에 맞춘다. 아악(雅樂)의 12율(律), 즉 황종(黃鐘)에서 응종(應鐘)까지 각 율의 정한 치수대로 12개의 가는 관을 한 벌로 만들어 사용하였으며, 관은 처음 대[竹]로 만들었다가 후대에 와서 구리로 만들기도 하였다. 처음 12율의 기본이 되는 황종의 음높이를 정하고 이 황종을 기준으로 하여 나머지 11율의 관의 길이를 셈하여 관을 잘라 만들었는데, 기본이 되는 황종관의 길이는 9치, 둘레는 9푼(12

3) 律管, 동양 여러 나라에서 음의 높이를 정하기 위하여 쓰던 원통형(圓筒型)의 관(管)

율의 관의 둘레는 모두 9푼)이고, 율관의 기본이 되는 거서(黍:검은 기장) 1,200낟[粒]을 쌓으면 황종율을 얻게 되어 있다. 또 황종을 기준하여 12율관을 셈하는 데는 보통 삼분손익법(三分損益法)을 사용하였다.

이 경우에는 모든 음들의 기본음을 황종이라 하고, 이 황종의 높이를 결정하기 위하여 자연의 대나무를 잘라 소리를 내고, 황제의 중지(中指), 사지(四指), 오지(五指) 세 손가락의 세 째 마디들의 길이를 합하여 구촌(九寸)으로 삼아 이를 황종율관으로 삼았다는 기록이 있다. 또 황종율관의 길이는 황종척이 1척(尺)의 길이로 인정되었고, 이 황종척은 종서척(縱黍尺)이냐 횡서척(橫黍尺)이냐에 따라 9진법과 10진법의 차이로 설명되기도 하였다. 즉 종서척은 9진법으로 표시할 경우 1촌(寸)이 9분(分), 1척이 9촌으로 1척은 81(9×9)분이 된다는 것인데, 그러나 이러한 수치는 9 혹은 3으로 나누어떨어지는 수들로 조합하여 삼분손익법의 계산을 편하게 하기 위한 수치이지 특별한 의미가 있는 것으로 받아들여지지 않고 있다. 횡서척을 10진법으로 표시할 경우는 1촌(寸)이 10분(分), 1척이 10촌으로 1척은 100(10×10)분이 된다. 그러나 종서척과 횡서척의 실제 길이는 똑같다[8].

중국의 악서인 주재육의 <율려정의(律呂精義)>, 진양의 <악서(樂書)>, 채원정의 <율려신서(律呂新書)>등에 나타나 있는 율관장은 다양하다.

한국에서는 조선 시대에 세종의 명으로 박연(朴堧)이 삼분손익법에 따라 12개의 율관을 만들었다. 거서(秬黍) 한 알을 1分으로 하고, 10分을 1寸으로 하여 9寸(90分)의 길이를 황종척으로 하였다. 이 길이의 대나무를 잘라 그 안에 거서 1200알이 들어가는 관에서 나는 소리를 황종이라 했다. 따라서 90分 황종장, 즉, 10분 척에 의한 황종장 9촌으로 <악학궤범(樂學軌範)>에 기록되어 있다. 다음은 악학궤범에 나와 있는 율관을 계산한 것이다[9].

① 황종 : 9촌[4]×1=9촌

② 임종 : 9촌$\times \frac{2}{3}$=6촌

③ 태주 : 6촌$\times \frac{4}{3}$=8촌

④ 남려 : 8촌$\times \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$촌$= 5\frac{1}{3}$촌=5.3 촌 (1촌은 9분이기 때문에 $\frac{1}{3}$촌은 3분임)

⑤ 고선 : 5.3촌$\times \frac{4}{3} = \frac{(5\times 9+3)\times 4}{3}$분$= \frac{192}{3}$분=64분=7.1촌

⑥ 응종 : 7.1촌$\times \frac{2}{3} = \frac{(7\times 9+1)\times 2}{3}$분$= \frac{128}{3}$분$= 42\frac{2}{3}$분

