Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering
Vol, 27, No. 2, pp.24-28, 2004.

두단계 조립시스템에서의 일정계획문제에 관한 소고

윤상흠 · 김호준 · 권수태

전주대학교 정보기술컴퓨터공학부

A Note on the Scheduling Problem in the Two-stage Assembly-type Flowshop

Sang-Hum Yoon · Ho-Joon Kim · Soo-Tae Kwon

School of Information Technology and Computer Engineering, Jeonju University

This paper considers a scheduling problem concerned with an assembly system where two components are first treated in their own parallel machines and then pulled to be assembled into a final product at a single assembly machine. The objective measure is the mean completion time of jobs(a finite number of products). Through characterizing solution properties, we obtain the worst case error bounds of an arbitrary permutation and a SPT based heuristic.

Keywords : Assembly-like Flowshop, Scheduling, Worst-case Error Bound

1. 서 론

제품조립과 관련한 생산라인은 작업흐름의 형태에 따라서 두가지로 분류될 수 있다. 첫 번째는 프로우샵(flowshop) 이라 부르는 흐름라인(flow line)으로, 중간가공품이 여러 물류장비를 통해 이동하면서 각 기계에서 부품들이 결합됨으로써 점차로 제품이 완성되는 형태이다. 두 번째는 제품의 각 구성품(component) 들이 독자의 기계를 통해 가공되고, 완성된 구성품들이 주조립기계에서의 주조립공정을 통해 하나의 제품으로 완성되는 형태이다. 이러한 구조는 흐름라인에 비해서 대상 제품의 설계가 독립된 구성품으로 모듈화 되어 있는 경우에 적합하며 조립전단계(pre-assembly stage)에 위치한 각 구성품 생산설비와 조립단계에 있는 주조립설비간에 물리적으로 2단계 직렬구조를 가지지만 구성품 생산설비간에는 독립적인 병렬구조를 가진다. 이를 일반적으로 AFS(assembly-type flowshop)라고 부르고 있으며(Lee et al.[7], Sun et al.[10]), 본 논문의 목적은 두 개의 구성품으로 이루어진 제품을 위한 2단계 AFS(2-AFS)라인에서의 총작업완료시간(total completion time)을 최소화하는 작업일정계획(job schedule)을 찾는 것이다.

AFS에 대한 생산공정에서의 예는 엔진조립공정(Lee et al.[7]), FMC(Flexible Manufacturing Cell, Sun et al.[10]), 컴퓨터조립공정(Potts et al.[9]) 등에서 다양하게 찾을 수 있다.

일정계획이론분야에서 흐름라인에 대한 연구는 수십년에 걸쳐 매우 폭넓게 이루어진 반면에(Garey et al.[5], Gonzalez&Sahni[6]) AFS라인과 관련된 연구는 매우 적은 편이다. AFS와 관련한 대부분의 연구들은 대기이론과 관련하여 확률적인 상황에서의 시스템디자인, 성능평가, 작업부하배분 등의 문제에 편중되어 있다(Bhat[2], Duenyas&Hopp[4], Baker et al.[3], Mascolo et al.[8] 참조).

2-AFS라인을 대상으로 확정적(deterministic) 일정계획문제를 다룬 연구는 Lee et al.[7], Sun et al.[10], Potts et al.[9]이다. Lee et al.[7]은 두 대의 구성품생산설비와 조립설비가 연결된 2-AFS에서의 일정계획문제를 최초로 소개하였다. Potts et al.[9]는 이 문제를 구성품생산설비가 여러대인 경우의 2-AFS문제로 확장하였으며, Sun et al.[10]은 같은 문제에 대해 다양한 발견적 해법을 제시하였다. 이들 선행연구들에서 고려된 목적함수는 최대

작업완료시간(makespan)으로 본 연구의 총작업완료시간과는 구별된다. 일반적으로 평균작업완료시간은 생산시스템내의 제공재고(work in process)를 줄이기 위해 일정계획분야에서 가장 많이 고려되는 목적함수중 하나이며 최대 작업완료시간에 비해 일정계획 문제의 복잡도가 높다. 윤상흠[1]과 Sung&Yoon[11]에서는 AFS에서 두 번째 조립단계를 고려하지 않고 조립전단계만을 고려한 상태에서 총가중완료시간(total weighted completion time)을 최소화하기 위한 일정계획문제를 다루었다.

