

두 가지 복합 이상원인 영향이 있는 공정에 대한 VSS \bar{X} 관리도의 경제적 설계

심성보* · 강창욱** · 강해운*

* 한양대학교 산업공학과
** 한양대학교 정보경영공학과

The Economic Design of VSS \bar{X} Control Chart for Compounding Effect of Double Assignable Causes

Seong-Bo Sim * · Chang-Wook Kang * * · Hae-Woon Kang *

* Department of Industrial Engineering, Hanyang University
** Department of Information & Industrial Engineering, Hanyang University

In statistical process control applications, variable sample size (VSS) \bar{X} chart is often used to detect the assignable cause quickly. However, it is usually assumed that only one assignable cause results in the out-of-control in the process. In this paper, we propose the algorithm to minimize the function of cost per unit time and compare the economic design and the statistical design by use of the value of cost per unit time. We consider double assignable causes to occur with compound in the process and adopt the Markov chain approach to investigate the statistical properties of VSS \bar{X} chart. A procedure that can calculate the control chart's parameters is proposed by the economic design.

Keywords : economic design, control chart, variable sample size, compounding case

1. 서 론

관리도는 공정으로부터 얻어지는 자료를 해석하여 필요한 정보를 수집하고, 이들 정보에 의해 공정을 효율적으로 관리하는 기법이다. 관리도를 이용하여 공정을 모니터링 할 때, 타점되는 샘플의 통계량이 관리한계선 가까이 타점 된다면(관리한계 범위 내), 다음의 통계량들은 관리한계선 밖으로 나갈 가능성이 높다 따라서 통계량의 위치에 따라 가변적인 샘플 크기(VSS: variable sample size)를 적용한 관리도를 사용하는 것이 더욱 효율적이다. 공정의 평균을 관리하기 위한 VSS \bar{X} 관리도는 샘플 크기가 고정된(FSS: fixed sample size) \bar{X} 관

리도에 비해 이상원인의 발생에 의한 공정평균의 변화가 작은 경우, 이상원인의 발생을 더욱 빨리 감지하는 것으로 알려져 있다[2, 11].

VSS \bar{X} 관리도에 관한 기존의 연구에서 공정 평균의 변화를 일으키는 이상원인은 하나이거나 다수의 이상원인이 존재하더라도 하나의 이상원인이 발생하면 다른 이상원인은 발생하지 않는 공정을 대상으로 하였다[9]. Sim 외[12]는 두 가지 이상원인이 공정 평균의 변화에 복합적인 영향을 일으키는 공정을 대상으로, VSS \bar{X} 관리도가 FSS \bar{X} 관리도보다 이상원인을 더욱 빨리 감지한다는 것을 통계적 설계를 이용하여 보였다.

관리도의 설계는 관리도 설계 파라미터(샘플링 간격,

샘플 크기, 관리한계선)를 결정하는 방법이다. 이러한 방법에는 통계적 설계와 경제적 설계가 있다. 통계적 설계는 관리상태에서 관리도가 신호를 주는 오경보율을 줄이고, 이상상태에서 관리도가 신호를 발생하기까지의 시간을 줄이는 관리도 파라미터 설정 방법이다. 경제적 설계는 관련 공정과 비용에 관한 파라미터의 설정을 통해 공정주기 기대 시간(ECT: expected cycle time)으로 공정주기 기대 비용(ECC: expected cost per cycle)을 나눈 단위시간당 기대 비용(ECTU: expected cost per time unit)을 최소화 하는 관리도 파라미터 설정 방법이다[8].

본 연구에서는 공정평균의 변화를 일으키는 두 개의 이상원인이 공정평균의 변화에 복합적인 영향을 일으키는 공정을 대상으로 공정 관리의 비용을 고려한 경제적 설계 방법을 제시한다. 그리고 통계적 설계를 통한 결과와 비용적인 면에서의 효과를 보인다.

2. 복합 영향이 있는 공정을 위한 VSS \bar{X} 관리도의 통계적 특성

2.1 가정 및 기호 정의

본 논문에서 다루는 공정과 이상원인에 대한 가정은 다음과 같다.

1. 공정은 관리상태에서 시작한다.
2. 공정의 품질특성치는 정규분포를 따른다.
3. 이상원인의 발생에 의한 공정의 변동은 인위적인 제어에 의해서 제거된다.
4. 이상원인의 발생에 의해 공정 평균이 변한다.
5. 이상원인은 종류는 두 가지이다.
6. 이상원인의 발생은 독립적이며, 발생 시간은 지수 분포를 따른다.
7. 동일한 이상원인이 반복해서 발생하지는 않는다.

Sim 외[12]가 가정한 이상원인의 발생 확률은 위의 가정 7을 이용하여 구할 수 있다.

본 논문에서 사용되는 기호는 다음과 같다.

