

# 베이스 운동을 받는 다자유도 능동자기베어링계에서 외란 관측기 기반 슬라이딩모드 제어

## Disturbance Observer Based Sliding Mode Control for Multi-DOF Active Magnetic Bearing System Subject to Base Motion

강 민 식\*

Kang Min Sig

(2004년 7월 27일 접수 : 2004년 10월 2일 심사완료)

**Key Words** : Active Magnetic Bearing(능동자기베어링), Sliding Mode Control(슬라이딩모드 제어), Base Disturbance(베이스 외란), Disturbance Observer(외란관측기)

### ABSTRACT

This paper addresses the application of an active magnetic bearing (AMB) system to levitate the elevation axis of an electro-optical sight mounted on a moving vehicle. In this type of system, it is desirable to retain the elevation axis in an air-gap between magnetic bearing stators while the vehicle is moving. To eliminate disturbance responses, a disturbance observer based sliding mode control is developed. This control can decouple disturbance observation dynamics from sliding mode dynamics and preserves the robustness of the sliding control. The sliding surfaces are designed in the consideration of scattering of received image. The proposed control is applied to a 2-DOF active magnetic bearing system subject to base motion. Along with experimental results, the feasibility of the proposed technique is illustrated.

### 기 호 설 명

- $A_y$  : 고각축 중심에서 베이스 수직방향 가속도
- $F_y$  : 축에 전달되는 수직방향 전자기력의 합
- $F_{y1}, F_{y2}$  : AMB-1, 2에서의 수직방향 전자기력
- $g$  : 고각축 수직방향 중력가속도 성분
- $I_z$  : 축 질량중심 기준 축의 질량관성모멘트
- $m$  : 축의 질량
- $M_z$  : 축에 전달되는 회전 모멘트
- $\hat{v}, \tilde{v}$  : 외란관측치, 외란관측 오차

- $y$  : 고각축 중심의 공칭공극 기준 공극변화
- $\alpha_z$  : 고각축 중심에서 베이스 각 가속도
- $\theta_z$  : 고각축 회전각
- $\sigma$  : 슬라이딩 함수

### 1. 서 론

조준경은 이동하는 물체를 추적하기 위한 목적으로 사용되는 전기-광학 장치로, 주로 이동하는 군용차량에 장착되어 사용된다. 조준경에는 대상물체의 영상을 추적하기 위한 반사거울과 영상수신장치가 있으며, 차량이 이동 중에도 조준경의 시선(line of sight)이 항상 목표물을 추적하도록 안정화 장치가 있다. 안정화 장치는 고각 방향과 방위각 방향으로 회전이 가능한 2-자유도 김발 구조를 갖으며, 각 김발은 모

† 책임저자 : 정희원, 경원대학교 기계공학과  
E-mail : mskang@kyungwon.ac.kr  
Tel : (031) 750-5524, Fax : (031) 750-5273

터에 의해 구동된다. 고각 김발에는 목표물 영상을 반사시키는 반사거울이 고정되어 있으며, 방위각 김발은 고각 김발을 지지하며 방위각 방향으로 회전할 수 있다. 이동 차량에 장착된 조준경이 목표물을 추적하여 안정된 표적의 영상을 획득하기 위해서는 각 김발은 차량의 회전 방향과 반대방향으로 회전시켜야 된다. 이것이 조준경의 안정화 개념이다.<sup>(11)</sup> 현재 사용되고 있는 조준경에서 회전축은 억지끼워맞춤으로 조립된 볼베어링으로 지지되므로, 억지끼워맞춤량이 클수록 축의 반경방향 강성은 높아지지만 반면에 축의 마찰 토크는 증가하게 된다. 마찰은 제어계에서 오차를 발생시키며<sup>(2)</sup> 특히 조준경의 안정화와 같이 회전 속도가 낮고 방향이 자주 바뀌는 경우 주요 오차요인으로 작용한다. 마찰이 있는 제어계에서 제어 정밀도 향상을 위한 많은 연구가 진행되어 왔으나, 아직도 활발한 연구 대상으로 남아있는 실정이다.<sup>(1, 2)</sup>

마찰의 영향을 근본적으로 해결할 수 있는 방안으로 축을 비접촉식으로 부양하여 지지하는 능동자기베어링(AMB, active magnetic bearing) 적용을 들 수 있다. AMB는 무마찰, 무윤활과 같은 장점과, 특히 베어링의 동특성을 제어에 의해 자유로이 조정할 수 있다는 장점을 제공한다. 반면 축 방향의 강성을 기존의 기계적 베어링으로 지지하는 경우와 같이 높이기 어려우므로, 차량의 운동에 따라 축의 전자석 기준 상대적 진동이 증가하는 문제가 발생한다.

