

하천 오염물질의 모의를 위한 프랙탈 이송확산방정식의 해석적 유도

The Analytical Derivation of the Fractal Advection-Diffusion Equation for Modeling Solute Transport in Rivers

김상단* / 송미영**

Kim, Sangdan / Song, Mee Young

Abstract

The fractal advection-diffusion equation (ADE) is a generalization of the classical ADE in which the second-order derivative is replaced with a fractal order derivative. While the fractal ADE have been analyzed with a stochastic process in the Fourier and Laplace space so far, in this study a fractal ADE for describing solute transport in rivers is derived with a finite difference scheme in the real space. This derivation with a finite difference scheme gives the hint how the fractal derivative order and fractal diffusion coefficient can be estimated physically. In contrast to the classical ADE, the fractal ADE is expected to be able to provide solutions that resemble the highly skewed and heavy-tailed time-concentration distribution curves of contaminant plumes observed in rivers.

Keywords : advection-diffusion equation, finite difference, fractal, water quality model

요 지

프랙탈 이송확산방정식은 정수 차수의 미분연산자로 구성된 고전적인 이송확산방정식과 비교하여 프랙탈 차수의 미분연산자로 구성된 보다 상위개념의 방정식으로써 정의된다. 지금까지의 프랙탈 이송확산방정식은 추계학적인 기법을 동원하여 푸리에-라플라스 공간에서 주로 해석되었으나, 본 연구에서는 실제 공간에서 유한차분개념을 도입하여 보다 직접적으로 하천에서의 오염물 이송확산에 관한 지배방정식을 유도하였다. 이러한 개념의 유도방법은 프랙탈 차수 및 관련 확산계수의 물리적인 추정에 관한 실마리를 제공할 수 있다. 고전적인 이송확산방정식과는 달리 프랙탈 이송확산방정식은 실제 하천에서 관측되는 오염물의 시간-농도 분포곡선의 왜곡현상과 분포곡선의 전후방부 농도를 보다 실제에 가깝게 모의할 수 있을 것으로 기대되어진다.

핵심용어 : 이송확산방정식, 유한차분, 프랙탈, 수질모형

1. 서 론

최근에 들어 갈수기 상태의 하천흐름에서 우리 생활

과 직접 연관이 있는 하천수질기준과 더불어 자연하천으로의 오염물질유입에 의한 취수장에서의 영향평가와 같은 실질적인 문제에 관심이 고조되고 있으며 이에 대

* 경기개발연구원 환경정책연구부 책임연구원
Associate Researcher, Dept. of Envr. Pol., Gyeonggi Research Institute, Gyeonggi 440-290 Korea
(E-mail: skim@gri.re.kr)

** 경기개발연구원 환경정책연구부 연구위원
Researcher, Dept. of Envr. Pol., Gyeonggi Research Institute, Gyeonggi 440-290 Korea
(E-mail: mysong@gri.re.kr)

한 연구도 활발하게 진행되어 오고 있다(조석주와 소명 이, 1995 외 다수논문). 일반적으로 도시화나 산업화로 인한 오염물질의 자연하천에의 유입은 하천유량이 작을 수록 그 영향이 커지며 이는 갈수기 하천흐름의 수리, 수질특성 자체가 홍수기 특성과는 아주 상이하기 때문이다. 따라서, 하천으로 유입되는 오염물질의 혼합과 이송확산과정에 영향을 미치는 것으로 알려진 여러 요인들 중에서 파상사군이나 웅덩이 같은 하상의 기하학적 특성과 수로특성은 홍수기보다 갈수기에 그 영향이 훨씬 클 것으로 생각된다(김정환, 2002).

하천수질관리의 기본은 현재 오염상태로부터 미래에 이르기까지 변화해 가는 오염물질의 정확한 평가와 예측에 있다. 하천수질의 변화는 유입된 오염물질이 유속 및 유량변화에 따라 이송확산작용을 거치면서 생화학적 반응을 하며 오염원의 분포상태 및 기후 등에 따라 여러 가지 다양한 양상을 나타내므로 보다 정도 높은 수질예측을 위해서는 각종 영향인자에 대한 자료분석과 이에 따른 여러 연구 과제들이 수행되어야 한다. 인구의 증가에 따른 도시화, 산업화 등으로 인하여 하천수질오염이 날로 심각해지고 있으며 이에 따른 수질에 대한 관심은 날로 높아지고 있음에 따라 하천수질관리에 기본정보가 되는 영향인자를 정량적으로 평가하고 예측할 수 있는 수단이 필요하게 되었다.

수질예측의 정도를 높이기 위해서는 양질의 수리수문 수질 입력자료가 확보되고 모형을 통한 자연현상 반영의 적절한 모의가 이루어져야 하는데, 국내 현실은 오염원의 기본조사와 정성적 정량적 자료의 부족으로 수질모형의 자체개발은 극히 힘든 실정이나, 최근에 들어 서일원과 유대영(1995) 외 여러 연구에서 볼 수 있는 바와 같이 자체적인 모형개발의 가능성이 점차 높아지고 있는 추세이다. 이에 본 연구는 새로운 개념의 모형개발의 일차적 과제로서 프랙탈 차원의 미분방정식을 도입하여 실제하천에서 적용가능한 Fick의 법칙을 일반화하여 새로운 개념의 이송확산방정식을 수학적으로 유도하는 것을 목적으로 한다.

