

## 광탄성 4단계 위상 이동법과 유한요소법에 의한 크레인 훅의 응력분포 비교

### Stress Distribution of a Crane Hook by Photoelasticity Using 4-step Phase Shifting Method and Finite Element Method

백태현\*<sup>†</sup>, 김 환\*\*, 이춘태\*\*

Tae Hyun Baek\*<sup>†</sup>, Whan Kim\*\* and Chun Tae Lee\*\*

초 록 본 연구에서는 크레인 훅을 광탄성 재료의 일종인 '포토플렉스'를 이용, 2차원으로 모델링하여 힘을 가하였을 경우, 최대 압축 및 인장 응력이 발생하는 선상에서 광탄성실험법, 단순 곡선보 이론 및 유한요소법을 이용하여 응력을 측정하고 계산하였다. 특히, 광탄성 실험은 재래식 측정법에 의한 타디보간법, 프린지 세션처리법 그리고 최근 개발된 4단계 위상이동법 등 세가지 방법을 이용하였다. 광탄성 4단계 위상이동법은 주응력 방향, 즉 등경선이 일정한 선상에서는 연속적인 응력분포를 얻을 수 있는 장점이 있다. 크레인 훅에서 주응력 방향이 일정한 선상에 발생된 응력은 3가지 서로 다른 광탄성 실험법에 의해 측정된 결과가 잘 일치하였다. 광탄성법에 의한 결과는 훅의 끝단 부근을 제외하고는 단순곡선보 이론이나 유한요소 해석결과와 대체적으로 비슷하였으나, 정확히 일치하지는 않았다. 이러한 차이는 크레인 훅의 실제 시편의 곡률등 형상과 하중조건이 단순곡선보 이론이나 유한요소 모델링 형상과 약간 다르기 때문에 나타난 것으로 추정된다. 광탄성실험법은 형상이 불규칙하고 하중조건이 복잡할 경우 실제 발생하는 응력을 전체적으로 정밀하게 측정할 수 있으므로 응력해석에 대한 이론 및 수치해석법을 검증하는데 활용될 수 있다.

**주요용어:** 광탄성, 타디보간법, 등경프린지, 4단계위상이동법, 프린지세션처리, 유한요소법

**Abstract** An experimental study for a crane hook was performed to investigate the stress distribution along a certain line where the maximum and minimum stresses to be developed. On this line, the isoclinic fringe and/or principal stress direction is constant. The crane hook was modeled into a 2-dimensional plate made of urethane rubber called 'Photoflex'. The Photoflex is very sensitive to a load and has low photoelastic fringe constant. The Tardy compensation method with the fringe sharpening process and the 4-step phase shifting method, was used for the photoelastic technique. Experimental results by photoelasticity were compared with the calculated stresses from the simple curved beam theory and the finite element analysis. All the results were close to each other.

**Keywords:** photoelasticity, Tardy compensation method, isoclinic fringe, 4-step phase shifting method, fringe sharpening, finite element method

1. 서 론

광탄성법(photoelasticity)은 역학에서 응력 또는 변형률을 해석하기 위한 실험방법으로서 구조 및 기계부품의 복합적인 하중상태 하에서 접촉 응력(contact stress), 응력 집중(stress concentration), 응력 분포 상태를 고려한 최적설계 및 균열 부의 응력강도계수(stress intensity factor) 해석 등에 광범위하게 적용되고 있으며, 특히 전체응력장(whole stress field)을 가시적으로 명확히 판별할 수 있는 장점이 있다[1-3]. 그러나 광탄성 시편의 임의의 점으로부터 응력과 관련된 데이터를 측정하기 위해서는 광탄성 영상(photoelastic image)의 등색(isochromatic)선과 등경(isoclinic)선으로부터 타디보정법(Tardy compensation method)과 같은 방법을 이용하여야 하며, 전체의 응력장을 해석하기 위해서는 각 점에 대해서 개별적으로 보정하고 측정해야 하는 불편한 점이 있다[2,3]. 본 연구에서는 인장시편과 압축하중을 받는 디스크를 이용한 교정시험(calibration test)에 의하여 시편재료의 프린지 상수(fringe constant)를 결정하였고, 크레인 훅형상의 시편에 대한 응력을 측정하기 위하여 타디보정법(Tardy compensation method)과 4단계 위상 이동법(4-step phase shifting method)을 이용하였다[4,5]. 또한, 크레인 훅에 나타난 프린지를 정밀하게 측정하기 위하여 프린지 세선처리(fringe sharpening) 기법을 적용하였다[6]. 크레인 훅에 대한 광탄성실험 결과는 곡선보(curved beam)에 대한 이론식과 상용 유한요소 프로그램인 ABAQUS에 의해 분석된 결과 값을 비교하였다[7].