이 진동을 줄이기 위한 방법으로 되먹임제어를 통해 베어링계의 대역폭을 증가시키는 방법<sup>(3, 4)</sup>이 있으나, 공진현상이나 잡음에 대한 민감도 증가 등의 문제를 야기하므로 한계가 있다. 다른 방법으로 조준경이 장착부위의 가속도를 측정하여 보상하는 가속도 앞먹임보상제어를 들 수 있다.<sup>(5-7)</sup> 가속도 앞먹임보상제어의 경우 효과적이기는 하나 베이스 가속도를 측정해야 되는 부담이 있다. 베이스 외란을 측정하지 않고 외란 응답을 감소시키는 방법으로 슬라이딩모드 제어(SMC: sliding mode control)가 적용된 바 있다.<sup>(8)</sup> SMC는 외란이나 계의 파라미터 불확실성이 존재하는 경우 효과적인 방법으로, 제어계의 동특성과 무관하게 제어 목적에 적합한 슬라이딩 평면을 정의할 수 있고, 계의 상태를 이 평면에 유지시킬 수 있다.<sup>(9, 10)</sup> AMB계에서 SMC를 적용한 연구는 대부분 전자기력의 비선형성이나 간단한 형태의 외란을 제어 대상으로 하였으며,<sup>(11-14)</sup> 외란이 주요 제어 대상이

되는 경우에 대한 연구는 소수이다.<sup>(8)</sup>

SMC를 실제 적용할 경우 해결해야 되는 문제점은 체터링 발생이다. 체터링을 감소시키기 위한 많은 방법이 제시되고 있는데, 외란에 주안점을 둔 방법은 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 첫째는 기존의 슬라이딩모드제어를 보완하는 방법과, 둘째는 외란을 추정하여 보상하는 방법이다. 전자는 도달과정에서의 외란에 대한 강인성을 부여한 적분형 슬라이딩모드 제어,<sup>(15)</sup> 또는 슬라이딩 함수의 적분과 미분을 제어에 포함시키는 방법<sup>(16)</sup> 등이 있으며, 후자는 계의 출력을 플랜트 역동력학 모델과 필터를 통과시켜 외란을 관측하는 외란관측기 기반 슬라이딩모드 제어,<sup>(17)</sup> 계의 상태를 추정한 다음 추정오차에 등가제어(equivalent control)방법<sup>(18)</sup>을 적용하는 방법,<sup>(19)</sup> 외란 추정 및 보상방법<sup>(20, 21)</sup>을 들 수 있다. 이 연구에서는 1-자유도 전자기베어링계에서 외란응답 감소를 목적으로 제시된 관측기 기반 SMC<sup>(21)</sup>를 다자유도 전자기베어링계에 적합토록 수정하여 적용하며, 2-자유도 전자기베어링계에 적용하여, 실험결과를 통해 제어기 성능을 검증한다.

이 연구에서 얻은 제어기 설계방법은 제작 중인 조준경의 고각 축에 적용될 예정이다.

## 2. 조준경 모델

### 2.1 운동방정식

Fig. 1은 AMB계로 지지된 조준경 고각축의 개념도로 편의상 축방향 AMB와 구동 모터는 생략하였다. 전방에 있는 물체의影상은 거울에 반사되어 조

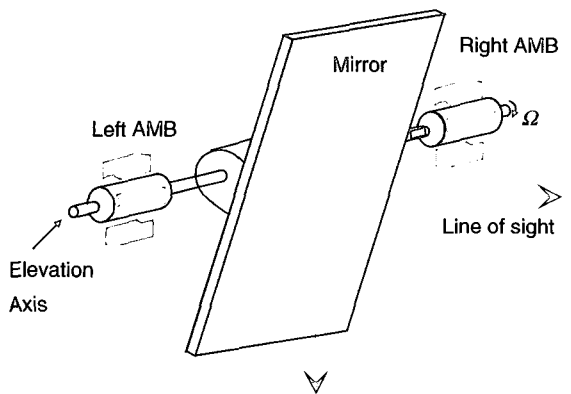


Fig. 1 Schematic diagram of sight's elevation axis supported by AMB system

준경 하단의 영상수신부로 전달된다. 고각축의 좌측과 우측에는 각각 상하방향과 전후방향으로 AMB가 대칭으로 설치된다. 각 AMB는 축을 사이에 두고 반대 방향에 설치된 한 쌍의 전자석으로 구성된다. Fig. 1의 고각축을 자유물체도로 나타내면 Fig. 2와 같다. 스프링은 전자기력에 의한 강성 효과를 개념적으로 나타낸 것이다. 고각축의 회전속도  $\Omega$ 는 작으므로 축의 회전에서 생기는 운동의 연성 효과는 무시할 수 있다. 따라서 축의 운동은 회전을 제외하면 수평면에서의 2-자유도 운동, 수직면에서의 2-자유도 운동 및 축방향 1-자유도 직선운동으로 분리하여 기술할 수 있다. 이 연구에서는 수직평면에서의 병진운동과 원추운동을 고려하였다. 수직평면에서의 제어기 설계방법은 쉽게 수평면에서의 제어에 적용할 수 있다.