먼저 2장에서는 수질모형의 전반적인 방향과 유한차분의 측면에서 본 Fick의 법칙을 살펴보고, 3장에서는 본 연구의 기본개념인 프랙탈 차원의 미분방정식에 관한 기본이론을 소개한다. 그리고 4장에서는 프랙탈 차원의 미분방정식 기법을 이용하여 Fick의 법칙을 일반화한 후, 하천오염물질의 모의를 위한 프랙탈 이송확산방정식을 유한차분기법을 이용하여 유도한다. 마지막 5장에서는 본 연구의 결론 및 추후 연구과제를 제안하도록 하겠다.

2. 유한차분의 측면에서 본 Fick의 법칙

먼저, 수질모형의 전반적인 방향을 살펴보면 Taylor (1954)는 확산연구에서 다음과 같은 1차원 Fick의 이송확산방정식(Fick, 1855)을 처음 소개하였다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} vC + \frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial C}{\partial x} \quad (1)$$

여기서 C 는 오염물질의 농도, v 는 유속, K 는 확산계수이다. 식 (1)은 Qual2E 등 대부분의 수질모형에 쓰이는 기본방정식으로서, 비록 국내에는 실제하천에서의 연구가 미흡한 실정이지만 하천특성별 확산계수에 대한 정량적인 범위가 주어진다면 하천오염물질 이송확산과정을 규명하는데 있어 그 적용이 비교적 쉬운 편이다. 하지만 오염물질이 투하된 지점에서부터 상당히 긴 하류구간에만 그 적용이 가능하며, 오염물질이 투하된 직후에 있어 오염물질의 확산현상을 모의하기에는 부적절한 것으로 알려져 있으며, 이는 오염물질이 투하된 초기에는 이송과 확산작용이 균형을 이루지 못하기 때문인 것으로 파악되고있다. 또한 투하초기를 지배하는 속도분포의 영향때문에 평균농도의 종방향분포는 크게 왜곡되고, 이러한 왜곡현상은 초기에는 점점 증가하다가 최고점에 이르고 시간이 흐를수록 왜곡현상이 작아지는 경향을 나타냄이 여러 연구를 통하여 입증되었다. 이와 같은 시간에 따른 농도분포의 왜곡현상은 하천제방근처에서의 상대적으로 느린 유속과 수로바닥에서의 흐름의 정체현상 등 어느 하나의 물리적 메커니즘이외에는 여러 복합적인 원인에서 기인한다고 생각할 수 있다. 따라서 대부분 자연하천에서의 실측된 시간-농도 분포곡선과 1차원 Fick의 확산방정식에 의해 모의된 결과를 비교해보면 큰 차이가 나타나며 전반적으로 왜곡된 시간-농도 분포곡선 형태가 됨을 알 수 있다.

이러한 문제를 풀기 위한 지금까지의 연구방향은 대체로 저장대 모형의 구축에 관한 사항이 주된 흐름이다. 저장대 모형의 기본개념은 Nordin과 Troutman (1980)의 연구에서 알 수 있는 바와 같이 시간-농도 분포곡선이 비대칭적으로 왜곡되게 나타나는 현상을 규명하기 위해 하천의 바닥부부분이나 측면부에서 오염물질을 일시적으로 정체시키고 있는 경우를 착안하여 이에 대한 항을 아래와 같이 1차원 Fick의 확산방정식에 추가시켜 모의하는 것이다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} vC + \frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial C}{\partial x} + (Storage) \quad (2)$$

Bencala와 Walters(1983)의 연구에서도 또한 시간-농도 분포곡선의 왜곡현상은 주로 하천의 기하학적인 특성에 기인함에 중점을 두고 저장대를 포함하는 모형만이 오염물질의 이송 및 거동특성을 제대로 모의할 수 있다고 판단하였으며 실측결과에 맞추어 모형의 매개변수를 산정하였다. 그러나 매개변수를 산정하는 과정에서 실측치와 비교해가면서 시행착오적인 방법을 이용하였는데 여기에는 주관적인 요소가 작용하게 된다. 국내의 관련연구로는 서일원과 유대영(1995) 및 정태성(2000)을 대표적인 사례로 볼 수 있으며, 특히 정태성(2000)은 자연하천에 적합한 저장대 모형의 매개변수들을 구하기 위한 추정식을 개발한 바 있다.