2-AFS는 전체적으로 두 개의 서로 다른 두단계 흐름라인구조가 혼합된 형태를 띄게 된다. 따라서, 평균작업완료시간을 목적함수로 할 경우 Garey et al.[5]에 의해 두단계 흐름라인구조에서의 일정계획문제의 복잡도가 NP-난도(Np-complete)인 것이 밝혀진 바 있으므로 본 연구대상문제도 NP-난도문제임을 쉽게 알 수 있다. 이러한 점을 감안하여 본 연구에서는 직관적인 발견적해법(heuristic)들에 대한 분석적 성능평가를 수행하였다.

2절에서는 연구대상문제를 구성하고 몇가지 문제특성(solution property)들을 제시하였다. 3절에서는 임의의 일정계획해(arbitrary schedule)와 최소시간규칙(shortest processing time rule)에 바탕을 둔 발견적해법에 대해 오차한계(worst case error bound)를 구하였다. 마지막으로 4절에서 추후연구방향 등을 제시하였다.

2. 문제구성 및 분석

수행될 n개의 작업 $J_1, J_2, \cdots, J_n$들이 있다. 각 작업은 세개의 부분작업(sub-task)들로 구성되며 그중에 처음의 두개의 병렬부분작업들은 각자의 병렬기계에서 동시에 처리가 가능하지만, 마지막 세번째 조립부분작업은 병렬부분작업들이 모두 완료된 후에 작업시작이 가능하다. 문제대상시스템인 2-AFS는 두개의 병렬기계들과 마지막 조립작업을 위한 한 대의 기계로 구성된다. 각 작업의 완료시간은 해당 병렬부분작업들이 각각의 병렬기계에서 수행되고 마지막 조립부분작업까지 종료되는 시점으로 측정된다. 총 작업완료시간이란 모든 작업들의 작업완료시간들의 합을 의미하며, 이를 최소화하는 일정계획해를 찾는 것이 문제의 목적이다.

본 문제에서는 다음과 같은 가정들이 채택되었다.

- 일단 수행이 시작된 부분작업은 중간에 중단될 수 없다.
- 작업준비시간(set-up time)은 고려되지 않는다.
- 병렬기계에서 최종 조립기계로의 이동시간은 고려하지 않는다.
- 모든 작업들은 시간 0에서 수행가능하다.
- 모든 부분작업들의 작업시간은 미리 알고 있으며, 확정적이다.

분석에 사용될 기호들은 다음과 같다.

- i, j: 작업을 표시하는 아래첨자들(subscript).
- $[i], [j]$: 작업처리 순서를 표시하기 위한 아래첨자들, $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$.
- M_k: 기계 k, $k \in \{1, 2, a\}$, 여기서 처음의 두개는 병렬기계이고 마지막 M_a는 조립기계.
- $p_{i,k}$: 기계 k에서 작업 J_i의 작업수행시간.
- S: 임의의 일정계획해.
- S^*: 최적 일정계획해.
- $c_i(S)$: 일정계획해 S에서 작업 J_i의 작업완료시간, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.
- $TC(S)$: 일정계획해 S의 총 작업완료시간,

$$TC(S) = \sum_{i=1}^{n} c_i(S).$$

다음의 보조정리는 고려해야 할 해공간을 줄이기 위한 것이다. 보조정리의 내용은 최적일정계획해는 모든 기계상에서 작업들이 동일한 순서로 수행되는 순열일정계획해(permutation schedule)들 중에 존재한다는 것이다.

보조정리 1. 순열일정계획해들의 집합이 우월집합(dominant set)을 구성한다.

증명. 증명은 어떠한 비순열일정계획해(non-permutation schedule)도 작업교환과정을 통해 더 나쁘지 않은 순열일정계획해로 항상 변환될 수 있음을 보이면 된다. 임의의 비순열일정계획해 S를 고려하자. S상에서 기계쌍 (M_k, M_a), $k=1,2$에서의 작업순서가 다르다고 가정하자. 즉, 어떤 두 개의 작업 J_i와 J_j가 M_k에서는 J_i가 J_j의 바로 앞에서 처리가 되고 M_a에서는 J_j가 J_i보다 앞에서(이때는 바로 앞순서일 필요는 없음) 처리된다고 하자. 이때, M_k상의 두작업의 처리순서를 서로 교환한다. 이 작업교환으로 전체작업완료시간의 합이 나빠지지 않음을 쉽게 알 수 있다. 유사한 작업교환과정을 통해, 어떠한 비순열일정계획상의 작업순서가 다른 기계쌍 (M_k, M_a), $k=1,2$에 대해서도 전체작업완료시간의 증가 없이 모든 작업들의 처리순서를 동일하게 만들 수 있다.