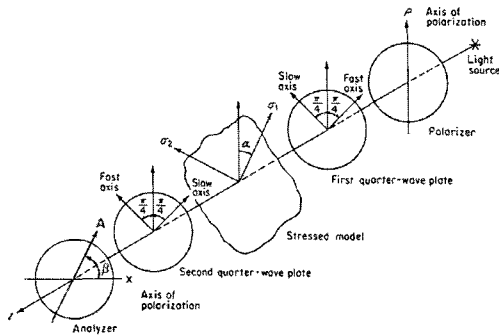


Fig. 1 Circular polariscope (dark-field setup)

2. 광탄성 이론

2.1. 타디보정법

광탄성에서 주응력의 차이에 나타나는 등색선프린지(isochromatic fringe)는 Fig. 1과 같이 편광판(polarizer), 두 개의 4분파판(quarter wave plate), 그리고 검광판(analyzer)으로 구성된 원형편광기(circular polariscope)로부터 얻을 수 있다.

원형편광기의 암시아배열(dark-field setup)에서 검광판을 임의의 각도  $\beta$  로 회전시켰을 때 광강도(light intensity)  $I_\beta$  는

$$I_\beta = K(1 - \cos 2\beta \cos \Delta - \sin 2\beta \cos 2\alpha \sin \Delta) \tag{1}$$

위의 식에서  $K$  = 비례상수,  $\beta$  = 암시아 배열로부터 검광자의 회전각,  $\alpha$  = 등경각(isoclinic angle),  $\Delta$  = 상대지연(relative retardation)으로  $\Delta = 2\pi N$  이며,  $N$ 은 등색선프린지 차수(isochromatic fringe order)를 의미한다. 편광기를 주응력방향(direction of principal stress)과 일치시켰을 때, 즉 등경각이  $\alpha = 0$  조건에서는

$$I_\beta = K(1 - \cos 2\beta \cos \Delta - \sin 2\beta \sin \Delta) \tag{2}$$

식 (2)를 정리하면

$$I_\beta = K\{1 - \cos(\Delta - 2\beta)\} \tag{3}$$

식 (1)에서 검광자 회전각  $\beta$ 에 대해 최대 혹은 최소 강도에 필요한  $\alpha$ 와  $\Delta$ 는 식 (4)로부터 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = K(2 \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin \Delta) = 0 \tag{4a}$$

$$\frac{\partial I}{\partial \Delta} = K(\cos 2\beta \sin \Delta - \cos 2\alpha \cos 2\beta \cos \Delta) = 0 \tag{4b}$$

식 (4a, b)를 만족하는  $\alpha$ 와  $\Delta$ 의 최소 강도는 다음과 같다.

$$\alpha = \frac{n\pi}{2} \text{ and } \Delta = 2\gamma \pm 2n\pi \quad \text{단 } n=0,1,2,\dots$$

위의 결과로부터 주응력 방향이 편광자축에 평행할 때 ( $\alpha = 0, \pi/2, \dots$ )는  $I = 0$ 이 된다. 이 결과

로부터 소수의 프린지값(fractional fringe order),  $N$ 은

$$N = \frac{\Delta}{2\pi} = n \pm \frac{\beta}{\pi} \quad (5)$$

로서 구할 수 있다.