그러나 본 논문에서는 이러한 저장대 모형과 그 기본철학은 공유하면서 앞서 설명한 바와 같은 실제하천에서의 시간-농도 분포곡선의 왜곡현상을 모형화하기 위하여 프랙탈 차원의 미분방정식을 도입하고자 한다. 시간-농도 분포곡선의 왜곡현상에 덧붙여서 Fick의 확산방정식 (1)로 얻어지는 시간-농도 분포곡선은 전방부 또는 후방부의 농도가 실제하천에서의 값보다 작은 값을 주는 것으로 알려져 있다. 이는 자연하천에서 실측치와 이론적인 값 사이의 차이는 저장대의 영향과 더불어 균일한 하천단면, 정상류 조건 등 Fick의 확산방정식에 필요한 기본가정이 충족되지 못하기 때문이다. 즉, Fick의 확산방정식의 기본법칙인 Fick의 법칙은 균질한(homogeneous) 흐름조건에서 물질의 이동에 관한연속방정식에서 유도되었으나, 실제하천에서는 균질한 흐름조건이 절대적으로 만들어 질 수 없으며 따라서 Fick의 법칙은 비균질한(heterogeneous) 흐름조건에서의 법칙으로 일반화될 필요가 있는 것이다.

식 (1)의 이송확산방정식을 확률론적인 측면에서 볼 때, 오염물 입자의 운동은 무작위 성분으로 볼 수 있으며 오염물 입자의 운동경로는 입자의 점프크기를 나타내는 확률변수들의 합에 의해 표현될 수 있다. 만약 오염물이 어떤 특정 지점에 투하된다면 오염물 각각의 입자들은 유속과 함께 이송되면서 어떤 확률분포(Fick의 법칙의 경우는 정규분포)를 따라 확산할 것이며, 이러한 유속과 확률분포로부터 주어진 시간에 어떤 지점에서의 농도가 결정될 수 있을 것이다(Bear, 1961). 즉, 이송확산방정식 (1)은 수체에서의 오염물 입자가 특정 시간에 어떤 위치에 있을 확률은 어느 정도인가를 결정하는 확률밀도함수를 해로 갖는 결정론적 편미분방정식이다. 시간에 따라 변동하는 이송확산방정식 (1)의 기본적인 해는 정규확률밀도함수의 형태를 가지며, 그 평균과 분산은 각각 유속 및 확산계수에 따라 결정될 수 있다. 예를 들어, 부하량 P 인 오염물질이 하천에 순간적으로

유입될 경우 비정상상태의 해가 적용될 수 있으며 이는 아래와 같다.

$$C(x,t) = \frac{P}{2A\sqrt{\pi Kt}} \exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{4Kt}\right] \quad (3)$$

여기서 A 는 흐름에 수직한 단면적이다.

확산현상을 처음 수식으로 표현한 사람은 1855년 독일의 생리학자 Adolf Fick으로 오염물 입자의 플럭스 J 는 농도 구배에 비례한다는 원칙을 정립한 학자이다(Fick, 1855; 박석순, 1999). 이를 수식으로 표현하면 다음과 같이 표현되며 이를 Fick의 법칙이라 부른다.

$$J = -K \frac{\partial C}{\partial x} \quad (4)$$

여기서 J 는 단위시간당 단위면적당 오염물 질량의 플럭스이다. 참고로 Fick의 법칙은 현재 확산이 고려되는 모든 수질모형에서 적용되고 있다.

Fick의 법칙에 따른 오염물 입자의 운동은 그림 1과 같은 인접 셀 사이에서의 오염물 입자의 확산을 위한 유한차분기법을 이용하여 살펴볼 수 있다. 먼저 상자 i 안에 있는 오염물 입자의 수를 M_i 라 하면 각각의 상자의 농도는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$C_i = \frac{M_i}{\Delta V} \quad (5)$$

여기서 $\Delta V = A\Delta x$ 로서 상자의 부피를 의미하며 A 는 흐름 단면적이다. 하천흐름에 의한 유속은 일단 무시하고 상자 안의 오염물 입자들 중에서 단위시간당 총 R 의 비율로 입자들이 전방으로 확률 p , 후방으로 확률 q 를 보이며 점프한다(여기서 $p+q=1$)고 가정하면, 상자 i 에서 단위시간 Δt 동안에 상자 $i+1$ 과 $i-1$ 로 점프하는 입자들의 총 수는 $M_i R \Delta t$ 가 되며, 상자 i 에서 단위시간 Δt 동안의 플럭스 J_i 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{R}{A}(pM_i + pM_{i-1} - qM_i - qM_{i+1}) \\ &= R\Delta x\{(p-q)C_i + pC_{i-1} - qC_{i+1}\} \\ &= -R\Delta x^2 \left\{ p \cdot \frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta x} - q \cdot \frac{C_i - C_{i+1}}{\Delta x} \right\} + 2R\Delta x(p-q)C_i \end{aligned} \quad (6)$$

이 때 극한 $\Delta x \rightarrow 0$ 을 취한 후, $p=q=1/2$, $K = R\Delta x^2/2$ 이라 하면 Fick의 법칙을 유도할 수 있다.