N_0 : 관리상태에서 관리도가 이상신호를 발생하기까지의 샘플 수,

M_0 : 관리상태에서 관리도가 이상신호를 발생하기까지의 관측값 수,

N_1 : 이상상태에서 관리도가 이상신호를 발생하기까지의 샘플 수,

M_1 : 이상상태에서 관리도가 이상신호를 발생하기까지의 관측값 수,

$\pm k\sigma$: 통계량이 표준 정규분포를 따를 때의 관리한계선,

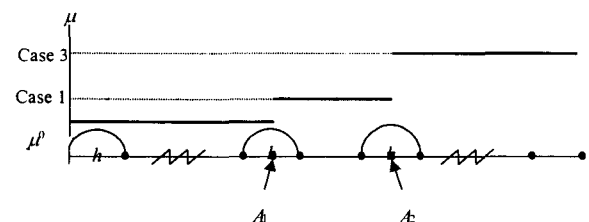
- $\pm k\sigma$: 통계량이 표준 정규분포를 따를 때의 임계선,
 \bar{X}_i : i 번째 샘플링을 통해 구한 품질특성치의 평균,
 Z_i : 관리도상에서 i 번째 타점되는 표준정규분포 통계량,
 \bar{n} : 관리상태에서의 평균 샘플 수,
 h : 고정 샘플링 간격,
 p^*_{02} : 관리상태에서 통계량이 관리도의 임계선 사이에 타점될 확률,
 p^*_{01} : 관리상태에서 통계량이 관리도의 관리한계선과 임계선 사이에 타점될 확률,
 q : 관리상태에서 통계량이 관리한계선 밖에 타점될 확률,
 A_j : 이상원인의 종류, $j=1, 2$,
 λ_j : 이상원인 A_j 의 발생률, $j=1, 2$,
 δ_j : 이상원인 A_j 의 발생에 따른 공정 평균의 정규화된 변동 크기, $j=1, 2$,
 P_{A_j} : 이상원인 A_j 가 발생할 확률, $j=1, 2$,
 p_{lm} : 상태 l 에서 m 로의 전이확률,
 p_l : 상태 l 의 초기 확률,
 μ_0 : 공정 평균의 목표치,
 μ_j : 이상원인 A_j 의 발생에 의한 공정 평균.

2.2 복합 영향이 있는 공정

공정평균에 영향을 주는 두 가지 이상원인을 각각 A_1, A_2 라고 하면 이상원인에 따른 공정평균의 변화가 복합적으로 발생하는 경우 공정평균의 이동은 다음과 같은 3가지로 분류될 수 있다.

1. 이상원인 A_1 의 발생에 따라서 공정 평균이 μ_0 에서 $\mu_0 + \delta_1\sigma$ 로 이동,
2. 이상원인 A_2 의 발생에 따라서 공정 평균이 μ_0 에서 $\mu_0 + \delta_2\sigma$ 로 이동,
3. 이상원인 A_1 과 A_2 의 발생에 따라서 공정 평균이 μ_0 에서 $\mu_0 + \delta_1\sigma + \delta_2\sigma$ 로 이동.

공정 평균의 변화에 대한 예는 그림 1과 같다.



<그림 1> 이상원인의 복합 영향에 의한 공정평균의 변화

2.3 VSS \bar{X} 관리도의 통계적 특성

VSS \bar{X} 관리도는 샘플 평균이 중심선과 임계선 사이에서 타점되면 다음의 샘플의 크기는 작은 샘플 크기 n_1 을 선택하고, 임계선과 관리한계선 사이에서 타점되면 큰 샘플 크기 n_2 를 선택하여 샘플 평균을 구한다.

관리도상에서 i 번째 타점되는 표준화된 샘플 평균은 아래와 같다.

$$Z_i = \frac{\bar{X}_i - \mu_0}{\sigma/\sqrt{S_i}}$$

i 번째 샘플 크기를 S_i 는 다음과 같이 결정된다.

$$S_i = \begin{cases} n_2, & \text{if } k_1 < Z_{i-1} < k \\ n_1, & \text{if } -k_1 \leq Z_{i-1} \leq +k_1 \\ n_2, & \text{if } -k < Z_{i-1} < -k_1 \end{cases}$$

관리상태에서 $Z_i \sim N(0, 1)$ 이고, 이상원인의 발생에 의한 이상상태에서 $Z_i \sim N(\delta\sqrt{S_i}, 1)$ 이다. δ 는 이상원인의 발생에 따른 공정 평균의 변화에 따라서 δ_1, δ_2 또는 $\delta_1 + \delta_2$ 를 갖는다.

VSS \bar{X} 관리도의 설계를 위하여 사용되는 척도로서는 관리도상에서 이상신호를 발생하기까지의 평균 샘플 횟수를 나타내는 ANSS(average number of samples to signal)와 평균 관측치 수를 나타내기 위한 ANOS(average number of observations to signal)가 사용된다. 본 논문에서는 관리상태와 이상상태에서의 ANSS와 ANOS을 각각 $E(N_0)$ 와 $E(M_0)$ 그리고 $E(N_1)$ 와 $E(M_1)$ 로 나타낸다.

VSS \bar{X} 관리도에서는 샘플 크기는 타점되기 직전의 통계량의 위치에 따라 결정되므로 마코프성질(Markov's properties)을 지니고 있다[1]. 따라서 VSS \bar{X} 관리도에서는 마코프체인의 특성을 이용하여 $E(N_0), E(M_0), E(N_1), E(M_1)$ 을 각각 계산한다. 마코프체인을 이용하기 위해서 관리도상에서 타점되는 통계량의 상태 정의와 전이확률(transition probability)의 계산이 필요하다.