## 2.2. 4단계 위상이동법

원형 편광기의 타디 보정법(Tardy compensation)에 관한 식으로부터 프린지 위상 이동법(fringe phase shifting method)에 관한 식을 구할 수 있다. 식 (2)에서 광탄성 프린지와 관계없는 background noise  $I_0$ 를 고려하고,  $\phi = 2\beta$ 로 대체시킨 후, 식 (2)를 광강도에 관한 일반적인 식으로 변형하여 나타내면 다음의 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$I(x) = I_0(x) + I_f(x) \cos[\Delta(x) + \phi] \quad (6)$$

식 (6)에서  $I_f(x)$ 는 프린지 패턴(fringe pattern)의 광강도를 의미한다.  $\phi$ 는 위상차(phase difference)로서 등색선프린지 차수와 관계되는  $\Delta(x)$ 를 구하기 위하여  $\phi$ 를 0에서  $2\pi$  사이의 값을 택할 수 있으며, 여러 가지 알고리즘이 사용되고 있다. 원형편광기의 암시야배열(dark field arrangement)로부터 위상차를  $\phi = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ 로 변화시켜 가며 각각에 해당하는 광탄성 영상을 얻은 후, 이들로부터 등색선 분포에 대한 위상값을 얻는 방법이 4단계 위상 이동법이다. 4단계 위상 이동법에서 각각의 광강도에 관한 식은 다음의 식과 같다.

$$I_1 = \frac{K}{2}(1 - \cos\Delta) \quad (7a)$$

$$I_2 = \frac{K}{2}(1 - \cos 2\alpha \sin\Delta) \quad (7b)$$

$$I_3 = \frac{K}{2}(1 + \cos\Delta) \quad (7c)$$

$$I_4 = \frac{K}{2}(1 + \cos 2\alpha \sin\Delta) \quad (7d)$$

식 (7)에서 검광자로부터 출력된 광강도에 관한 식을 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{I_4 - I_2}{I_3 - I_1} = \frac{\cos 2\alpha \sin\Delta}{\cos\Delta} \quad (8)$$

식 (8)에서  $\Delta = 2\pi N$  이고,  $\alpha = 0^\circ$  또는  $\alpha = \pm\pi$  인 경우에 등색프린지 차수는 다음과 같다.

$$N = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{I_4 - I_2}{I_3 - I_1}\right) \quad (9)$$

따라서 4단계 위상이동법은 오로지 등경선  $\alpha = 0^\circ$  또는  $\alpha = \pm\pi$  인 경우에 유효하며, 그렇지 않은 경우에 등색프린지 차수  $N$ 은 등경선의 각도에 따른 오차가 포함된다. 위의 프린지 이동법은 재래적으로 사용되고 있는 타디보정법의 개선된 방법으로서 등경각이 일정한 선에서 연속적인 프린지 분포를 얻을 수 있다.

## 2.3. 세션처리 이론

광탄성 프린지의 세션처리과정은 영상처리에서 일반적으로 알려져 있는 가장자리 탐색(edge detection)과 유사하지만, 광탄성 프린지의 세션처리(fringe sharpening)는 광강도가 최대 또는 최소가 되는 궤적을 계산하여야 하기 때문에 가장자리 탐색의 원리를 더욱 확장시킨 방법이라 할 수 있다. 암시야 배열의 원형편광기에서 광강도는 국소 최소값(local minimum)에서 정차수 프린지가 되고, 국소 최대값(local maximum)에서는 반차수 프린지가 된다. 국소 극값 사이에서는 광강도의 변화가 일정한 방향으로 감소 또는 증가하고, 국소 극값에서는 광강도가 증가에서 감소 또는 감소에서 증가되는 분기점이 된다. 그레이디언트 벡터(gradient vector)는 언제나 상향성(uphill)이며, 국소 극값의 양측에서는 그레이디언트 벡터가 서로 반대방향이므로 그레이디언트 벡터합을 취하면 국소 극값주위에서는 벡터합이 극격히 감소하게 된다. 이와 같이 그레이디언트 벡터합(sum of gradient vector)의 특성을 다음의 식과 같이 수식화[6,8]하여 광탄성 프린지를 세션처리 할 수 있다.