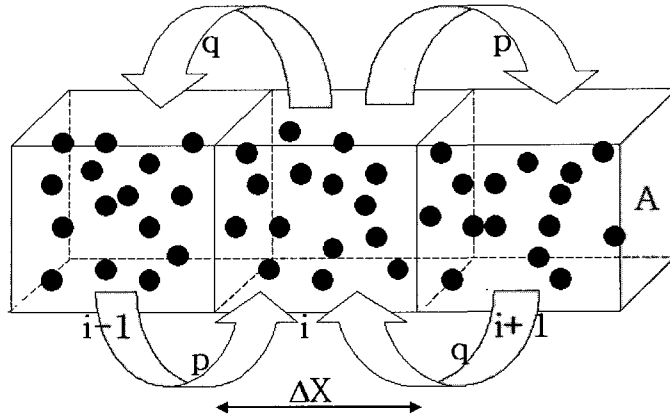


그림 1. Fick의 법칙에 기초한 오염물 입자의 확산

$$J_i = -R\Delta x^2 \left(p \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + q \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right) = -K \frac{\partial C}{\partial x} \quad (7)$$

위 식 (7)에서 Δx 를 0으로 보내는 극한의 경우 Fick의 법칙이 성립하려면 $K = R\Delta x^2/2$ 가 항상 일정해야 하는 조건이 부가된다. 다시 말해서, $\Delta x \rightarrow 0$ 이므로 $R \rightarrow \infty$ 이어야 한다. 즉, R 은 반드시 Δx^2 의 감소율과 같은 율로 증가하여야 하며, 이는 하천오염물질이 순간적으로 유입될 경우 시간에 따른 오염물질 농도분포의 표준편차가 $t^{1/2}$ 의 율로 증가하는 것을 의미한다. 이는 Δt 동안의 하천 오염물 입자의 점프길이가 Δx 로 한정되었다는 사실에 기인하며, 이러한 제약조건 때문에 시간-농도 분포곡선에서 전방부 또는 후방부의 농도가 실제 하천에서의 값보다 더 작게 계산된다. 또한 전방과 후방으로 오염물 입자가 점프할 확률이 서로 같아야 한다는 제약조건은 실제 하천에서의 시간-농도 분포곡선의 왜곡현상을 적절히 반영할 수 없다는 단점을 생기게 되는 결정적인 원인으로 작용하게 된다. 만약 이러한 제약조건으로부터 자유로워질 수 있다면 보다 자연현상에 가까운 시간-농도 분포곡선을 얻을 수 있을 것으로 기대되며, 본 연구에서는 이러한 제약조건을 프랙탈 미분방정식의 기법을 통하여 해결하고자 한다. 즉, 오염물 입자의 플럭스가 농도의 1차도함수에 비례하는 것이 아니라 프랙탈 차수의 도함수에 비례하는 것으로 본다면 오염물 입자의 점프크기를 반드시 Δx 에 한정시킬 필요가 없게 되고 오염물 입자가 전 후방으로 점프할 확률 또한 서로 다르게 정의할 수 있게 된다. 이러한 프랙탈 확산에 관한 이론을 전개하기에 앞서, 다음 장에서는 프랙탈 계산법의 일반적인 사항과 그 특성으로부터 얻을 수 있는 장점 등에 관하여 서술하도록 하겠다.

3. 프랙탈 계산법

연속함수 $C(x)$ 의 Taylor급수를 고려하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C(x+\tau) = C(x) + \tau DC(x) + \frac{\tau^2}{2!} D^2 C(x) + \dots + \frac{\tau^n}{n!} D^n C(x) + \dots \quad (8)$$

여기서 D 는 미분연산자이며, 상방향연산자 E_r^{+1} 은 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$E_r^{+1} C(x) = C(x+\tau) \quad (9)$$

식 (8)과 (9)를 조합하면 다음과 같다.

$$E_r^{+1} C(x) = e^{\tau D} C(x) \quad (10)$$

따라서 미분연산자와 상방향연산자는 서로 아래와 같은 관계를 맺고 있음을 알 수 있다.

$$E_r^{+1} = e^{\tau D} \quad (11)$$

또한 우측차분연산자를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\Delta_-^1 = 1 - E_r^{+1} = 1 - e^{\tau D} \quad (12)$$

이러한 개념으로부터 우측미분연산자를 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$\frac{dC(x)}{dx} = -D_-^1 C(x) = -\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta_-^1 C(x)}{\tau} \quad (13)$$

마찬가지 방법으로 하방향연산자, 좌측차분연산자, 좌측

미분연산자 등을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$E_{\tau}^{-1}C(x) = C(x - \tau) \quad (14)$$

$$\Delta_{+}^1 = 1 - E_{\tau}^{-1} = 1 - e^{-\tau D} \quad (15)$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = D_{+}^1 C(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta_{+}^1 C(x)}{\tau} \quad (16)$$

이 때, 식 (13)과 (16)은 수학적으로 같은 연산자를 표기하므로 좌우측미분연산자들은 아래와 같은 관계를 맺고있음을 알 수 있다.