Fig. 2에서 고각축의 수직평면에서의 운동방정식은 다음 식으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_y \\ M_z \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} mA_y + mg \\ I_z \alpha_z \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서  $m$ 은 축의 질량,  $I_z$ 는 축의 무게중심점 기준 질량관성모멘트이다. Fig. 1에서 설명의 편의를 위해 좌측과 우측의 전자기베어링을 각각 AMB-1, AMB-2라 하자. 축이 한 쌍의 전자석 중심 위치에 있을 때 축 표면과 전자석의 간격을 공칭공극이라 하고, AMB-1과 AMB-2의 공칭공극 기준 공극의 변화를 각각  $y_1$ ,  $y_2$ 라 한다. 앞으로 공칭공극 기준 공극 변화를 공극이라 칭한다. 식 (1)에서  $y$ 는 AMB-1과 AMB-2 위치에서 축이 공칭공극 위치에 있을 때를

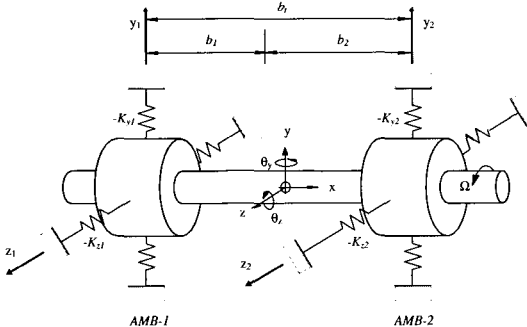


Fig. 2 Schematic diagram of magnetic bearing system

기준으로 한 축 무게중심점의 변위이며,  $\theta_z$ 는 회전각을 나타낸다. Fig. 2에서  $b_1$ 과  $b_2$ 는 축의 무게중심에서 AMB-1, AMB-2까지의 거리로, 대칭으로 가정하면  $b_1 = b_2 = b$ 이다.  $F_y$ 와  $M_z$ 는 각각의 AMB에 의해 축의 무게중심에 전달되는 전자기력과 회전모멘트이다.  $A_y$ 와  $\alpha_z$ 는 각각 축의 무게중심점 위치에서 나타낸 베이스의 수직가속도와 각가속도이며,  $g$ 는 중력가속도이다.

AMB-1과 AMB-2 위치에서 축에 전달되는 전자기력은 코일에 바이어스(bias)전류를 입력할 경우 공극  $y$ 와 제어전류  $i$ 가 작을 경우 다음의 선형 관계로 표현된다.

$$F_{y1} = K_{d1}y_1 + K_{i1}i_1, \quad F_{y2} = K_{d2}y_2 + K_{i2}i_2 \quad (2)$$

여기서  $K_d$ 와  $K_i$ 는 각각 전자기베어링의 위치강성(position stiffness)과 전류강성(current stiffness)을 나타내며, 하첨자 1과 2는 각각 AMB-1과 AMB-2를 나타낸다. AMB-1과 AMB-2의 기하학적 위치에 의해  $F_y$ 와  $M_z$ 는 다음으로 표현된다.

$$F_y = F_{y1} + F_{y2}, \quad M_z = -b_1F_{y1} + b_2F_{y2} \quad (3)$$

식 (2)와 (3)을 (1)에 대입하고 정리하면 수직평면에서의 운동은 다음 식으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta}_z \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{d1} + K_{d2} & b(K_{d2} - K_{d1}) \\ b(K_{d2} - K_{d1}) & b^2(K_{d1} + K_{d2}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = K_a \begin{bmatrix} K_{i1} & K_{i2} \\ -bK_{i1} & bK_{i2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} mA_y + mg \\ I_z \alpha_z \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서  $K_a$ 는 전자석에 전류를 공급하는 전력증폭기의 이득으로, 전력증폭기는 대역폭이 충분히 높아 증폭기 입력 전압과 코일전류는 비례관계를 만족하며, AMB-1과 AMB-2의 증폭기 특성은 동일한 것으로 가정한다.  $u_1$ 과  $u_2$ 는 각각 AMB-1과 AMB-2의 증폭기에 입력되는 제어전압이다.