4) 길이의 기본단위로 척을 사용. 1치(=촌): 자의 1/10 , 1척(=자): 30.303cm

=4촌 $\frac{20}{3}$ 분=4촌 6분 $\frac{2}{3}$ =4촌 6분 6리=4.66촌

⑦ 유빈 : 4.66촌 × $\frac{4}{3}$ = $\frac{(4\times9\times9+6\times9+6)\times4}{3}$ 리= $\frac{1536}{3}$ 리=512리

=6촌 $\frac{78}{3}$ 리=6촌 2분 $\frac{24}{3}$ 리=6촌 2분 8리=6.28촌

⑧ 대려 : 6.28촌 × $\frac{4}{3}$ = $\frac{(6\times9\times9+2\times9+8)\times4}{3}$ 리= $\frac{2048}{3}$ 리

= 682$\frac{2}{3}$ 리=8촌 34 $\frac{2}{3}$ 리=8촌 3분 7 $\frac{2}{3}$ 리=8촌 3분 7리 6호=8.376촌

⑨ 이칙 : 8.376촌 × $\frac{2}{3}$ = $\frac{(8\times9\times9\times9+3\times9\times9+7\times9+6)\times2}{3}$ 호

= $\frac{12288}{3}$ 호=4096호=5촌 451호=5촌 5분 46호=5촌 5분 5리 1호=5.551촌

⑩ 협종 : 5.551촌 × $\frac{4}{3}$ = $\frac{(5\times9\times9\times9+5\times9\times9+5\times9+1)\times4}{3}$ 호

= $\frac{16384}{3}$ 호=5461 $\frac{1}{3}$ 호=7촌 358 $\frac{1}{3}$ 호=7촌 4분 34 $\frac{1}{3}$ 호=7촌 4분 3리 7 $\frac{1}{3}$ 사
=7촌 4분 3리 7호 3사

⑪ 무역 : 7.4373촌 × $\frac{2}{3}$

= $\frac{(7\times9\times9\times9\times9+4\times9\times9\times9+3\times9\times9+7\times9+3)\times2}{3}$ = $\frac{98304}{3}$ 사
=32768사=4촌 6524사=4촌 8분 692사=4촌 8분 8리 44사
=4촌 8분 8리 4호 8사=4.8848촌

⑫ 중려 : 4.8848촌 × $\frac{4}{3}$

= $\frac{(4\times9\times9\times9\times9+8\times9\times9\times9+8\times9\times9+4\times9+8)\times4}{3}$ 사= $\frac{131072}{3}$ 사

=43690 $\frac{2}{3}$ 사=6촌 4324 $\frac{2}{3}$ 사=6촌 5분 679 $\frac{2}{3}$ 사=6촌 5분 8리 31 $\frac{2}{3}$ 사

=6촌 5분 8리 3호 4 $\frac{2}{3}$ 사=6촌 5분 8리 3호 4사 6홀=6.58346촌

또 하나 우리나라가 자랑할 만한 악서로는 다산 정약용의 <악서고존(樂書孤存)>있다. 다산은 악학궤범에서의 황종장이 9촌으로 시작했는데 비하여, 황종장을 81로 시작하고 삼분손익법에 의해 율관을 제시하고 있다. 이런 율의 기준은 학자들마다 약간씩 견해가 다르다. 하지만, 다산은 율(律)이란 차등을 내는 악례로 취급하면서 어떤 표준을 강조하였고, 그러므로 율이란, 도(度) · 량(量) · 형(衡)과 같은 것이기 때문에 율은

곧 악기를 만드는 척도로 삼아야 한다고 하면서 어떤 표준이 없는 소리로써 율을 삼는 것을 비판하였다. 이것은 곧 율척(律尺) 자체가 정밀하게 된 연후에야 악기 제작이 균등하게 되고, 율(律)은 차등을 내는 약속된 관례로써 그것은 곧 율(率)과 통하는 수학적인 방법으로 한번 자와 곡척을 만들고 이에 의거한 율(律)을 한번 만들면, 정확한 음과 악기를 얻을 수 있다고 하여 역사적으로 비판, 수학적인 자기 안을 제시하고 있다[3].