$$D_{+}^1 = -D_{-}^1 \quad (17)$$

다음 과정으로, 위와 같은 정수차수 미분의 경우를 바탕으로 하여 이제 프랙탈 차수의 미분을 정의할 수 있다. 그 예로서, 식 (15)를 프랙탈 차수로 확장하면 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \Delta_{+}^{\alpha} C(x) &= (1 - E_{\tau}^{-1})^{\alpha} C(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (-1)^k C(x - k\tau) \\ &= W_0^{\alpha} C(x) - W_1^{\alpha} C(x - \tau) - W_2^{\alpha} C(x - 2\tau) - \dots \\ &= C(x) - \sum_{k=1}^{\infty} W_k^{\alpha} C(x - k\tau) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha + 1 - k)} = -(-1)^k W_k^{\alpha} \quad (19)$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} s^{x-1} e^{-s} ds \quad (20)$$

여기서 W 는 프랙탈 가중함수로서 $W_0^{\alpha} = 1$, $W_k^{\alpha} \geq 0$ ($k \geq 1$)이며 $\Gamma(\bullet)$ 는 감마함수이다. 이 때, $0 < \alpha \leq 1$ 이다. 마찬가지로 우측차분연산자에 대해서는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta_{-}^{\alpha} C(x) = C(x) - \sum_{k=1}^{\infty} W_k^{\alpha} C(x + k\tau) \quad (21)$$

이로부터 프랙탈 차수의 미분연산자는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$D_{+}^{\alpha} C(x) = \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} C(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta_{+}^{\alpha} C(x)}{\tau^{\alpha}} \quad (22)$$

$$D_{-}^{\alpha} C(x) = -\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} C(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta_{-}^{\alpha} C(x)}{\tau^{\alpha}} \quad (23)$$

따라서 α 가 정수가 아니라면 아래와 같은 관계가 성립됨을 알 수 있다.

$$D_{+}^{\alpha} C(x) \neq -D_{-}^{\alpha} C(x) \quad (24)$$

여기서 프랙탈 차수의 미분연산자는 Samko 등(1993)에 의해 다음과 같이 정의된다.

$$D_{+}^{\alpha} C(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{-\infty}^x ds (x - s)^{n - \alpha - 1} C(s) \quad (25)$$

$$D_{-}^{\alpha} C(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^{\infty} ds (s - x)^{n - \alpha - 1} C(s) \quad (26)$$

이 때 n 은 α 보다 작지 않은 최소 정수이다.

그림 2는 정수 차수의 일반적인 도함수와 프랙탈 차수의 도함수의 비교를 보여주고 있다. 어떤 점 $x = s$ 에서의 정수 차수 도함수는 s 근방의 기울기로서 정의됨에 따라 도함수가 내포하고 있는 정보는 함수의 국부적인 거동만을 제공하는 반면에, 어떤 점 $x = s$ 에서의 프랙탈 차수의 도함수는 함수 전체의 정보를 모두 포함하고 있음을 알 수 있다(blank, 1996). 그림 3은 α 가 각각 0.1, 0.5, 0.9일 때, 어떤 주어진 점에 대한 주위 점들의 가중치 W_k^{α} 를 보여주고 있다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 α 값이 1에 가까운 값일수록 근방의 점들에 보다 큰 가중치가 주어지며, α 값이 0에 가까울수록 먼 곳에 있는 점들의 영향이 더 크게 작용하고 있음을 알 수 있다. 즉, 프랙탈 차수의 미분연산자는 어떤 점에 대한 전체 함수값들의 가중평균임을 알 수 있다.

4. 프랙탈 Fick의 법칙

이제 프랙탈 Fick의 법칙을 유도하기 위하여 그림 4를 고려하도록 하겠다. 그림 4에서 알 수 있듯이 상자 i 안에 있는 오염물 입자들은 그림 1의 경우와는 달리 시간 Δt 동안에 상자 $i - 1$ 과 $i + 1$ 뿐만 아니라 그보다 더 멀리 이동할 수 있다. 이 때, 상자 i 에 있는 오염물 입자가 상자 $i + 1$ 또는 $i - 1$ 로 이동할 확률은 상자 $i + 2$ 또는 $i - 2$ 로 이동할 확률보다 크며, 또한 상자 $i + 2$ 또는 $i - 2$ 로 이동할 확률은 상자 $i + 3$ 또는 $i - 3$ 로