식 (4)를 변위센서 측정좌표계에서 나타내기 위해  $\theta_z = \Delta y/b, \Delta y = (y_2 - y_1)/2$ 의 관계를 이용하여 다시 쓰면

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \Delta \ddot{y} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} (K_{d1} + K_{d2})/m & (K_{d2} - K_{d1})/m \\ b^2(K_{d2} - K_{d1})/I_z & b^2(K_{d1} + K_{d2})/I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \Delta y \end{Bmatrix} \\ &= K_a \begin{bmatrix} K_{i1}/m & K_{i2}/m \\ -b^2 K_{i1}/I_z & b^2 K_{i2}/I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(\ddot{w}_1 + \ddot{w}_2) + g \\ \frac{1}{2}(\ddot{w}_2 - \ddot{w}_1) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서  $\ddot{w}_1, \ddot{w}_2$ 는 각각 AMB-1과 AMB-2 위치에서 베이스의 수직방향 가속도를 나타낸다. 식 (5)에서와 같이 계는 불안정하며, 베이스 가속도는 동적 외란, 중력은 정적외란으로 작용함을 알 수 있다.

식 (5)로 나타나는 AMB 계에서 제어의 목표는 계의 안정화와 아울러 획득된 표적 영상의 떨림을 최소화하기 위해 베이스 외란과 자중에 의한 공극응답  $y(t)$ 와  $\Delta y(t)$ 를 최소화시키는데 있다. 즉, 축이 높은 강성을 갖는 베어링으로 조립된 경우와 같이 베이스와 축이 동일한 속도와 가속도를 갖고 같이 운동하도록 하는 데 있다.

### 2.2 축의 진동과 영상 떨림의 관계

조준경에서 궁극적 목표는 베이스 운동 하에서도 안정된 표적 영상을 얻는데 있다. 따라서 축의 진동과 영상전시장치에 전시되는 영상의 떨림의 관계를 규명해야 된다.

Fig. 3은 고각축의 수직평면 상에서의 회전과 표적 영상 전시장치에 나타나는 표적 영상의 위치 변화 관

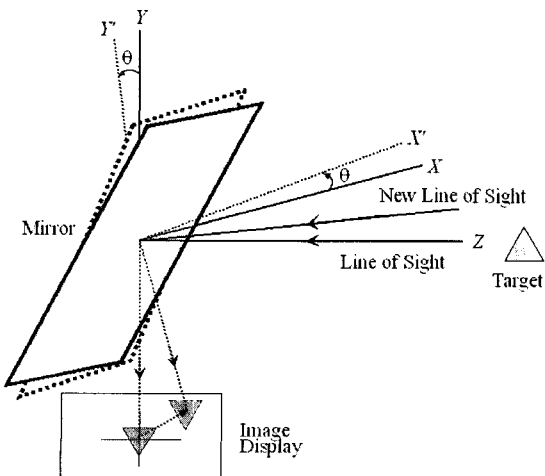


Fig. 3 Image scattering due to axis movement

계를 나타낸다. 시선축(line of sight)과 반사경이 45°를 이루고 있을 때 (조준경 운용 중 대부분은 이 지점에서 이루어짐), 수직평면 상에서 고각축이 미소각  $\theta$ 만큼 회전할 경우 전시장치 중심에는 표적 중심점으로부터 벡터  $\vec{d}_\theta$ 만큼 떨어진 지점이 전시된다. 이  $\vec{d}_\theta$ 는 반사경의 반사특성을 기하학적으로 분석하면 다음 식으로 나타낸다.

$$\vec{d}_\theta = R(-0.5 \sin 2\theta \hat{i} + \sin^2 \theta \hat{j}) \cong -R\theta \hat{i} = -R \frac{y_2 - y_1}{2b} \hat{i} \quad (6)$$

여기서  $\hat{i}$ 와  $\hat{j}$ 는 각각  $x$ 와  $y$ -방향의 단위벡터이며,  $R$ 은 조준경으로부터 목표물까지의 거리이다. 식 (6)에서와 같이 축의 회전에 의한 영상의 위치변화는 주로 수평방향으로 나타나며, 목표물과의 거리가 멀수록 그 양이 비례적으로 증가한다. 고각축이  $y$ -축 방향으로 평행이동한 경우 영상은  $y$ -축 방향으로 동일한 크기만큼 평행이동하게 된다. 따라서 축의 회전에 의한 영상 위치변화는 축의 평행이동에 의한 변화에 비해 매우 크며, 목표물의 거리가 멀수록 비례적으로 더 커진다. 결론적으로 영상의 떨림을 고려한 축의 진동제어에서는 축의 병진운동에 비해 원추운동에 훨씬 큰 가중치를 두어야 함을 알 수 있다.