다음의 보조정리는 어떤 기계 앞에 처리해야할 작업들이 대기중임에도 지연시간을 가지는 경우가 없는 해들 중에 최적해가 있음을 보여준다.

보조정리 2. 삽입된 지연시간(inserted idle time)이 없는 일정계획해가 우월집합을 구성한다.

증명. 위의 보조정리 1과 유사하게 어떠한 인위적으로 삽입된 지연시간을 가지는 일정계획해는 그 지연시간을 제거한 더 나은 일정계획해를 항상 찾아낼 수 있음을 알 수 있다.

위의 보조정리 1과 2를 통해서 본 문제에서 고려해야 할 해공간의 크기가 $n!$임을 알게 된다. 또한, $c^k_{[i]}$를 M_k, $k=1,2$에서 i번째 처리작업의 완료시간이라 하고, $I_{[i]}$를 M_a에서 i번째 작업 직전의 지연시간을 나타내는 기호라고 할 때, 어떤 일정계획해 S에 대해

$$c_{[j]}(S)=\sum_{i=1}^{j}(I_{[i]}+p_{[i],a}),$$

$$I_{[i]}=\max\Big\{\max(c^1_{[i]},c^2_{[i]})-\sum_{j=1}^{i-1}(I_{[j]}+p_{[j],a}),0\Big\}$$

으로 표현될 수 있고, 총 작업완료시간은

$$\begin{aligned}TC(S)&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}(I_{[i]}+p_{[i],a})\\&=\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)I_{[j]}\\&\quad+\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)p_{[j],a}\end{aligned}$$

으로 표현된다.

3. 근사해와 성능분석

어떤 발견적해법에 대한 최악오차한계(worst case error bound)를 알 수 있다는 것은 그 발견적해법이 생성하는 해들 중에서 가장 나쁜 해에 대한 질을 보장한다는 측면에서 해법의 성능을 평가하는 가장 확실한 방법이며, 난수데이타를 이용하는 컴퓨터실험을 통한 평가와는 구별된다. 본 장에서는 Gonzalez&Sahni[6]에서 제시되었던 두단계 흐름라인에 대한 최악오차한계분석결과와 본 연구대상문제에서의 결과가 같다는 것을 보인다.

다음의 주정리 1은 어떠한 임의의 순열일정계획해의 총 완료시간 값도 최적해에 비해 n배 이상 크지는 않다는 것을 보여준다.

주정리 1. S를 임의의 순열일정계획해라고 할 때, $TC(S)/TC(S^*)\le n$이 성립한다.

증명. 각 작업 J_i에 대해 $y_i=\max\{p_{i,1},p_{i,2}\}+p_{i,a}$를 정의하고 $Y=\sum_{i=1}^{n}y_i$라고 할때, 어떤 순열일정계획해 S에 대해 $c_i(S)\le Y$, $i=1,2,\cdots,n$이 성립함을 쉽게 알 수 있다. 따라서,

$$TC(S)=\sum_{i=1}^{n}c_i(S)\le nY \qquad (1)$$

의 부등식이 성립한다. 또한, $[i]$를 최적일정계획해 S^*에서 i번째 작업을 위한 아래첨자라고 정의할때, $c_{[i]}(S^*)\ge y_{[i]}$의 부등식이 성립하므로

$$TC(S^*)=\sum_{i=1}^{n}c_{[i]}(S^*)\ge\sum_{i=1}^{n}y_{[i]}=Y \qquad (2)$$

의 결과를 얻을 수 있다. 따라서, 식(1)과 식(2)로 부터 $TC(S)/TC(S^*)\le n$임을 알 수 있다.

다음의 보조정리를 통해 임의의 순열일정계획해의 최악오차한계 n이 최선한계(tight bound)임을 알 수 있다.

보조정리 3. 임의의 순열일정계획해에 대한 최악오차한계 n은 최선한계값(tight bound)이다.

증명. 다음의 예제를 고려한다;

$p_{i,k}=\varepsilon$, $i=1,2,\cdots,n$, $k=1,2$,

$p_{1,a}=1$, $p_{i,a}=\varepsilon$, $i=2,3,\cdots,n$,

여기서 $\varepsilon\ll 1/n^2$.