$E(N_0)$ 와 $E(M_0)$ 는 단일 이상원인이 존재하는 경우와 동일하므로 식(2.1), 식(2.2)와 같고, 이때 \bar{n} 는 FSS \bar{X} 관리도의 고정된 샘플크기 n 과 동일하게 유지한다. VSS \bar{X} 관리도에서의 $E(N_0), E(M_0)$ 는 다음과 같다.

$$E(N_0) = \frac{1}{q} \dots\dots\dots (2.1)$$

$$E(M_0) = \frac{\bar{n}}{q} \dots\dots\dots (2.2)$$

관리상태일 때의 평균 샘플 크기 \bar{n} 는 식(2.3)과 같다.

$$\bar{n} = \frac{n_1 p_{02}^* + n_2 p_{01}^*}{1 - q} \dots\dots\dots (2.3)$$

여기서 q, p_{01}^*, p_{02}^* 는 다음과 같다.

$$q = \Pr[|Z_i| > k \mid Z_i \sim N(0, 1)]$$

$$p_{01}^* = \Pr[k_1 < |Z_i| < k \mid |Z_i| < k, Z_i \sim N(0, 1)]$$

$$p_{02}^* = \Pr[|Z_i| < k_1 \mid |Z_i| < k, Z_i \sim N(0, 1)]$$

임계선 k_1 는 식(2.3)을 k_1 에 대해 정리하여 구한다. 관리한계선 계수 k 와 두 개의 상이한 샘플 크기 n_1 과 n_2 에 의해 결정되면 k_1 은 식(2.4)와 같다.

$$k_1 = \Phi^{-1}\left[\frac{2\Phi(k)(n - n_2) + (n_1 - n)}{2(n_1 - n_2)}\right] \dots\dots\dots (2.4)$$

여기서 $\Phi(\cdot)$ 는 표준 정규분포의 분포함수이다. 따라서 n_1, n_2 가 주어지고 \bar{n} 가 결정되면 임계선이 결정된다.

이상상태에서의 $E(N_1)$ 와 $E(M_1)$ 을 구하기 위해 다음과 같은 상태 정의를 한다.

- 상태 1. 통계량이 임계선 안에 타점되고, 이상원인이 하나 존재,
- 상태 2. 통계량이 임계선 안에 타점되고, 이상원인이 둘 존재,
- 상태 3. 통계량이 임계선과 관리한계선 사이에 타점되고, 이상원인이 하나 존재,
- 상태 4. 통계량이 임계선과 관리한계선 사이에 타점되고, 이상원인이 둘 존재,
- 상태 5. 통계량이 관리한계선 밖에 타점되고, 이상원인이 하나 존재,
- 상태 6. 통계량이 관리한계선 밖에 타점되고, 이상원인이 둘 존재.

6가지 상태를 갖는 마코프체인에서 전이확률행렬은 다음과 같이 구성한다.

$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ O & I \end{bmatrix}$$

여기서 submatrix Q, R, O, I 는 다음과 같다.

$$Q = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ 0 & p_{22} & 0 & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ 0 & p_{42} & 0 & p_{44} \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} p_{15} & p_{16} \\ 0 & p_{26} \\ p_{35} & p_{36} \\ 0 & p_{46} \end{bmatrix},$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

상태 5와 상태 6은 흡수상태로서 모든 상태들이 서로 교통하지는 못하는 비기약마코프체인(reducible Markov chain)이다. 전이가 계속되면 언젠가는 흡수상태인 5나 6으로 흡수된다. 이상상태에서 이상신호를 주기까지 각 상태를 방문한 평균 횟수는 비기약마코프체인의 특성에 따라 $(I - Q)^{-1}$ 이다

이상원인이 발생한 이후 최초 샘플 평균이 각 상태에 있을 초기행렬 r 를 다음과 같이 정의한다.

$$r = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4]^T$$

이상원인이 발생한 이후 최초 샘플 통계량의 상태를 고려하여 관리도가 신호를 발생하기까지 각 상태를 방문한 횟수의 합인 평균 샘플 횟수는 식 (2.5)와 같다.

$$E(N_1) = r(I - Q)^{-1} \mathbf{1} \dots\dots\dots (2.5)$$

이상원인이 발생한 이후 평균 관측값 수는 각 상태에서 취하게 되는 샘플크기를 고려하여 식 (2.6)과 같다.

$$E(M_1) = r(I - Q)^{-1} s \dots\dots\dots (2.6)$$

여기서 $s = [n_1 \ n_1 \ n_2 \ n_2]^T$ 이다.

이상원인의 발생으로 인한 관리상태에서의 이상상태의 전이는 이상원인 A_j 에 의해 발생하므로, 이상상태에서 관리도가 신호를 주기까지의 평균 샘플 수 $E(N_1)$ 은 식 (2.7)과 같다.

$$E(N_1) = \sum_{i=1}^2 E(N_1|A_i)P_{A_i} \dots\dots\dots (2.7)$$

여기서 $P_{A_i} = \lambda_j / (\lambda_1 + \lambda_2)$ 이다.