### 3. 슬라이딩 모드 제어

식 (5)로 주어지는 계는 타입-0계이므로 축의 중력에 의한 정상상태 오차를 제거하기 위해 적분제어가 필요하다. 따라서 적분기가 포함된 상태공간제어를 위해 계를 다음의 상태공간방정식으로 나타낸다.

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ed \quad (7)$$

여기서 상태변수, 입력벡터, 외란벡터 및 시스템 행렬은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$x = \begin{bmatrix} \int y dt \\ \int \Delta y dt \\ y \\ \Delta y \\ \dot{y} \\ \Delta \dot{y} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad d = - \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\ddot{w}_1 + \ddot{w}_2) + g \\ \frac{1}{2}(\ddot{w}_2 - \ddot{w}_1) \end{bmatrix}$$

(8)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21} & k_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_{11} = (K_{d1} + K_{d2})/m, \quad k_{12} = (K_{d2} - K_{d1})/m$$

$$k_{21} = b^2(K_{d2} - K_{d1})/I_z, \quad k_{22} = b^2(K_{d2} + K_{d1})/I_z$$

$$b_{11} = K_a K_{i1}/m, \quad b_{12} = K_a K_{i2}/m$$

$$b_{21} = -b^2 K_a K_{i1}/I_z, \quad b_{22} = b^2 K_a K_{i2}/I_z$$

식 (8)에서와 같이 계의 주된 파라미터는 위치강성, 전류강성 및 증폭기 이득이다. 여기서 강성은 식 (2)에서와 같이 공칭공극과 바이어스 전류를 기준으로 선형화 되었으므로 모델 오차가 존재한다. 이 강성모델의 오차를 고려하여 시스템 행렬 요소들을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$k_{ij} = \bar{k}_{ij} + \Delta k_{ij}, \quad b_{ij} = \bar{b}_{ij} + \Delta b_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \quad (9)$$

여기서  $\bar{k}_{ij}$ 와  $\bar{b}_{ij}$ 는 공칭값 또는 아는 값,  $\Delta k_{ij}$ 와  $\Delta b_{ij}$ 는 오차 또는 불확실성을 나타낸다. 이를 이용하여 식 (7)을 다시 쓰면

$$\dot{x} = \{A_o + \Delta A\}x + \{B_o + \Delta B\}u + Ed \quad (10)$$

여기서

$$A_o = \begin{bmatrix} [0]_{4 \times 6} \\ 0 & 0 & \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta A = \begin{bmatrix} [0]_{4 \times 6} \\ 0 & 0 & \Delta k_{11} & \Delta k_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta k_{21} & \Delta k_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_o = \begin{bmatrix} [0]_{4 \times 2} \\ \bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} \\ \bar{b}_{21} & \bar{b}_{22} \end{bmatrix}, \quad \Delta B = \begin{bmatrix} [0]_{4 \times 2} \\ \Delta b_{11} & \Delta b_{12} \\ \Delta b_{21} & \Delta b_{22} \end{bmatrix}$$

식 (10)에서  $A_o$ 와  $B_o$ 는 공칭 시스템 행렬로 ( $A_o, B_o$ )는 가제어성을 만족하는 것으로 가정한다. 또한  $\Delta A$ 와  $\Delta B$ 는 불확실성을 포함한다.  $\Delta A, \Delta B, Ed$ 의 구조적 특성은 식 (8)의 시스템 행렬의 특성으로부터 식 (11)과 같은 정합조건(match condition)을 만족한다.<sup>(10)</sup>

$$\Delta A x(t) = B_o \xi(t), \quad \Delta B u(t) = B_o f(t),$$

$$Ed = B_o \eta \quad (11)$$

따라서 식 (10)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{x} = A_o x + B_o u + B_o v \quad (12)$$

$$v = \xi + f + \eta$$

여기서  $v$ 는 계의 불확실한 요소와 외란을 합한 총체적 외란에 해당한다.

식 (12)와 같이 정합조건을 만족하는 외란을 제거하는 제어방법으로 슬라이딩모드 제어를 적용할 경우 불연속제어입력에 의해 발생하는 체터링을 감소시키기 위한 많은 방법이 제시되고 있는데, 이 연구 대상과 같이 외란이 주요 제어 대상인 경우 외란을 추정하여 보상함으로써 불연속제어입력의 크기를 현저히 감소시키는 방법이 효과적이다. 외란추정방법으로는 여러 방법이 제시되고 있는데, 외란만을 직접 추정하므로 비교적 구조가 간단하고 성능이 우수한 외란관측방법을 적용키로 한다. 외란관측 및 보상을 기반으로 한 슬라이딩모드 제어기 설계방법은 다음과 같다.