4. 정간보

음악은 음의 고저, 리듬, 시간이 만들어내는 예술이다. 그러나 그것은 잠깐 공간적으로 나타난 후, 흔적도 없이 사라져 버리는 불가시적 존재이다. 그래서 선인들은 음악을 일정한 시각적 기호에 의해 종이 위에 정착시킨 악보를 고안하여, 후세에 계승해 왔다. 악보는 종축(縱軸)에 음의 고저, 횡축(橫軸)에 시간을 기록하고 있는데 이것은 일종의 좌표평면이라고 생각되어진다. 악보는 좌표 위의 점에 음의 길이를 부가시켜, 보통의 좌표 평면보다도 복잡화한 것이다. 상기의 3개의 구성요소를 가진 것이면, 악보는 본래, 공간좌표로 표기되어야 하는 것이었다고 생각하는 편이 타당할 것이다. 이렇게 생각한다면, 공간성을 가지고 있는 음악을 평면화한 악보에는 다분히 수학적 요소가 포함되어 있다고 말할 수 있다. 또, 음악과 수학은 밀접하게 관련되어 있어 실은 음악생활을 하는 것 자체가 수학의 시간 좌표 함수라고 하는 학습 분야에 관계를 가지고 있다고 생각되어진다. 따라서 음악에 대한 수학적 시점에서 접근을 시도하는 일은 수학을 예술로서 또 문화로서 인식하고, 수학과 음악을 융합할 수 있는 새로운 교육내용을 구축하기 위한 수단이 될 수도 있는 것이다. 그런 관점에서 우리 고유의 악보이며 음악의 훈민정음인 정간보(井間譜)에 대해 알아보자.

한국 음악에 사용되는 악보는 여러 가지가 있지만 그 중 서양의 5선 악보만큼이나 널리 사용되는 국악보가 바로 정간보이다. 이 악보는 우물정(井)자 모양의 칸(間)에 율명(律名: 음이름)을 적어 넣는 악보라고 해서 이런 이름이 붙게 되었다고 한다. 정간보에서 정간이라는 것은 간(間)을 우물 정자 모양으로 4각형으로 질러놓고 거기에 음의 높이를 나타내는 여러 가지 기호를 적어 놓는 기보법이다. 간(間)은 음의 길이를 나타내는데, 음의 시간량을 공간량으로 바꾸어 적으므로써 음의 시간량과 공간량을 일치시키고 있다. 간(間)은 단위(척:尺)를 나타내는 용어이다[7]. 정간보는 세종대왕 때 만들어진 악보로 음의 높이와 길이를 동시에 나타낼 수 있는 유량악보(有量惡報)로 동양 최초라고 한다.

다음은 정간보와 오선보의 차이점을 알아보자. 첫째, 오선보는 음의 높낮이를 구별하기에 무척 편리한 악보이다. 그래서 악보를 전혀 읽을 줄 모르는 사람도 최소한 어느 쪽의 음이 더 높고 낮은지는 음표의 위치를 보면 알 수 있다. 그러나 정간보의 경

우는 음의 높이를 문자로 읽어서 이해해야 하는 문자악보이기 때문에 시각적으로 곧 바로 받아들이지 못하는 단점이 있다[15]. 정간보에서는 한 눈에 음이 더 높은지, 낮은지 구별할 수가 없다. 뿐만 아니라, 정간보는 한 칸에 음이름을 하나씩만 적어 넣을 수 있도록 만들어졌기 때문에 화음을 적어 넣을 수가 없다. (무화성의 전통국악에서는 화음 기보가 필요 없긴 하다.)