식 (2.7)의 $E(N_1|A_i)$ 는 식 (2.5)를 이용해 대응하는 초기 행렬과 전이확률을 고려해 계산한다.

3. 복합 영향이 있는 공정을 위한 VSS \bar{X} 관리도의 경제적 설계

3.1 경제적 모형의 파라미터 및 기호 정의

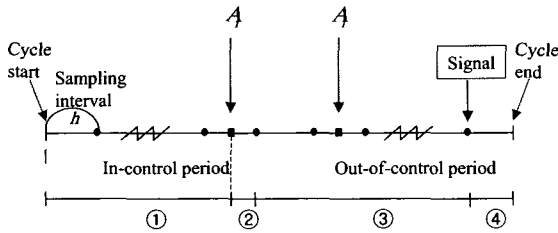
경제적 설계에서 사용되는 시간과 비용의 파라미터와 기호는 다음과 같다.

- C_0 : 공정이 관리 상태에서 비적합품 생산에 따른 단위 시간당 기대 품질 비용,
- C_1 : 공정이 이상 상태에서 비적합품 생산에 따른 단위 시간당 기대 품질 비용,
- Y : 오경보 발생 시 소요되는 기대 비용,
- a : 샘플링 시 소요되는 고정 비용,
- b : 샘플링 시 관측치에 소요되는 변동 비용,
- W_i : 이상원인 A_j 를 찾고 제거하는데 소요되는 기대 비용, $i = 1, 2$,
- T_0 : 오경보 발생 시 소요되는 기대 시간,
- T_1 : 이상원인을 찾는 데 소요되는 기대 시간,
- T_2 : 이상원인을 제거하는 데 소요되는 기대 시간,
- α : 제1종 오류를 범할 확률,
- τ : 샘플링 간격 h 동안 이상원인이 발생 할 때까지의 기대 시간,
- s : 관리상태 동안의 평균 샘플 수.

3.2 복합 영향이 있는 공정의 경제적 모형

VSS \bar{X} 관리도의 경제적 설계를 위해 공정의 단위 시간당 기대 비용 함수를 구하는 경제적 모형을 제시한다. 공정이 관리상태에서 시작하여 이상원인이 발생하고, 제거될 때까지의 시간을 공정주기(cycle time)라고 한다. 이러한 공정주기는 이상원인에 의한 복합영향이 있는 공정에서는 그림 2와 같다.

공정의 주기를 세부적으로 나누어 보면 네 가지의 시간으로 구분한다. 첫째, 이상원인의 발생으로 공정이 이상상태로 전이되기 전까지의 관리상태 시간이다. 관리상태 시간동안에는 관리도에 타점되는 통계량이 관리한계



〈그림 2〉 복합 영향이 있는 공정의 주기

선을 벗어나는 오경보의 발생으로 인하여 공정을 조사해야 하는 시간이 발생할 수도 있다. 이 시간을 CT_1 (그림 2의 ① 부분)이라고 한다. 둘째, 이상원인이 발생한 이후 다음 샘플링을 할 때까지의 시간을 CT_2 (그림 2의 ② 부분)이라고 한다. 셋째, 이상원인이 발생한 이후 다음 샘플링 시점부터 관리도에 타점되는 통계량이 관리한계선을 벗어나서 관리도가 신호(signal)를 주기까지의 시간을 CT_3 (그림 2의 ③ 부분)이라고 한다. 넷째, 관리도에서 신호가 발생하여 발생한 이상원인을 찾고 제거하는 시간을 CT_4 (그림 2의 ④ 부분)이라고 한다. 따라서 전체 공정주기시간을 CT 라고 하면 식 (3.1)과 같다.

$$CT = CT_1 + CT_2 + CT_3 + CT_4 \quad (3.1)$$

이상원인의 발생은 각각 독립적인 지수분포를 따르므로 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ 라고 두면, 공정이 시작하여 이상원인이 발생할 때까지의 기대시간은 $1/\lambda$ 이 된다.

오경보의 발생에 따른 기대시간은 $\alpha s T_0$ 이고, 오경보 발생시에 공정은 멈추거나, 계속 진행하게 되므로 기대시간은 $(1 - \xi)\alpha s T_0$ 로 둘 수 있다. 여기서

$$\xi = \begin{cases} 1 & \text{오경보 발생 시 공정 진행,} \\ 0 & \text{오경보 발생 시 공정 멈춤.} \end{cases}$$

여기서 관리상태 기간 동안의 평균 샘플 수 s 는 식 (3.2)와 같다.

$$s = \sum_{i=0}^{\infty} i [e^{-\lambda h i} - e^{-\lambda h (i+1)}] \quad (3.2)$$

$$= \frac{e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}}$$

그러므로 CT_1 에 대한 기댓값은 식 (3.3)과 같다.