$$T = A \left[ 1 - \frac{|\sum \nabla_x| + |\sum \nabla_y|}{\sum |\nabla_x| + \sum |\nabla_y|} \right] \quad (10)$$

여기서  $T$  = 세션처리된 영상에서의 광강도

$A$  = 비례상수

$\nabla_x$  = x방향의 그레이디언트 벡터성분

$\nabla_y$  = y방향의 그레이디언트 벡터성분

위의 식 (10)과 같은 알고리즘을 이용하여 계산하면, 광강도가 일정한 방향으로 변화될 경우  $T=0$  이 되고, 광강도가 최대 또는 최소인 궤적에서 광강도의 변화가 서로 반대 방향으로 될 경우에는  $T=A$  가 된다. 따라서 식 (10)과 같은 관계식을 이용하면 광강도가 최대 또는 최소인 궤적은 광강도가 A인 세선으로 변환시킬 수 있다.

### 3. 광탄성 실험

#### 3.1. 프린지 상수 결정법

시험편의 프린지상수( $f_\sigma$ )를 결정하기 위해 인장 시험편과 원형디스크를 이용하였다. 디스크에 가한 압축하중을  $P$ , 디스크의 지름을  $D$ , 두께를  $h$ , 디스크의 중심에서 수평선상의 지름방향으로 임의의 거리를  $x$ 로 나타내면, 평면 응력성분은 다음의 관계식과 같다[3].

$$\sigma_{xx} = \sigma_1 = -\frac{2P}{\pi h D} \left( \frac{D^2 - 4x^2}{D^2 + 4x^2} \right)^2 \quad (11a)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_2 = -\frac{2P}{\pi h D} \left[ \frac{4D^4}{(D^2 + 4x^2)^2} - 1 \right] \quad (11b)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad (11c)$$

식 (11)과 같이 주어진 응력 성분으로부터 주응력 차( $\sigma_1 - \sigma_2$ )와 프린지 상수는 다음의 식에 의하여 계산한다.

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{8P}{\pi h D} \frac{D^4 - 4D^2x^2}{(D^2 + 4x^2)^2} = \frac{Nf_\sigma}{h}$$

$$f_\sigma = \frac{8P}{\pi D N} \frac{D^4 - 4D^2x^2}{(D^2 + 4x^2)^2} \quad (12)$$

식 (12)로부터 중심점( $x = y = 0$ )에서의 프린지 상수는 다음의 식 (13)과 같게되며, 이 식을 이용하여 프린지 상수를 구할 수 있다.

$$f_\sigma = \frac{8P}{\pi D N} \quad (13)$$

인장 시험편에 가해진 하중을  $P$ , 인장 시험편의 폭  $w$ , 두께를  $h$ 라고 하면, 평면 응력성분은 다음의 관계식과 같다[2, 3].

$$\sigma_1 = \frac{P}{wh}, \quad \sigma_2 = 0 \quad (14)$$

인장시험편의 프린지 상수는 응력-광 법칙을 이용하면 다음의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{P}{wh} = \frac{Nf_\sigma}{h} \quad (\sigma_2 = 0) \quad \dots\dots (15a)$$

$$f_\sigma = \frac{P}{wN} \quad \dots\dots (15b)$$

프린지 상수를 결정하기 위해 하중을 100g 간격으로 증가 시키며 프린지 차수를 측정하고 이들 측정값을 이용하여 식 (13)과 식 (15b)에 대입하여 원형 디스크로부터는  $f_\sigma = 0.160 \text{ N/mm}$ , 그리고 인장 시험편으로부터는  $f_\sigma = 0.155 \text{ N/mm}$ 의 값을 얻었다. 원형 디스크와 인장 시험편으로부터 얻은 평균값( $f_\sigma = 0.158 \text{ N/mm}$ )을 프린지 상수로 결정하였다.