둘째, 정간보는 음의 길이를 읽는 데는 오선보 보다 훨씬 편리한 악보이다. 정간보에서 한 칸은 무조건 한 박으로 세면된다. 그러나 오선보에서는 무척 복잡하고, 음의 길이를 알기 위해서는 다양한 음표을 확실히 익혀야 한다.

< 표3 > 정간보

(ㄱ)	(ㄴ)	(ㄷ)
△	△	仲 △
		汰 △

셋째, 쉼표의 경우도 정간보 쪽이 훨씬 편리하다. 위의 <표3>과 같은 정간보에서 쉼표는 △하나면 된다. (ㄱ)은 한 박, (ㄴ)은 2박, (ㄷ)은 1/2박을 쉬는 경우이다. 그러니까 한 가지 모양으로 된 쉼표가 어느 위치에 놓이느냐에 따라 길이가 달라지는 것이다. 이에 비해, 오선보에서 쉼표는 음표만큼이나 복잡 다양하다. 우선, 쉼표의 모양만 익히는데도 어느 정도 시간이 필요하다. 특히, 온쉼표와 2분 쉼표는 초보자들에게 항상 혼란을 일으키는 쉼표이다. 이러한 차이는 두 악보간의 우열이 아니라 특징이라고 봐야 할 것 같다. 즉, 서양음악은 화성이 바탕이 되는 높낮이 중심의 음악이므로 오선보도 이러한 특징에 알맞게 만들어진 것이고, 한국 음악은 리듬과 가락이 바탕이 되는 음악이니 정간보 또한 이러한 특징에 알맞게 각각 만들어진 것이다.

5. 수학 교육에서 음악의 활용 방안

음악을 수학 교육에 활용하는 것은 학생들에게는 수학학습에 흥미와 자신감을 갖게 하고, 교사들은 다양한 교수 · 학습 방법으로 활용할 수 있으며 학습자의 활동을 중시하는 수학 교육의 일환으로 사용될 수도 있고, 통합 교과의 학습에도 활용할 수 있어서 현행 제7차 수학과 교육과정의 개정방향에도 부합하는 방법임을 알 수 있다. 따라서 본 절에서는 제7차 수학과 교육과정의 교과서에서 음악을 활용한 예를 찾아보고, 앞에서 소개한 한국 음악의 삼분손익법과 황종 율관의 길이 계산법 그리고 정간보와 단소를 초등학교 5-가 분수의 곱셈 단원과 중학교 7-가 십진법과 이진법 단원 학습에

활용할 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

현재 7차 교육과정 수학교과서에서 한국 음악을 활용한 곳은 하나도 없고 서양음악을 활용한 곳은 다음과 같다.

대한교과서의 8-가 수와 연산 부분에서는 어떤 음의 2/3배를 하면 5도 높은 음을 찾을 수 있다고 설명하며 A(라)음이 440Hz라면 5도 높은 음의 Hz 는? 라는 문제를 내고 있다[10]. 여기에서 우리는 서양음악의 피타고라스 음계를 보여주면서 설명할 수 있다.

중앙교육진흥연구소와 (주)도서출판 디딤돌 교과서의 8-가 수와 연산 부분에서는 순환소수와 무한소수를 분수로 나타내어 숫자로 표시하기라는 문제로 도-0, 레-1, 미-2, 파-3, 솔-4, 라-5, … 1/4=0.25 '도미라'가 된다는 것을 이용한 문제를 제시하고 있다([1], [14]). 여기에서 유리수는 유한소수와 순환하는 무한소수이므로 멜로디가 어느 시점에서 끝나거나 아니면 계속 동일한 부분이 반복되는 멜로디가 된다. 하지만 무리수는 순환하지 않는 무한소수이므로 멜로디가 끊임없이 이어진다. 또한 어떠한 부분에서도 동일한 멜로디가 반복되지 않는다[18]. 따라서 음악과 같이 들려주면 학생들이 더 쉽게 유한소수와 무한소수의 차이를 알 수 있다.