$$E(CT_1) = \frac{1}{\lambda} + (1 - \xi)\alpha s T_0 \quad (3.3)$$

CT_2 에 대한 기댓값은 샘플링 간격 h 에서 이상원인이 발생하였을 때까지의 기대시간 τ 를 빼서 구한다. i 번째 샘플과 $(i+1)$ 번째 샘플사이의 샘플링 간격 h 시간동안 이상원인이 발생하였을 때 기대시간 τ 는 식 (3.4)과 같다.

$$\tau = \frac{\int_{hi}^{h(i+1)} \lambda(x-hi)e^{-\lambda x} dx}{\int_{hi}^{h(i+1)} \lambda e^{-\lambda x} dx} \quad (3.4)$$

$$= \frac{1 - (1 + \lambda h)e^{-\lambda h}}{\lambda(1 - e^{-\lambda h})}$$

따라서 CT_2 에 관한 기댓값은 식 (3.5)와 같다.

$$E(CT_2) = h - \tau \quad (3.5)$$

이상원인이 발생한 뒤 관리도가 이상신호를 주기까지의 평균 샘플수 $E(N_i)$ 은 식 (2.7)과 같고 VSS \bar{X} 관리도에서는 고정된 샘플링 간격이 적용되므로 CT_3 에 대한 기댓값은 식 (3.6)와 같다.

$$E(CT_3) = h \left(\sum_{i=1}^2 E(N_i) P(A_i) - 1 \right) \quad (3.6)$$

이상원인을 찾고 제거하는데 드는 기대시간이 각각 T_1, T_2 이므로 CT_4 에 대한 기댓값은 식 (3.7)과 같다.

$$E(CT_4) = T_1 + T_2 \quad (3.7)$$

식 (3.3), 식(3.5), 식 (3.6), 식(3.7)을 이용하여 전체 공정주기 기대시간 ECT 를 구하면 식 (3.8)와 같다.

$$ECT = \frac{1}{\lambda} + (1 - \xi)\alpha s T_0 + h \sum_{i=1}^2 E(N_i) P(A_i) - \tau + T_1 + T_2 \quad (3.8)$$

공정 주기동안 관련 비용은 첫째, 비적합품의 발생으로 인한 품질 비용, 둘째, 오경보 발생으로 인한 공정관리 비용, 셋째, 이상원인을 찾고 제거하는 데 드는 비용, 넷째, 단위 시간당 샘플링에 소요되는 비용으로 구분할 수 있다.

첫째, 품질 비용은 관리상태에서 부적합품의 생산에 따른 기대 품질 비용 C_0 와 이상상태에서 부적합품의 생산에 따른 기대 품질 비용 C_1 으로 나뉜다. 비적합품 생산에 따른 공정주기 동안 기대 품질 비용을 $E(C_q)$ 라고 두면 식 (3.9)와 같다.

$$E(C_q) = C_0\left(\frac{1}{\lambda}\right) + C_1(hE(N_1) - \tau + \xi_1 T_1 + \xi_2 T_2) \dots\dots\dots (3.9)$$

여기서

$$\xi_1 = \begin{cases} 1, & \text{이상원인을 찾는 동안 공정을 진행,} \\ 0, & \text{이상원인을 찾는 동안 공정을 멈춤.} \end{cases}$$

$$\xi_2 = \begin{cases} 1, & \text{이상원인을 제거하는 동안 공정을 진행,} \\ 0, & \text{이상원인을 제거하는 동안 공정을 멈춤.} \end{cases}$$

관리도에서 오경보가 발생한 경우 이상원인을 찾고 제거하는 동안 공정을 계속 진행한다면, 비적합품의 생산에 따른 비용이 소요되며 그렇지 않으면 발생되지 않는다.

둘째, 오경보 발생으로 인한 기대 비용이 Y 이므로, 공정 주기당 기대 비용을 $E(C_{false})$ 라고 두면 식 (3.10)과 같다.

$$E(C_{false}) = asY \dots\dots\dots (3.10)$$

셋째, 공정주기 동안 이상원인을 찾고, 제거하는 데 드는 기대 비용을 $E(C_a)$ 라고 두면 식 (3.11)과 같다.

$$E(C_a) = \sum_{i=1}^2 W_i P(A_i) + (W_1 + W_2)P(A_1, A_2) \dots\dots (3.11)$$

넷째, 공정주기 동안 샘플링에 드는 비용은 관리상태와 이상상태로 나누어 구한다. 관리 상태에서 한 번의 샘플링 시에 드는 기대비용이 $a + b\bar{n}$ 이고 단위시간당 기대 비용으로 계산하면 $(a + b\bar{n})/h$ 이다. 이상원인이 발생하기까지의 기대 시간이 $1/\lambda$ 이므로, 공정주기 동안 관리상태에서 샘플링에 드는 기대 비용은 $\frac{1}{\lambda} \left(\frac{a + b\bar{n}}{h} \right)$ 이다. 이상상태에서 관리도가 신호를 주기까지의 평균 샘플 수는 $E(N_1)$ 이고 평균 관측치 수는 $E(M_1)$ 이므로 공정주기 동안 이상상태에서의 샘플링에 드는 기대 비용은 $aE(N_1) + bE(M_1)$ 이다. 공정주기 동안 샘플링에 드는 기대 비용을 $E(C_{samp})$ 이라