#### 3.2. 크레인 훅의 광탄성 실험

본 연구에서는 타디 보정법, 프린지 세선처리법, 그리고 프린지 위상이동법을 이용하여 Fig. 2와 같은 크레인 훅에 대한 응력 분포를 측정하였다.

크레인 훅에 1379 N의 하중을 가한 상태에서 Fig. 2에 나타난 훅의 A-A선상에서 프린지 차수를 측정하여 응력으로 변환하고 분석하였다. 4단계 위상이동법에 의한 위상차로부터 프린지 분포를 결정하기 위하여 검광자(analyzer)를  $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$

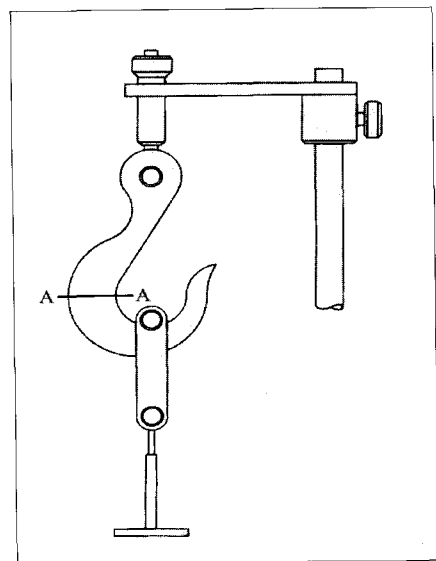


Fig. 2 Loading of crane hook.

회전시켜 Fig. 3과 같은 4개의 광탄성 이미지를 얻었다. 프린지이동으로 인한 위상맵(fringe phase map)은 Fig. 4와 같으며, Fig. 3에 나타난 이미지를 식 (9)에 대입하여 계산하였다.

Fig. 4에 표시된 수평선상(line A-A)의 광강도(phase intensity)는 Fig. 5의 그래프와 같다. 식 (9)에서 arc tangent 범위가  $-\pi$ 에서  $\pi$ 이므로 Fig. 5의 그래프와 같이 위상점프(phase jump)가 나타난다. 이러한 위상점프를 없애기 위해 위상이동에 의한 광강도를 펼치면(unwrapping) Fig. 6과 같이 A-A 선상의 전체적인 프린지 분포를 얻을 수 있으며, 이들을 프린지로 환산하여 A-A선상에서 주응력의 차이로 인한 응력 분포를 나타내었다. 등색프린지 차수를 좀더 정밀하게 측정하기 위하여 프린지를 세선처리하기 위한 프로그램[6]을 사용, Fig. 7과 같이 세선처리된 이미지를 얻었다.