슬라이딩모드 제어기 설계를 위해 슬라이딩 평면  $\sigma(t)$ 를 다음과 같이 정의하면,

$$\sigma(t) = \begin{Bmatrix} \sigma_1(t) \\ \sigma_2(t) \end{Bmatrix} = Sx(t) \quad (13)$$

여기서  $\sigma \in R^{2 \times 1}$ ,  $S \in R^{2 \times 6}$ 이다.

슬라이딩 제어입력  $u(t)$ 는 식 (14)와 같이 등가 제어입력(equivalent control input)과 불연속적 도달 제어입력(reaching control input) 및 외란관측 항의 합으로 구성된다.

$$u(t) = -(SB_o)^{-1} SA_o x(t) - (SB_o)^{-1} \Phi \sigma(t) - (SB_o)^{-1} k \operatorname{sgn}[\sigma(t)] - \hat{v}(t) \quad (14)$$

여기서  $\Phi \in R^{2 \times 2}$ 이며,  $\hat{v}(t) \in R^{2 \times 1}$ 는 총체적 외란  $v(t)$ 의 추정으로, 다음의 슬라이딩모드 관측기에 의해 추정된다.

$$\dot{\hat{v}}(t) = -G(SB_o)^{-1} \sigma(t) - G(SB_o)^{-1} \Phi \int \sigma(t) dt - G(SB_o)^{-1} k \int \operatorname{sgn}[\sigma(t)] dt \quad (15)$$

여기서  $G \in R^{2 \times 2}$ 이다.

식 (14)와 (15)를 적용하면 슬라이딩모드 동력학과 외란관측오차 동력학은 부록에서 유도된 바와 같이 다음 식으로 표현된다.

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) \\ \dot{\tilde{v}}(t) \end{cases} = - \begin{bmatrix} \Phi & SB_o \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma(t) \\ \tilde{v}(t) \end{cases} + \begin{cases} -k \operatorname{sgn}[\sigma(t)] \\ \dot{v}(t) \end{cases} \quad (16)$$

여기서  $SB_o \tilde{v}(t) < k, k > 0$ .

따라서 슬라이딩모드 동력학과 외란관측오차 동력학은 서로 비연성이고, 안정성은 각각  $\det[sI + \Phi]$ 와  $\det[sI + G]$ 의 근에 의해 결정된다. 즉, 슬라이딩모드 동력학과 외란관측기의 동력학은 각각 행렬  $\Phi$ 와  $G$ 를 독립적으로 설계하여 정할 수 있다. 외란 관측기의 특성을 다음과 같이 정리할 수 있다.

(1) 외란 관측기 오차는 외란의 미분 신호를 저역 통과 필터링한 신호에 해당하므로 행렬  $G$ 가 클수록, 그리고 외란의 주파수가 낮을수록 관측 오차가 작아진다. 따라서 외란의 주파수 대역폭을 고려하여 행렬  $G$ 를 크게 선정해야 된다.

(2) 외란이 상수일 경우 정상상태에서 관측오차는 영이된다.

(3) 도달법칙을 만족하기 위한 불연속제어입력의 크기  $k$ 는 외란관측기가 없을 경우  $SB_o v(t) < k$ 를 만족해야 되나, 외란관측기를 이용할 경우  $SB_o \tilde{v}(t) < k$ 의 관계가 요구된다. 따라서 외란관측기를 이용할 경우  $k$ 의 크기를 줄일 수 있고, 불연속제어입력의 크기가 작을수록 체터링 발생이 감소하므로, 외란관측기가 체터링을 감소시키는데 효과가 있다.

실제 적용시 체터링 방지를 위해 제어기의 부호함수 대신 다음의 근사식을 사용하여 체터링을 방지할 수 있다.

$$\operatorname{sgn}[f(t)] \cong \frac{f(t)}{\|f(t)\| + \epsilon}, \epsilon \geq 0 \quad (17)$$

이 제어기는 슬라이딩모드 제어기와는 차이가 있지만, 불연속제어입력의 크기가 클 경우 슬라이딩모드 제어의 안정성을 보장할 수 있다.<sup>(8, 9)</sup>