두면 식 (3.12)와 같다.

$$E(C_{samp}) = \left(\frac{a + b\bar{n}}{h} \right) \frac{1}{\lambda} + aE(N_1) + bE(M_1) \dots\dots\dots (3.12)$$

식 (3.9)에서 (3.12)까지를 이용하여 전체 공정주기 동안 기대 비용 ECC 를 구하면 식 (3.13)과 같다.

$$ECC = E(C_q) + E(C_{false}) + E(C_a) + E(C_{samp}) \dots (3.13)$$

식 (3.8)를 통해 구한 공정주기 기대시간 ECT 로서 식(3.13)의 공정주기 동안 기대 비용 ECC 을 나누어 단위시간당 기대 비용 $ECTU$ 를 구하면 식 (3.14)과 같다.

$$ECTU = \frac{ECC}{ECT} \dots\dots\dots (3.14)$$

3.3 복합 영향이 있는 공정의 경제적 설계

3.2절에서 구한 단위시간당 기대 비용 함수를 최소화 하는 관리도 설계 파라미터를 설정한다.

Woodall[13]은 관리도의 경제적 설계가 통계적 설계에 비해 제1종 오류를 범할 확률이 커져서 오경보율의 증가가 증가한다고 지적하였다. 과도한 오경보의 발생은 공정의 관리자에게 있어서 빈번한 공정 제어를 하는 부담을 가중시킨다. 또한 이로 인해 관리도 사용의 단순함이라는 이점이 없어지게 된다. 경제적 설계 시의 오경보의 발생이 증가하는 것을 방지하고 관리도 사용의 복잡성을 방지하기 위해 관리한계선을 통계적 설계에서와 같이 고정된 한계선을 사용하기로 한다. 이로 인하여 관리상태에서의 통계적 결과는 통계적 설계와 동일하게 유지하면서 단위시간당 기대 비용 $ECTU$ 를 최소화 되는 샘플 크기 (n_1, n_2) 와 샘플링 간격 h 을 결정한다.

샘플 크기 (n_1, n_2) 는 이산형 변수로서 $n_1 < \bar{n} < n_2$ 를 유지하면서 순차적인 탐색을 진행해 가고, 연속형 변수인 샘플링 간격 h 가 $0 < h$ 인 구간에서 Newton 방법을 적용하여 $ECTU$ 를 최소화한다. Newton 방법을 통해 극값을 찾기 위해서는 1차 도함수가 필요하다. $ECTU$ 의 h 에 대한 1차 도함수는 식 (3.15)과 같다.

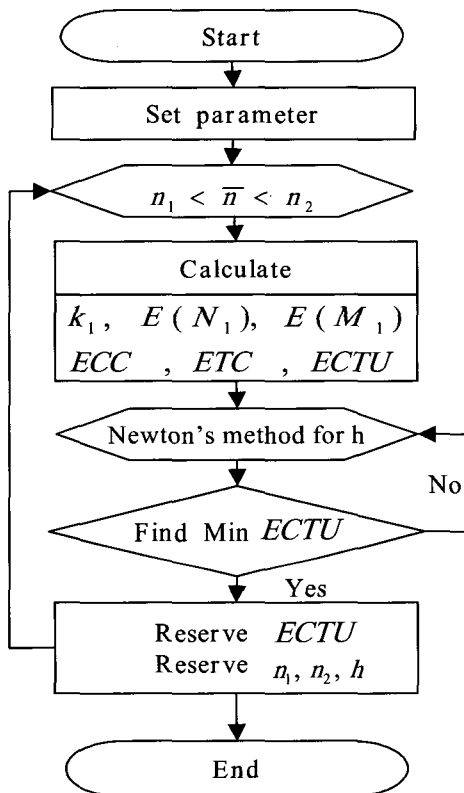
$$\frac{\partial}{\partial h} ECTU = \frac{\frac{\partial}{\partial h} ECC \times ECT - ECC \times \frac{\partial}{\partial h} ECT}{ECT^2} \dots\dots\dots (3.15)$$

식 (3.15)에서 공정주기 기대비용 ECC 의 h 에 대한 1차 도함수를 전개하면 식 (3.16)과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h} ECC = & aY \frac{\partial}{\partial h} s \\ & + C_1(E(N_1)h \frac{\partial}{\partial h} E(N_1) - \frac{\partial}{\partial h} \tau) \dots (3.16) \\ & + - \frac{a + b\bar{n}}{h^2} \frac{1}{\lambda} \\ & + a \frac{\partial}{\partial h} E(N_1) + b \frac{\partial}{\partial h} E(M_1) \end{aligned}$$

Newton 방법을 사용한 기존의 연구에서는 $ECTU$ 의 h 에 대한 1차 도함수에서 지수함수와 관련된 값들을 급수 전개에 의한 근사화를 사용하고, 2차 함수 형태로 유도하여 극값을 찾았다. 본 논문에서는 2차 함수 형태로 유도하지 않고 $ECTU$ 비용 함수 자체의 도함수를 적용한다.

h 의 변화에 따른 $ECTU$ 의 최소값을 찾기 위한 알고리즘은 그림 3과 같다.