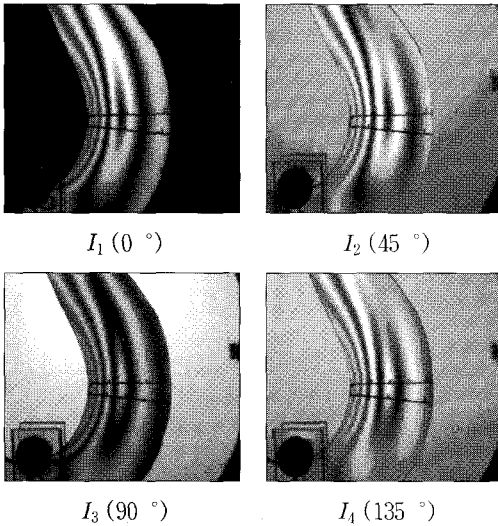


Fig. 3 Fringe shifted patterns by rotating analyzer

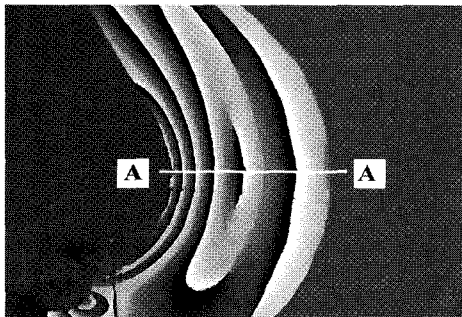


Fig. 4 Isochromatic fringe phase map obtained from Fig. 3

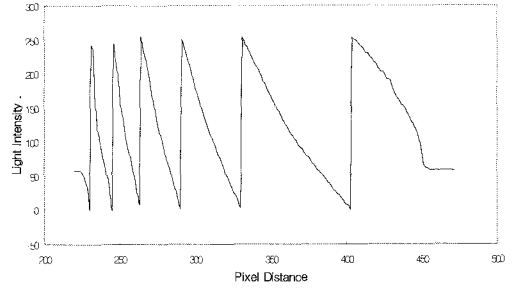


Fig. 5 Light intensities of fringe phase map along the line of A-A in Fig. 4

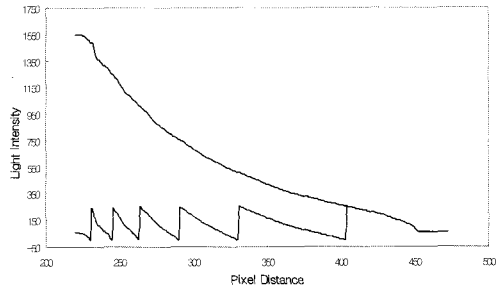


Fig. 6 Light intensities of unwrapped fringe phase map obtained from Fig. 5

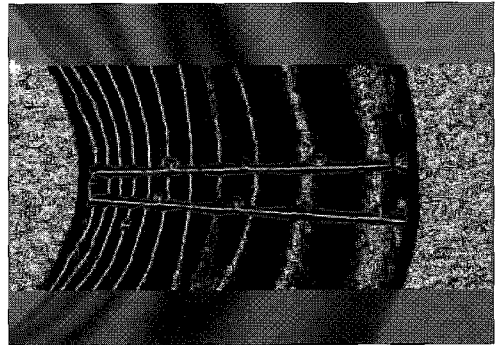


Fig. 7 Isochromatic fringe thinned lines

Fig. 7과 같이 세선처리된 이미지로부터 프린지 차수는  $1/4$  차수, 즉  $0.25$  차수단위로 프린지 위치를 정밀하게 측정할 수 있다. Fig. 8은 A-A선상에서 프린지 위상 이동법 및 타디 보정법, 프린지 세선처리(fringe thinning)에 의해 측정된 값들을 비교한 그래프이며, 위상이동법에 의한 응력은 프린지 세선처리에 의하여 측정된 응력과 일치하며, 타디 보정법에 의한 값과 근접하게 나타났다.

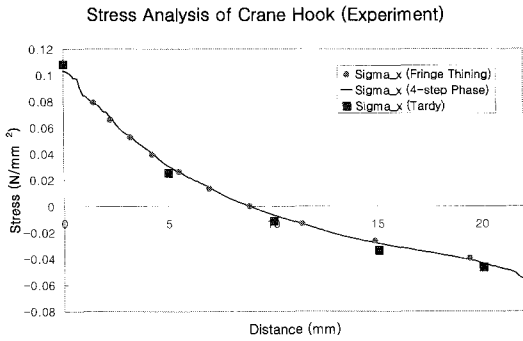


Fig. 8 Comparison of stress along line A-A in Fig. 4 obtained from experiment

4. 크레인훅 이론 해석

4.1. 단순보이론

Fig. 2의 A-A선상에서 발생하는 이론 응력을 얻기 위하여 두 가지 방법을 사용하였다. 첫 번째 방법으로 아래의 식 (16)과 같은 단순보 이론[10]에 의해서 Fig. 2의 A-A선상의 응력을 계산하였다.