중앙교육진흥연구소의 교과서 수학I 지수와 로그 부분에서는 단원학습자료로서 상용로그를 이용한 소리의 단위를 소개하고 있다. 인간이 들을 수 있는 소리의 크기는 겨우 알아들을 수 있는 정도의 크기(10^{-16}W/㎠)에서 듣는 것이 거의 고통인 정도의 크기(10^{-4}W/㎠)까지 매우 다양하다. 10^{-4}의 크기는 10^{-16}의 크기와 비교할 때, 1조 배에 해당하므로 상대적으로 매우 큰 수이다. 소리의 크기가 이렇게 광범위한 영역에서 변하므로 소리의 크기를 측정할 때 측정의 편의를 위하여 상용로그에 기초한 새로운 소리의 단위를 사용하게 됐다. 소리 크기의 단위 데시벨(dB)은 $D(dB)=10\log_{10} I/I_0$ (I: 소리의 강도, I_0: 10^{-16})로 정의할 수 있다. 만약 천둥치는 소리의 강도가 0.0001 W/㎠ 라면 $D=10\log_{10} 0.0001/10^{-16}=120$dB이 된다[16].

또한 주대창[15]은 음악시간에 음가에 대한 학습으로서, 4분음표가 8분음표의 두 배임을 화폐의 원리를 이용해 체험하게 하는 학습방법, 운동을 하거나 게임을 할 때, 음표와 쉼표를 이용해 각각에 해당하는 동작의 빠르기를 달리하게 하는 학습과 여러 개의 음표나 쉼표를 섞어 던지거나 뽑게 한 다음 덧셈과 뺄셈의 원리를 적용하여 답을 알아내게 하는 학습방법, 공 등의 물건을 원이나 조별로 전달하게 할 때, 그 물건의 무게를 음표에 따라 다르게 하는 학습방법도 소개하고 있다.

수학 교육에서 한국 음악의 활용 방안으로는 초등학교 5-가 분수의 곱셈 단원에서 자연수×진분수의 계산을 할 때, 한국 음악의 삼분손익법 계산을 활용하여 단소를 직접 불어보면서 그 음을 계산해 보게 하는 활동을 함으로서 수학 학습에 도움을 줄 수 있고, 한국 음악의 12음계를 계산해 볼 수 있는 기회가 될 수 있다. 황종(81)을 기본음으로 정하고 삼분손일을 먼저 하기 위해 셋으로 나눈 다음(삼분) 그중 1/3을 잘라내면 이 음이 황으로부터 8번째 율인 임종(81×2/3=54)이 되는 계산을 해보면서 직접

단소를 불어본다. 다음에 임의 길이를 셋으로 나눈 다음 그 1/3에 해당되는 길이를 더해 주면 이 음은 태주(54×4/3=72)가 된다. 그 음을 불어보고 음이 높아졌는지 낮아졌는지 확인해볼 수 있다. 이러한 방법으로 12율을 모두 얻게 되고 생성 과정과 순서를 같이 알아본다. 黃(81) → 林(54) → 太(72)→ 南(48) → 姑(64) → 應(42) → 蕤(56) → 大(38) → 夷(52) → 夾(34) → 無(44) → 仲(30) → 黃(40) 남려 이후의 계산은 소수의 계산과 반올림이 나오므로 6학년에서 활용할 수 있다.

또한 중학교 7-가 십진법과 이진법 단원을 학습할 때 우리나라 고유의 길이 단위와 황종율관 길이 계산을 활용하여 횡서척의 10진법과 종서척의 9진법을 소개하고 한국음악의 12음계 계산을 실제로 할 수 있다.