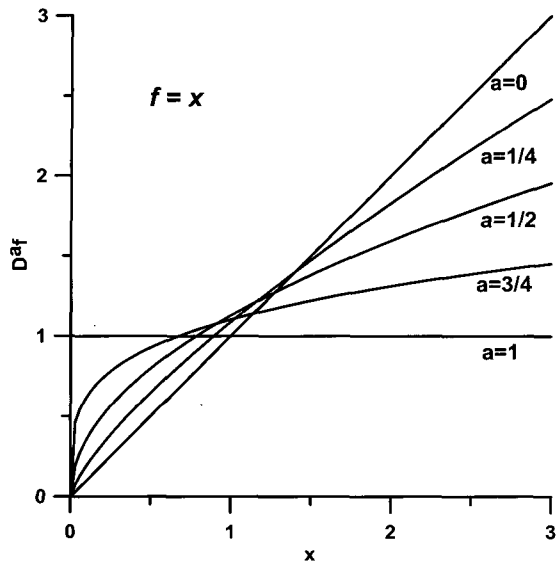


그림 2. 정수 차수 미분과 프랙탈 차수 미분의 비교

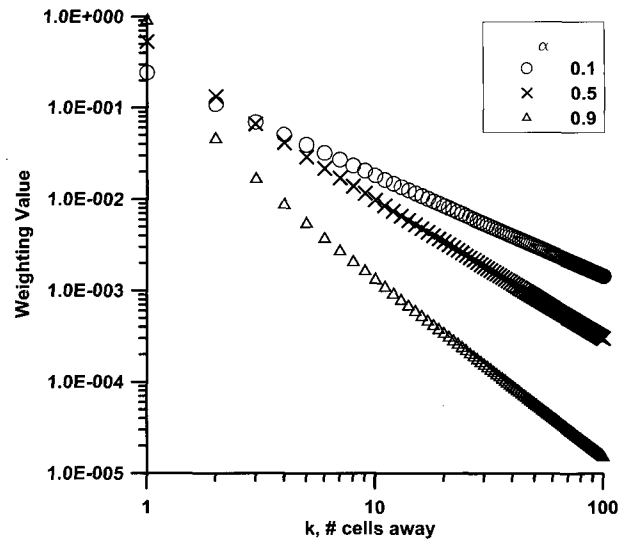


그림 3. 프랙탈 차수 미분의 가중함수

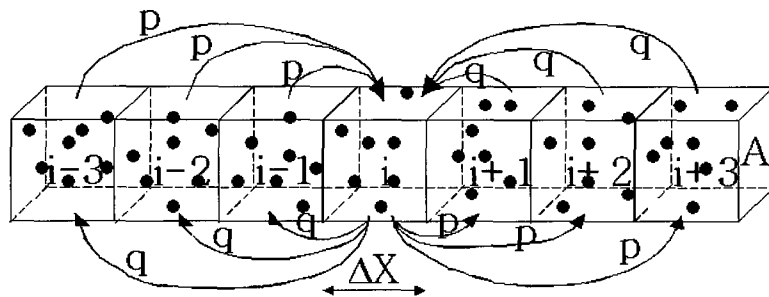


그림 4. 프랙탈 Fick의 법칙에 기초한 오염물 입자의 확산

이동할 확률보다 크다고 가정한다. 따라서 상자 i 에서 단위 시간 Δt 동안의 플럭스 J_i 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 J_i &= \frac{R}{A} (pw_1^\alpha C_{i-1} + pw_2^\alpha C_{i-2} + pw_3^\alpha C_{i-3} + \dots \\
 &\quad + pw_1^\alpha C_i + pw_2^\alpha C_i + pw_3^\alpha C_i + \dots \\
 &\quad - qw_1^\alpha C_{i+1} - qw_2^\alpha C_{i+2} - qw_3^\alpha C_{i+3} - \dots \\
 &\quad - qw_1^\alpha C_i - qw_2^\alpha C_i - qw_3^\alpha C_i - \dots) \\
 &= R\Delta x \left(p \sum_{k=1}^{\infty} w_k^\alpha C_{i-k} + p \sum_{k=1}^{\infty} w_k^\alpha C_i \right. \\
 &\quad \left. - q \sum_{k=1}^{\infty} w_k^\alpha C_{i+k} - q \sum_{k=1}^{\infty} w_k^\alpha C_i \right)
 \end{aligned} \tag{27}$$

여기서 w_k^α 는 상자 i 로부터 k 개만큼 떨어진 인근 상자

(즉, 상자 $i-k$ 또는 상자 $i+k$)에 있는 오염물 입자가

상자 i 로 점프할 확률로서 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k^\alpha = 1$ 이며 w 는 k 에 대하여 감소함수이다. 이 때 α 는 k 에 대한 w 의 감소 정도를 나타내는 매개변수이다. 만약 가중치 w_k^α 를 아래와 같이 각각 정의할 수 있다면 이는 곧 프랙탈 가중함수를 적용할 수 있게 됨을 의미한다.

$$w_k^\alpha = \frac{W_k^\alpha}{\sum_{k=1}^{\infty} W_k^\alpha} = \frac{W_k^\alpha}{T} \tag{28}$$

여기서 W_k^α 는 식 (18)-(26)에서 정의한 프랙탈 가중함수이며, 만약 $\alpha=1$ 이면 $T=1$ 이고, $0 < \alpha < 1$ 이면 $0 < T < 1$ 이 된다. 이제 플럭스 J_i 는 앞서 설명한 프랙탈 계산법에 의해 아래와 같이 유도될 수 있다.