#### 4. 실험 결과 및 논의

제시된 외란관측기 기반 슬라이딩모드제어의 성능 검증을 위해 Fig. 4의 실험장치를 이용하여 실험하였다. Fig. 5는 실험장치 사진이다. 실험장치에서 축의 양단을 고강도 선으로 구속하여 수평면상에서의 운동과 축방향 운동에 대해 높은 강성을, 수직평면에서의 운동에는 낮은 강성을 갖도록 연결하여 수직평면에서의 운동만을 허용토록 하였다. 실험장치는 축 중심을 기준으로 좌우가 대칭이며, 축의 좌측과 우측에 각각 한 쌍의 전자석, 전자석과 축과의 간격을 측정하기 위한 변위센서(AEC-5505), 전자석에 전류를 공급하는 전력 증폭기, 전자석의 베이스 운동을 제공하는 가진기(B&K, 4808)가 설치되었다. 제어는 DSP(digital signal processor, TI-DS1104)보드를 장착한 컴퓨터에 의해 이루어진다.

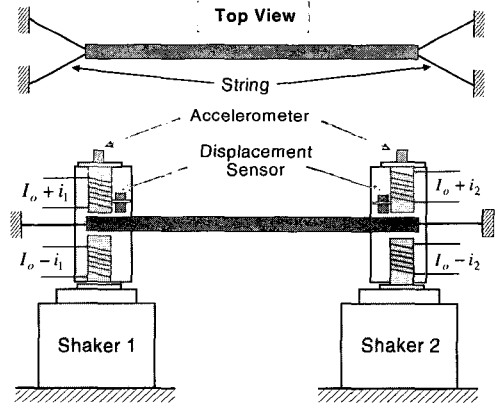


Fig. 4 Schematic diagram of magnetic bearing system

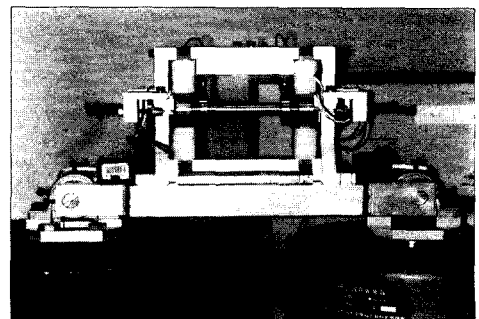


Fig. 5 Photograph of experimental set-up

실험장치의 파라미터는 Table 1과 같으며, 측정 및 실험을 통해 구했다.<sup>(7)</sup> 위치강성은 축을 구속한 강선의 강성이 포함되었다. AMB-1과 AMB-2의 위치강성 및 전류강성의 차이는 각 AMB의 공칭공극의 차이와 강선의 강성 차이에서 기인된다.

Table 1의 계수를 이용하여 슬라이딩모드 제어를 설계하였다. 식 (13)과 (A-16)의 행렬  $S$ 는 병진운동 응답  $y(t)$ 를 위한 감쇠비와 고유진동수는 각각  $\zeta_1 = 0.71$ ,  $\omega_1 = 70\text{Hz}$ , 원추운동 응답  $\Delta y(t)$ 에서는  $\zeta_2 = 0.71$ ,  $\omega_2 = 130\text{Hz}$ 가 되도록 선정하였다. 행렬  $\Phi$ 는  $\phi_1 = 100$ ,  $\phi_2 = 400$ 로 선정하였다. 따라서 식 (A-18)에서 선형제어에 의한 병진운동의 대역폭은 15.9 Hz, 원추운동의 대역폭은 60.6 Hz로 원추운동의 대역폭이 병진운동의 대역폭 보다 높다. 외란관측기에서 행렬  $G$ 는 대각행렬로 대각 요소를  $[700, 700]$ 으로 선정하였으며, 이 값은 관측기 대역폭 111 Hz에 해당한다. 제어 및 외란관측기에서 샘플링 주파수는 하드웨어의 성능을 고려하여 8 kHz로 결정하였다.

베이스가 정적 상태에 있을 때 식 (14)의 제어를 적용한 결과 안정화 되었으며, 축의 자중에 의한 영향은 제어기에 포함된 적분기에 의해 제거됨을 확인하였다.

제안된 제어기의 성능 확인을 위해 베이스를 30 Hz 신호로 가진하였다. Fig. 6은 이 때의 가속도로 수평

축은 AME-1 위치, 수직축은 AMB-2의 위치에서 측정된 가속도이다. 궤적이 거의 원형에 가까우므로, 두 가속도의 크기는 거의 비슷하고 위상은 서로 90° 정도의 위상차를 갖는다. 이는 축의 병진운동을 일으키는 외란과 원추운동을 일으키는 외란의 크기는 서로 비슷한 수준임을 나타낸다.