<그림 3> $ECTU$ 최소화 알고리즘

그림 3의 최소화 알고리즘을 통해 VSS \bar{X} 관리도의 파라미터를 결정한다.

4. 수치예제

본 절의 수치예제의 계산을 위해 관련 수식의 값은 IMSL에서 제공하는 library와 C++를 이용하여 구현하였다. Lorenzen 과 Vance[6]의 연구에서 제시된 예제의 파라미터 값을 이용하여 통계적 설계의 결과와 비교한다. 예제는 주물에 포함되어 있는 탄소-규산염 양을 모니터 하기 위해 주조철을 일정간격으로 샘플링 하는 것이다. 이 예제에서 제시되는 비용 파라미터를 이용하고 주요 공정 파라미터인 δ_i 와 λ_i 의 값을 변화시켜 수치예제를 구성한다. 관리도에서 신호가 발생하면 공정은 멈추는 것을 가정하고, 관리도 사용에 있어서 일반적으로 사용되는 ± 3 관리한계선과 평균 샘플크기 5를 사용한다. 주어진 고정 파라미터 값은 표 1과 같다. 주요 공정 파라미터 값이 δ_i 와 λ_i 의 값은 발생률에 따른 공정 평균 크기를 고려하여 구성한 실험은 표 2와 같다.

<표 1> 수치예제의 고정 파라미터 값

고정 파라미터	값	고정 파라미터	값
k	3	T_1	0.083
\bar{n}	5	T_2	0.75
ξ	0	C_0	100.00
ξ_1	0	C_1	949.20
ξ_2	0	Y	977.40
a	0	W_1	5.00
b	4.22	W_2	25.50
T_0	0.083		

표 3에서는 3장에서 제시한 VSS \bar{X} 관리도의 경제적 설계 결과 값인 최적 샘플 크기, 샘플링 간격, 임계선과 최소 $ECTU$ 를 제시 하고, 통계적 설계를 통해 구한 샘플 크기를 이용하여 $ECTU$ 를 구하여 그 결과를 비교한다.

표 3에서 경제적 설계와 통계적 설계를 통한 비용의 차이를 분석하면, 단위 시간당 기대비용의 최소차이는 0.267 달러이고 가장 큰 차이는 15.71 달러이다. 만약 예제의 공정이 하루 8시간 지속되고 연간 240일 가동된다고 가정한다면, 비용의 차이는 작게는 534 달러에서 크게는 30,163.2 달러에 달하게 된다. 또한 관리해야 하는 공정이 다수가 존재할 경우에는 비용의 증가는 더욱 더 늘어날 것이다.

<표 2> 공정 파라미터 값의 변화에 따른 실험군의 구성

실험 군	λ_1	λ_2	δ_1	δ_2
1	0.010	0.01	0.7	0.7
2	0.010	0.01	2.0	2.0
3	0.010	0.01	0.7	2.0
4	0.010	0.001	0.7	0.7
5	0.010	0.001	2.0	2.0
6	0.010	0.001	0.7	2.0
7	0.010	0.001	2.0	0.7
8	0.001	0.001	0.7	0.7
9	0.001	0.001	2.0	2.0
10	0.001	0.001	0.7	2.0

<표 3> $\bar{n}=5, k=3$ 인 경우의 수치예제 결과

구분	경제적 설계					통계적 설계
	n_1^*	n_2^*	h^*	k_1^*	ECTU	ECTU
1	2	22	0.651	1.431	174.770	179.730
2	4	6	1.545	0.672	127.518	131.777
3	3	23	0.828	1.633	157.745	158.148
4	2	22	0.859	1.431	157.167	157.528
5	4	6	2.065	0.672	120.583	128.283
6	3	23	0.886	1.633	154.326	154.593
7	4	22	1.668	1.895	128.440	133.121
8	2	22	1.962	1.431	123.938	130.774
9	4	6	4.635	0.672	108.854	124.564
10	3	23	2.493	1.633	118.514	127.458

4. 결론

본 연구는 두 가지 이상원인이 발생하여 공정평균의 변화에 복합적으로 영향을 주는 공정을 다루었다. 그리고 이러한 공정을 관리하기 위한 VSS \bar{X} 관리도의 경제적 설계 방법을 제시하였다.

경제적 설계 모형에서는 공정주기에 따른 공정 관리 비용을 고려한 단위시간당 기대비용 함수를 수립하였다. 단위시간당 기대비용은 공정 관리 기대비용을 공정주기 기대시간으로 나누어서 구하였다. 공정주기는 공정이 관리상태에서 시작하여 이상원인이 발생할 때까지의 시간, 다음 샘플링이 일어날 때까지의 시간, 관리도에서 이상신호가 발생할 때까지의 시간, 이상원인을 찾고 제거하는 데 걸리는 시간으로 나누었다. 공정 관리 비용은 비적합품의 발생으로 인한 품질비용, 오정보 발생으로 인

한 비용, 이상원인을 찾고 제거하는 데 드는 비용, 샘플링에 소요되는 비용으로 구분하였다.