$$\begin{aligned}
J_i &= -\frac{R\Delta x}{T} \left\{ p \left(C_i - \sum_{k=1}^{\infty} W_k^\alpha C_{i-k} \right) - q \left(C_i - \sum_{k=1}^{\infty} W_k^\alpha C_{i+k} \right) \right. \\
&\quad \left. - (1+T)(p-q)C_i \right\} \\
&= -\frac{R\Delta x}{T} \left\{ p \cdot \Delta_+^\alpha C_i - q \cdot \Delta_-^\alpha C_i - (1+T)(p-q)C_i \right\} \\
&= -\frac{R\Delta x^{\alpha+1}}{T} \left\{ p \cdot \frac{\Delta_+^\alpha C_i}{\Delta x^\alpha} - q \cdot \frac{\Delta_-^\alpha C_i}{\Delta x^\alpha} \right\} \\
&\quad + R\Delta x \cdot \frac{T+1}{T} \cdot (p-q)C_i \quad (29)
\end{aligned}$$

이 때, 극한 $\Delta x \rightarrow 0$ 을 취하고 확산계수를 $K_\alpha = R\Delta x^{\alpha+1}/T$ 로 정의하면 다음과 같은 프랙탈 Fick의 법칙을 유도할 수 있다.

$$J_i = -K_\alpha (p \cdot D_+^\alpha C_i - q \cdot D_-^\alpha C_i) \quad (30)$$

여기서 α 는 프랙탈 차수로서 $0 < \alpha \leq 1$ 의 범위를 가지며, D_+^α 와 D_-^α 는 프랙탈 차수의 미분연산자이고, K_α 의 단위는 $length^{\alpha+1}/time$ 이다.

위 식 (29)에서 Δx 를 0으로 보내는 극한의 경우 프랙탈 Fick의 법칙이 성립하려면 $K_\alpha = R\Delta x^{\alpha+1}/T$ 가 항상 일정해야 하는 조건이 부가된다. 다시 말해서, $\Delta x \rightarrow 0$ 이므로 $R \rightarrow \infty$ 이어야 한다. 즉, R 은 반드시 $\Delta x^{\alpha+1}$ 의 감소율과 같은 율로 증가하여야 하며, 하천오염물질이 순간적으로 유입될 경우 시간에 따른 오염물질 농도분포의 표준편차가 $t^{1/(1+\alpha)}$ 의 율로 증가하는 것을 의미한다. 이러한 특성은 시간-농도 분포곡선에서 전방부 또는 후방부의 농도가 실제하천에서의 값보다 더 작게 계산되는 기존 Fick의 법칙의 단점을 개선시키는 장점을 주게 된다. 또한 전방과 후방으로 오염물질 입자가 점프할 확률이 서로 같아야 한다는 제약조건이 제거됨으로써 실제하천에서의 시간-농도 분포곡선의 왜곡현상을 적절히 반영할 수 있을 것으로 기대된다. 이에 덧붙여서, 만약 식 (30)에서 $\alpha = 1$ 이라면 $T = 1$ 이 되고, 여기에 $p = q = 1/2$ 라 하면 프랙탈 Fick의 법칙은 기존의 Fick의 법칙과 완전히 같아지게 되므로 기존에 사용되어오던 Fick의 법칙은 프랙탈 Fick의 법칙의 한가지 특수한 경우로서 설명될 수 있다.

따라서 하천오염물질의 모의를 위한 프랙탈 이송확산방정식은 아래와 같이 된다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} vC + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ K_\alpha \left(\frac{1+\beta}{2} D_+^\alpha C - \frac{1-\beta}{2} D_-^\alpha C \right) \right\} \quad (31)$$

이 때 통계학적인 설명의 용이성을 위하여 β 는 p 와 q 를 대신하여 사용된 매개변수로서 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$p = \frac{1+\beta}{2}, \quad q = \frac{1-\beta}{2} \quad (32)$$

위와 같은 β 의 정의는 농도분포 곡선의 왜곡도를 나타내는데 매우 용이하다. β 는 $-1 \leq \beta \leq 1$ 의 범위를 갖고 있으며 $\beta = 0$ 인 경우는 왜곡도가 0이 되어 농도 분포곡선은 왜곡되지 않고 좌우 대칭인 분포곡선을 나타내며, $\beta \rightarrow -1$ 인 경우는 분포곡선의 첨두부가 왼쪽으로 크게 치우친 분포곡선을, $\beta \rightarrow 1$ 인 경우에는 오른쪽으로 크게 치우친 분포곡선을 보여주게 된다.

5. 결 론

본 연구에서는 하천에서의 오염물질 거동해석을 위한 프랙탈 이송확산방정식을 유도하였다. 유도의 핵심 과정은 프랙탈 계산법의 도입이었으며, 이 과정을 유한 차분개념을 통하여 해석적으로 설명하고자 하였다. 지금까지 연구된 프랙탈 미분방정식은 연속시간 확률보행 (Continuous Time Random Walk, CTRW)을 비롯한 추계학적인 기법을 도입하여 푸리에-라플라스 공간에서 유도되어 이를 다시 역변환 시키는 방법에 의해 유도되는 등(박희원, 1995; Metzler와 Klafter, 2000 외 다수논문) 물리적으로 확고하게 뒷받침되어오지 못한 것이 사실이다. 그러나 본 연구를 통하여 프랙탈 미분방정식이 실제 자연현상으로부터 유도될 수 있다는 것이 명확하게 해석적으로 증명되었으며, 이로부터 고전적인 정수차수의 미분방정식은 프랙탈 차수의 미분방정식의 특수한 어떤 한가지 형태임을 알 수 있었다. 또한 본 연구에서 제안된 프랙탈 이송확산방정식을 통하여 하천 오염물질의 모의 시 발생하는 시간-농도 분포곡선의 왜곡현상과 분포곡선의 전방부 또는 후방부의 농도 과소 평가 문제 등을 해결할 수 있을 것으로 기대된다.