6. 결론

수학과 음악은 공간적인 학문으로, 손에 잡히지 않는 공간 속에 존재한다는 공통점이 있다. 또한 수학과 음악은 추상적인 학문이다. 두 학문 모두 사람들이 정해놓은 기호로서 존재한다. 또한 위에서 살펴본 바와 같이 음악 속에는 수학의 원리가 내재되어 있다. 이러한 수학과 음악의 관련성을 수학 교육에 활용함으로써 학습자가 수학학습에 흥미와 자신감을 갖게 하고, 교사는 다양한 교수 · 학습 방법으로 활용할 수 있고, 다른 교과의 학습에 활용할 수 있다.

한편 삼분손익법은 공식화된 조율체계로 완전하게 인정받지 못하고 있다고 한다. 결국 공식화된 기본음과 조율체계가 없으므로 악기 제작자들은 제작자의 경험이나 감각에 의존해서 악기를 만들고 있다. 한국 음악이 표준화된 음체계를 갖고 있지 않음으로 해서 황종 기본음의 음고나 각 음간의 거리인 음정이 악기마다, 연주자마다, 또는 연주시마다 다를 수밖에 없고, 이런 상황에서 이뤄지는 합주에서 음이 서로 맞는다는 것은 거의 불가능하다. 우리 음악도 대중화가 되기 위해서 하루빨리 기본음과 조율체계가 표준화되어야 하고, 이를 위해서는 수학, 과학과 음악 사이의 학제간 연구가 필요하다.

참고 문헌

1. 강행고 외 9인, 중학교 수학 8-가, (주)중앙교육진흥연구소, 2004.
2. 권오연, "한국음악의 조율체계와 음계에 대한 음향학적 고찰," 국악과 교육(1999), 한국국악교육학회, 61.
3. 권태욱, "악서고존 권1의 율관에 관한 연구," 한국음악학논집(1994), 한국음악사학회, 152.

4. 김병훈, "현대한국음악을 위한 삼분손익법에 관한 연구," 민족음악학 15(0)(1993), 서울대학교 동양음악연구소, 96.
5. 김성숙, "수학과 음악," 한국수학사학회지 15(2)(2002), 93-100.
6. 김성준, "삼분손익법의 원류에 대한 문헌적 검토," 한국음악사 학보(1992), 한국음악사학회, 106.
7. 김옥신, "초등학교에서의 정간보 활용방안," 국악과 교육(1999), 한국국악교육학회, 289.
8. 남상숙, "동양의 율산에 관한 연구," 한국수학사학회지 4(1)(1987), 39-55.
9. 남상숙, "동양의 율산에 관한 연구(Ⅱ)," 한국수학사학회지 5(1)(1988), 81-95.
10. 박윤범 외 3인, 중학교 수학 8-가, 대한교과서, 2004.
11. 백대웅, 인간과 음악, 도서출판 어울림, 2002.
12. 에드워드 로스스타인 저/장석훈 옮김, 수학과 음악, 경문사, 2002.
13. 이성천, 음악통론과 그 실습, 음악예술사, 2003.
14. 이준열 외 4인, 중학교 수학 8-가, (주)도서출판 디딤돌, 2004.
15. 주대창, "기보법의 음악교육적 활용-초등학교를 중심으로," 음악과 민족(1999), 민족음악학학회, 214-217.
16. 최봉대 외 5인, 고등학교 수학 Ⅰ, (주)중앙교육진흥소, 2004.
17. http://daegumstory.com.ne.kr/kukak/026_kukak.htm
18. http://www.mathtaegu.com/chehum/4_3s.htm

Mathematics in Korean Traditional Music

Dept. of Math. Education, Silla University **Ki-Won Kim**
Graduate School of Math. Education, Silla University **Sun-Phill Ahn**

Even though mathematics and music play very different roles in our society, they are closely related to each other. In this paper, we studies relations between mathematics and Korean traditional music, and give some ideas to use such relations in mathematics education.

Key words: mathematics, Korean traditional music, mathematics education
2000 Mathematics Subject Classification: 97-03, ZDM Classification: M83, M88