이때, 임의로 선택된 순열일정계획해가 $S=J_1J_2\cdots J_n$라고 할 때, S의 총 완료시간은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}TC(S)&=(1+\varepsilon)+(1+2\varepsilon)+\cdots+(1+n\varepsilon)\\&=n+\varepsilon n(n+1)/2\end{aligned}$$

또한, 위 예제에 대한 최적 일정계획해는

$S^*=J_2J_3\cdots J_nJ_1$이고 S^*의 총 완료시간은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}TC(S^*)&=(2\varepsilon+\cdots+n\varepsilon)+1+n\varepsilon\\&=\varepsilon n(n+1)/2+1+(n-1)\varepsilon\end{aligned}$$

따라서, 다음의 전개를 통해 S^*에 대비한 S의 오차가 n임을 알 수 있고, 이는 임의의 순열일정계획해의 오차 n이 최선한계값임을 의미한다.

$$TC(S)/TC(S^*) = \frac{2n+\varepsilon n(n+1)}{2+2(n-1)\varepsilon+\varepsilon n(n+1)}$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} TC(S)/TC(S^*) = 2n/2 = n$$

다음에서 정의되는 결합-최소시간 해법의 아이디어는 두 대의 병렬기계들을 한대의 가상기계로 병합시키고 총 작업완료시간이 목적함수인 일정계획문제에 많이 적용되는 최소시간규칙을 적용하는 것이다.

결합-최소시간 해법(Aggregation-SPT heuristic)

단계 1. 각 작업 J_i에 대해 $y_i = p_{i,1}+p_{i,2}+p_{i,a}$를 계산한다.

단계 2. $\{y_i, i=1,2,\cdots,n\}$에 대해 최소시간규칙 작업순서를 구하고, 이를 2-AFS문제에 적용한다.

다음의 주정리 2는 제시된 결합-최소시간 해법에 의해 생성된 일정계획해의 오차한계가 2라는 것을 보여준다.

주정리 2. S를 결합-최소시간 해법에 의한 해라고 할 때, $TC(S)/TC(S^*) \le 2$이 성립한다.

증명. 각 작업 i에 대해 $y_i = p_{1,i}+p_{2,i}+p_{a,i}$를 정의하고, S를 결합-최소시간 해법에 의한 해라고 하자. 또한, 작업들이 S의 순서대로 정렬되어 있다고 가정하자. 즉, 어떤 두 작업 J_i와 J_j에 대해 $i \le j$이면, $y_i \le y_j$이 성립한다. 이때 각 작업 J_i에 대해

$$c_i(S) \le \sum_{j=1}^{i} y_j$$

의 부등식이 성립함을 알 수 있다. 따라서,

$$TC(S) = \sum_{i=1}^{n} c_i(S) \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} y_j \quad\cdots\cdots (3)$$

의 결과를 얻을 수 있다.

여기서, 최적일정계획해 S^*를 고려해 보자. $[i]$를 최적일정계획해 S^*에서 i번째 처리작업을 위한 아래첨자라고 하고, $t_{[i]}(S^*)$를 $J_{[i]}$의 M_a로의 도착시간(즉, 병렬기계에서의 완료시간)이라고 할 때,

$$\begin{aligned} c_{[i]}(S^*) &\ge t_{[i]}(S^*) + p_{[i],a} \\ &\ge \sum_{j=1}^{i}(p_{[j],1}+p_{[j],2})/2 + p_{[i],a} \end{aligned}$$

이 성립하고 따라서,

$$\begin{aligned} TC(S^*) &= \sum_{i=1}^{n} c_{[i]}(S^*) \\ &\ge \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}(p_{[j],1}+p_{[j],2})/2 + \sum_{i=1}^{n} p_{[i],a} \\ &\ge \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} y_{[j]}/2 \end{aligned}$$

의 부등식을 얻을 수 있다.

이때, 최소시간규칙이 단일기계일정계획문제(single machine scheduling problem)에서 평균완료시간을 최소화시키므로,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} y_j \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} y_{[j]}$$

임을 알 수 있고, 이 결과를 식 (3)과 결합하면 $TC(S)/TC(S^*) \le 2$임을 알 수 있다.

다음의 보조정리를 통해 결합-최소시간 해법을 통한 일정계획해의 오차 2가 최선한계값임을 알 수 있다.

보조정리 4. 결합-최소시간 해법에 의한 일정계획에 대한 최악오차한계 2는 최선한계값이다.

증명. 다음의 $2n$개의 작업에 대한 예제를 고려한다;

$p_{i,1}=1,\ p_{i,2}=p_{i,a}=\varepsilon_1,\ i=1,2,\cdots,n,$

$p_{i,1}=p_{i,2}=\varepsilon_2,\ p_{i,a}=1,\ i=n+1,n+2,\cdots,2n,$

여기서 $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2 \ll 1/n^2$.