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{M_z(\rho - R)}{\rho y A} \tag{16}$$

식 (16)에서 P는 하중, A는 단면적, M<sub>z</sub>는 모멘트, ρ는 곡률 중심으로부터 곡선보 임의 위치까지의 거리를 의미한다. 또한,  $\bar{y} = R_c - R$ 이며, R<sub>c</sub>는 곡률 중심으로부터 곡선부의 도심까지의 거리를 나타내며,  $R = h / \ln(R_o/R_i)$  이고, h, R<sub>o</sub> 및 R<sub>i</sub>는 각각 시편의 폭, 곡률 중심으로부터 외측 반경과 내측반경이다.

4.2. 유한요소법

두 번째 방법으로 Fig. 2의 A-A선상의 응력을 얻기 위하여 유한요소법을 사용하였다. 유한요소 상용 프로그램인 ABAQUS를 이용하였다. 해석에 사용된 물성치는 E = 31 MPa, ν = 0.48이며, 20 노드 육면체요소(C3D20)를 사용하였다.

Fig. 9의 그래프에서 보인 바와 같이 단순보 이론 값과 유한요소해석에 의해 얻은 값이 대체로 일치하였으나 외측반경 부분에서 단순보 이론에 비해

20%의 차이가 발생함을 알 수 있다. Fig. 10은 유한요소해석을 통해 크레인 훅 전체에 걸쳐 나타난 응력분포 상태이며, Fig. 2에서 표시된 A-A선상의 내측에 가장 큰 응력이 발생되었다.

Fig. 11에서 보인 바와 같이 광탄성 위상이동법에 의한 응력은 프린지를 세선처리하여 측정된 값과 일치하였으나 타디 보정법에 의한 결과는 최대 5%의 차이가 있었다. 또한, 단순 곡선보 이론과 유한요소결과는 서로 근접하게 나타났다. Fig. 11의 그래프에서 보면 내측반경 부분에서는 값들이 유사한 결과를 보이지만 외측반경으로 갈수록 오차가 발생하였으며, 외측 끝단에서는 단순 곡선보 이론에 비해 유한요소 값은 최대 20%의 차이가 발생하였다. 이는 실험에 사용된 실제의 크레인 훅의 형상이 단순 곡선보 이론이나 유한요소 해석에 이용된 형상과 기하학적으로 일치하지 않아 나타난 것으로 추정하며, 실제 제품으로부터 곡률 반경을 정밀하게 측정하기 어려운 점이 있었다.

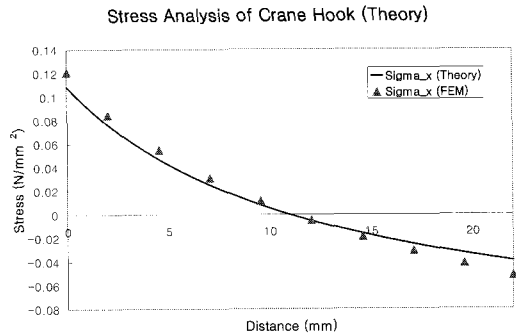


Fig. 9 Comparison of stress distributions along line A-A obtained from the simple beam theory and finite element analysis

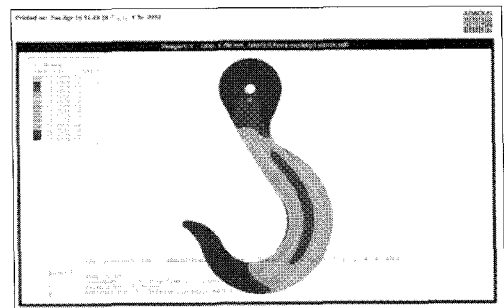


Fig. 10 Stress distributions of the crane hook calculated by ABAQUS

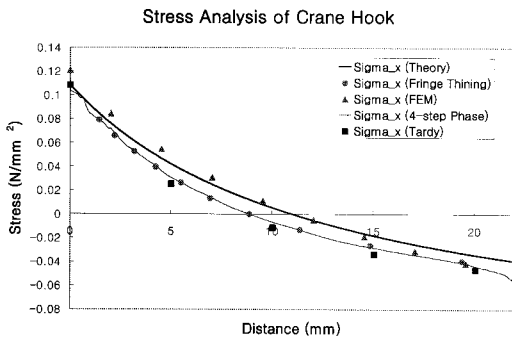


Fig. 11 Stress distribution along the line A-A of Fig. 4 obtained from experiment and theory

#### 4. 결 론

본 연구에서는 크레인 훅을 2차원으로 모델링하여 힘을 가하였을 경우, 최대 압축 및 인장 응력이 발생하는 선상에서 광탄성실험법, 단순 곡선보 이론 및 유한요소법을 이용하여 응력을 측정하고 계산하였다.