본 논문에서는 관리상태에서 과도한 오경보가 발생하는 문제를 방지하고, VSS \bar{X} 관리도 사용의 복잡함을 방지하기 위하여 관리한계선과 관리상태에서의 평균 샘플 크기 \bar{n} 를 FSS \bar{X} 관리도와 동일하게 유지하였다. 그리고 단위시간당 기대비용을 최소화하는 샘플 크기 (n_1, n_2)와 샘플링 간격 h 를 결정하였다. 본 논문에서 제시한 단위시간당 기대비용의 최소화 알고리즘은 샘플 크기 n_1 과 n_2 는 $n_1 < \bar{n} < n_2$ 를 유지하면서 순차적인 탐색을 진행하였다. 그리고 연속형 변수인 샘플링 간격 h 가 $0 < h$ 인 구간에서 Newton 방법을 이용하였다. 이 방법의 적용을 위해서 단위시간당 기대비용 함수의 1차 도함수를 근사화하는 방법을 사용하였다. 수치예제에서는 Lorenzen과 Vance[6]가 사용한 예제를 이용하여 VSS \bar{X} 관리도 파라미터 값을 제시하였다. 또한 경제적 설계를 이용한 관리도의 사용이 통계적 설계에 비해 비용의 감소를 가져다 줄 수 있음을 보였다.

본 논문에서 제안하는 VSS \bar{X} 관리도의 경제적 설계는 이상상태에서 이상신호가 발생할 때까지의 평균 샘플 수가 통계적 설계와 유사하였다. 즉, 이상원인의 발생에 의한 공정평균의 변화가 복합적으로 발생하는 공정에 VSS \bar{X} 관리도를 적용하고자 하는 경우, 본 논문에서 제안하는 경제적 설계 방법은 통계적 측면에서는 이상원인의 발생을 빨리 감지하면서 경제적인 측면에서는 비용을 절감하는 효과를 주는 것으로 확인되었다.

향후, 세 개 이상의 이상원인이 공정평균의 변화를 복합적으로 일으키는 공정에 본 논문에서 제시한 방법의 적용 연구를 고려할 수 있다. 또한 공정 관리에 있어서 평균의 관리와 함께 산포의 관리가 중요한 문제이므로 공정의 평균과 산포를 동시에 고려한 관리도의 설계가 필요하다. 이와 더불어 관리도 파라미터의 변화를 가변적으로 가져가는 연구인 VSSI와 Vp관리도를 복합 영향이 있는 공정에 적용하는 연구를 고려해 볼 수 있다.

참고문헌

[1] 이호우, 대기행렬이론, 도서출판 기술, 안양, 경기, 1996.
 [2] Costa, A. F. B., " \bar{X} Charts with Variable Sample Size," Journal of Quality Technology, Vol. 26, No. 3, pp. 155-163, 1994.
 [3] Costa, A. F. B., " \bar{X} Charts with Variable Sample Size and Sampling Intervals," Journal of Quality

- Technology*, Vol. 29, No. 2, pp. 197-204, 1997.
- [4] Duncan, A. J., "The Economic Design of \bar{X} Charts Used to Maintain Current Control of a Process," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 51, pp. 228-242, 1956.
- [5] Duncan, A. J., "The Economic Design of \bar{X} -Charts When There is a Multiplicity of Assignable Causes," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 66, No. 333, pp. 107-121, 1971.
- [6] Lorenzen T. J. and L. C. Vance, "The Economic Design of Control Charts: A Unified Approach," *Technometrics*, Vol. 28, No. 1, pp. 3-10, 1986.
- [7] De Magalhaes M. S., E. K. Epprecht, and A. F. B. Costa, "Economic Design of a $V_p \bar{X}$ Chart," *International Journal of Production Economics*, Vol. 74, pp. 191-200, 2001.
- [8] Montgomery, D. C., "The Economic Design of Control Charts: A Review and Literature Survey," *Journal of Quality Technology*, Vol. 12, No. 2, pp. 75-87, 1980.
- [9] Park, C. and M. R. Reynolds Jr., "Economic Design of a Variable Sample Size \bar{X} Charts," *Communication in Statistics-Simulation and Computation*, Vol. 23, No. 2, pp. 467-483, 1994.
- [10] Prabhu, S. S., D. C. Montgomery, and G. C. Runger, "Economic-Statistical Design of an Adaptive \bar{X} Chart," *International Journal of Production Economics*, Vol. 49, pp. 1-15, 1997.
- [11] Prabhu, S. S., G. C. Runger, and J. B. Keats, " \bar{X} Chart with Adaptive Sample Sizes," *International Journal of Production Research*, Vol. 31, No. 12, pp. 2895-2909, 1993.
- [12] Sim S. B., C. W. Kang, and M. Xie, "On Variable Sample Size \bar{X} Chart for Process with Double Assignable Causes", *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, Vol. 11, No. 1, pp. 47-58, 2004.
- [13] Woodall, W. H., "Weaknesses of the Economic Design of Control Charts," *Technometrics*, Vol. 28, No. 4, pp. 408-409, 1986.