이때, 결합-최소시간 해법에 의한 일정계획해를 구하면 $S=J_1J_2\cdots J_{2n}$이 되고, S의 총 완료시간은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} TC(S) &= (1+\varepsilon_1)+(2+\varepsilon_1)+\cdots+(n+\varepsilon_1) \\ &\quad +(n+1+\varepsilon_2)+(n+2+\varepsilon_2)+\cdots+(2n+\varepsilon_2) \\ &= 2n^2+n+n\varepsilon_1+n\varepsilon_2 \end{aligned}$$

이때, 위 예제에 대한 최적 일정계획해는 $S^* = J_{n+1}J_1J_{n+2}J_2 \cdots J_{2n}J_n$이고 S^*의 총 완료시간은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} TC(S^*) &= (1+\varepsilon_2)+(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2)+\cdots \\ &\quad +(n+n\varepsilon_2)+(n+n\varepsilon_2+\varepsilon_1) \\ &= n^2+n+n(n+1)\varepsilon_2+n\varepsilon_1 \end{aligned}$$

따라서, 다음의 전개를 통해 S^*에 대비한 S의 오차가 2임을 알 수 있고, 이는 임의의 순열일정계획해의 오차 2이 최선값임을 의미한다.

$$TC(S)/TC(S^*) = \frac{2n^2+n+n\varepsilon_1+n\varepsilon_2}{n^2+n+n(n+1)\varepsilon_2+n\varepsilon_1},$$

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0,\, \varepsilon_2 \to 0} TC(S)/TC(S^*) = \frac{2n^2+n}{n^2+n},$$

$$\lim_{n \to 0} \frac{2n^2+n}{n^2+n} = 2.$$

4. 결 론

본 연구에서는 두 개의 구성품이 각자의 기계를 통해 완성되고 이들이 하나의 주조립기계에서의 조립공정을 통해 제품이 완성되는 전체적으로는 흐름라인은 아니지만 부분적으로는 두단계 흐름라인을 따르는 조립시스템에서의 일정계획문제를 다루었다. 평균완료시간을 목적함수로 하는 문제에 대해 몇 가지 해에 대한 특성들이 규명되었고, 임의의 순열일정계획과 최소시간규칙에 바탕을 둔 발견적 방법을 제시하고 이들에 대한 성능에 대한 오차한계를 구하였다.

본 연구결과는 구성품 기계의 수가 여러 대인 경우로 확장될 수 있을 것으로 예상되며, 납기와 관련한 목적함수를 가지는 문제 등이 추후연구과제가 될 수 있을 것이다.

참고문헌

[1] 윤상흠, "다중기계로 구성되는 조립전단계에서의 부품생산 일정계획", 산업경영시스템학회지, 게재예정.

[2] Bhat, U.N.; "Finite Capacity Assembly-like Queues", Queueing Systems, 1: 85-101, 1986.

[3] Baker, K.R., Powell, S.G., and Pyke, D.F.; "Optimal Allocation of Work in Assembly Systems," Management Science, 39: 101-106, 1993.

[4] Duenyas, I., and Hopp, W.J.; "CONWIP Assembly with Deterministic Processing and Random Outages," IIE Transactions, 24: 97-109, 1992.

[5] Garey, M.R., Johnson, D.S., and Sethi, R.; "The Complexity of Flowshop and Jobshop Scheduling," Mathematics of Operations Research, 1: 117-129, 1976.

[6] Gonzalez, T., and Sahni, S.; "Flowshop and Jobshop Schedules: Complextiy and Approximation," Operations Research, 26: 36-52, 1978.

[7] Lee, C.Y., Cheng, T.C.E., and Lin, B.M.T.; "Minimizing the Makespan in the 3-Machine Assembly-type Flowshop Scheduling Problem," Management Science, 39: 616-625, 1993.

[8] Mascolo, M.D., David, R., and Dallery, Y.; "Modeling and Analysis of Assembly Systems with Unreliable Machines and Finite Buffers," IIE Transactions, 23: 315-330, 1991.

[9] Potts, C.N., Sevast'Janov, S.V., Strusevich, V.A., Wassenhove, L.N., and Zwaneveld, C.M.; "The Two-stage Assembly Scheduling Problem: Complexity and Approximation," Operations Research, 43: 346-355, 1995.

[10] Sun, X., Morizawa, K., and Nagasawa H.; "Powerful Heuristics to Minimize Makespan in Fixed, 3-machine, Assembly-type Flowshop Scheduling," European Journal of Operational Research, 146: 499-517, 2003.

[11] Sung, C.S., and Yoon, S.H.; "Minimizing Total Weighted Completion Time at a Pre-assembly Stage Composed of Two Feeding Machines," International Journal of Production Economics, 54: 247-255, 1998.