그러나 본 연구에서 제안된 프랙탈 이송확산방정식은 해결해야 할 많은 문제점들을 가지고 있다. 가장 큰 문제로는 확산계수의 정량화문제이다. 기존의 추계학적 기법에서 출발한 많은 유도과정에서도 이러한 확산계수

의 물리적 근거를 명확하게 제시하고 있지 못하다. 이는 확산계수의 차원이 다소 모호하며, 또한 프랙탈 차수에 따라 변하기 때문에 어떤 단순한 관측에 의해 프랙탈 이송확산방정식의 확산계수를 추정할 수 있는 문제는 아닌 것으로 판단되어진다. 단지 본 연구에서 보인 바와 같이 프랙탈 차수는 모의하고자 하는 대상의 공간적 상관관계를 나타내는 점으로 미루어보아 오염물 농도분포의 시간에 따른 분산도와 하천의 공간적 상관관계를 통하여 추정가능하지 않을까 추론해보는 정도이다. 또 다른 해결해야 할 문제점으로는 수치해석의 어려움이다. 지금까지 프랙탈 미분방정식에 대한 수치해를 구하기 위한 시도가 여러 차례 있어 왔지만, 아직까지 1차원의 경우에만 한정되어 있는 등 만족할 만한 수준에 이르지 못하고 있다(Benson, 1998 외 다수논문).

위 설명한 바와 같은 많은 문제점에도 불구하고 프랙탈 계산법을 사용한 연구는 세계적으로 활발한 연구가 진행되고 있는 중이며 특히 수문지질학 등과 같은 근접하지 않고 공간적으로 매우 이질적인 시스템에서의 물리적인 현상을 연구하는 분야에서는 추계학적 기법과 결합하여 많은 연구결과가 나오고 있는 추세에 있다. 수자원 분야의 학자들이 다루는 유역 또한 매우 이질적인 공간을 가지고 있으며, 따라서 프랙탈 계산법의 적용이 다른 어느 분야보다도 유용할 것으로 판단되며 추후 많은 관련연구가 지속되기를 기대해 본다.

참 고 문 헌

김정환 (2000). "하천에서의 오염물질 이송확산 예측." **박사학위논문**, 고려대학교.
 박석순 (1999). "수질모델링반: 2. 수질예측모형의 기본 이론." 국립환경연구원
 박희원 (1995). "Site volume 크기분포함수를 이용한 프랙탈 저류층의 압력전이거동 해석에 관한 연구." **석사학위논문**, 서울대학교.
 서일원, 유대영 (1995). "자연하천에서 오염물질의 확산 및 저장에 관한 연구.", **한국수자원학회논문집**, 한국수자원학회, pp. 107-118.

정태성 (2000). "하천혼합예측을 위한 저장대모형의 매개변수 결정." **박사학위논문**, 서울대학교.
 조석주, 소명이 (1995). "서울시 취수장 원수의 조류분포." **상하수도 '95 학술발표회 및 세미나**, 대한상하수도학회, pp. 10-15.
 Bear, J. (1961). "Some experiments on dispersion." *J. Geophys. Res.*, Vol. 66, pp. 2455-2467.
 Bencala, K.E. and Walters, R.A. (1983). "Simulation of Solute Transport in a Mountain Pool-and-Riffle Stream: A Transient Storage Model." *Water Resour. Res.*, Vol. 19, pp. 718-724.
 Benson, D.A. (1998). "The fractional advection-dispersion equation: Development and application." *Ph.D thesis*, University of Nebraska.
 Blank, L. (1996). "Numerical treatment of differential equations of fractional order." Manchester Centre for Computational Mathematics Numerical Analysis Report No. 287.
 Fick, A. (1855). "On liquid diffusion." *Philos. Mag.*, Vol. 294, pp. 30-39.
 Metzger, R. and Klafter, J. (2000). "The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach." *Phys. Rep.*, Vol. 339, pp. 1-77.
 Nordin, C.F. and Troutman, B.M. (1980). "Longitudinal Dispersion in Rivers: the Persistence of Skewness in Observed Data." *Water Resour. Res.*, Vol. 16, pp. 123-128.
 Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev, O.I. (1993). "Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications." Gordon & Breach, Amsterdam.
 Taylor, G.I. (1954). "Conditions under which dispersion of a solute in a stream of solvent can be used to measure molecular diffusion." *Proc. Roy. Soc. A*, Vol. 225, pp. 473-477.

(논문번호:04-01/접수:2004.01.09/심사완료:2004.10.14)