광탄성 실험은 재래식 측정법에 의한 타디보간법, 프린지 세션처리법 그리고 최근 개발된 4단계 위상이동법등 세가지 방법을 이용하였다. 광탄성 4단계 위상이동법은 주응력 방향, 즉 등경선이 일정한 선상에서는 연속적인 응력분포를 얻을 수 있는 장점이 있다. 크레인 훅에서 주응력 방향이 일정한 선상에 발생된 응력은 3가지 서로 다른 광탄성 실험법에 의해 측정된 결과가 잘 일치하였다. 광탄성 실험법에 의한 훅의 응력해석 결과는 훅의 끝단 부근을 제외하고는 단순곡선보 이론이나 유한요소 해석결과와 대체적으로 비슷하게 나타났으나, 이러한 차이는 훅의 실제 형상이 단순곡선보 이론이나 유한요소 모델링에 의한 형상과 서로 다르기 때문에 나타난 것으로 추정하며, 훅에 실제로 발생된 응력은 광탄성법에 의해 정확히 측정할 수 있었다. 따라서, 광탄성법중 프린지 세션처리법이나 4단계 위상이동법은 형상이 불규칙하고 하중조건이 복잡할 경우 실제 발생하는 응력을 전체적으로 정밀하게 측정할 수 있으므로 응력해석에 대한 이론 및 수치 해석법을 검증하는데 활용될 수 있다. 또한, 실제 3차원 형상의 크레인 훅의 응력분포는 반사형 편광장비를 이용하면 위의 광탄성 실험법중 프린지 세션처리법이나 4단계 위상이동법의 적용이 가능할 것으로 예상된다.

#### 후 기

본 연구는 산학협동재단 2003년도 학술연구비와 한국과학재단 목적기초연구과제(과제번호: R05-2003-000-11112-0) 연구비 지원으로 수행되었음.

#### 참고문헌

- [1] M. M. Frocht, Photoelasticity, Vol. I and II, John Wiley and Sons (1967)
- [2] J. W. Dally and W. F. Riley, Experimental Stress Analysis, Second Ed. McGraw-Hill, Inc. (1991)
- [3] G. L. Cloud, Optical Methods of Engineering Analysis, Cambridge University Press (1995)
- [4] A. Asundi, "Phase Shifting in Photoelasticity", Experimental Techniques, Vol. 7, No. 1, pp. 19-23 (1993)
- [5] 백태현, 김명수, 김수일, "광탄성 프린지 위상 이동법을 이용한 곡선보평판의 응력해석", 2000년 대한기계학회 논문집 A권, 제24권, 제9호, pp. 2313-2318 (2000)
- [6] 백태현, "광탄성 프린지 해석을 위한 영상처리 기법 개발", 대한기계학회 논문집, 제18권, 제10호, pp. 2577-2584 (1994)
- [7] ABAQUS VER. 6. 2.
- [8] 백태현, 김명수, 김수일, "광탄성법을 이용한 곡선보 평판의 응력분포 해석", 비파괴검사학회지, 19권, 3호, pp. 200-206 (1999. 6)
- [9] T. E. Thorpe, "An Experimental Introduction to Photoelasticity: A Programmed Learning Kit using the Sharpless Stress Master Polariscopes", Victoria University, UK (1979)
- [10] W. F. Riley, L. D. Sturges, and D. H. Morris, Mechanics of Materials, Fifth edition, John Wiley & Sons Inc. (1999)