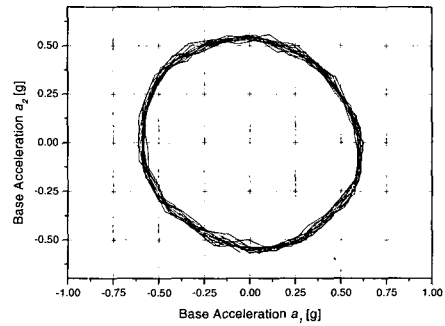


Fig. 6 Measured base accelerations

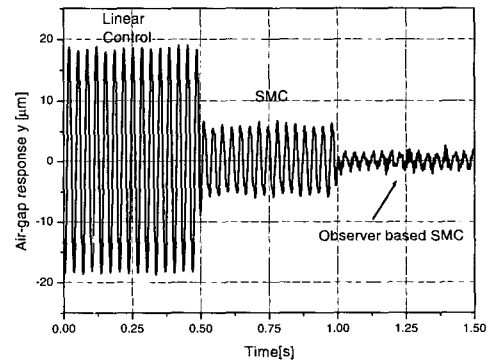


Fig. 7 Translational air-gap responses under 30 Hz harmonic base motion

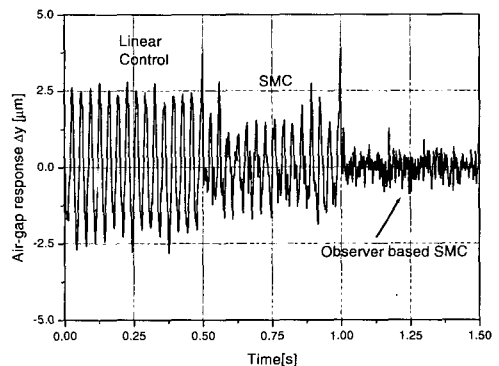


Fig. 8 Rotational air-gap responses under 30 Hz harmonic base motion

Table 1 System parameters

Parameter	Symbol	Value
Mass	$m$	0.2340 [kg]
Inertia	$J$	$320 \times 10^{-6}$ [ $\text{kgm}^2$ ]
Length	$L$	101 [mm]
Current stiffness	$K_{i1}$	6.10 [N/A]
	$K_{i2}$	7.94 [N/A]
Position stiffness	$K_{d1}$	9691 [N/m]
	$K_{d2}$	7229 [N/m]
Amp. gain	$K_a$	0.5 [A/V]
Gap sensor gain	$K_s$	5mV/ $\mu\text{m}$

Fig. 6의 베이스 운동 하에서 식 (14)의 제어기를 적용한 결과는 Fig. 7, Fig. 8과 같다. Fig. 7은 축의 병진운동으로 세 가지 제어기를 적용한 경우 응답을 보인다. 앞서서부터 식 (14)의 제어기에서 선형제어 부만 적용한 경우, SMC 제어를 적용한 경우, 그리고 외란관측 기반 SMC제어를 적용한 경우 응답  $y(t)$  이다. 선형제어 보다는 SMC, SMC 보다는 외란관측 기반 SMC가 베이스 외란응답을 감소시키는데 효과적임을 알 수 있다. 각각의 경우 공극의 표준편차는  $\sigma = 13.09\mu\text{m}$ ,  $4.02\mu\text{m}$ ,  $0.95\mu\text{m}$ 로 나타났다. 축의 원추운동 응답  $\Delta y(t)$ 는 Fig. 8과 같으며, Fig. 7에서와 같이 제어기에 따른 응답의 감소 경향은 동일하게 나타났다. 각 제어기에서 원추운동의 표준편차는  $\sigma = 1.55\mu\text{m}$ ,  $0.89\mu\text{m}$ ,  $0.25\mu\text{m}$ 로 나타났다. Fig. 7과 Fig. 8의 선형제어응답을 비교하면 병진운동에 비해 원추운동의 크기가 훨씬 작은 것을 알 수 있는데, 이는 행렬  $S$ 와  $\Phi$ 가 원추운동에 대한 폐회로의 대역폭이 병진운동에 비해 더 높도록 설정되었기 때문이다. 제어기의 부호함수는 식 (17)의 근사식을 적용하였으며,  $\epsilon$ 은 실험을 통해 체터링이 발생하지 않으면서 공극이 최소가 되는 작은 값을 취하였다.

Fig. 9는 Fig. 7과 Fig. 8에서 적용된 관측기의 응답 특성으로, AMB-1의 위치에서 측정된 가속도와 외란관측기로 추정된 총체적 외란, 그리고 두 신호의 차이를 보인다. 제어 시 Fig. 7과 8에서와 같이 공극이 작으므로, 식 (12)의 총체적 외란 중 비선형성이나 불확실성 등에 비해 베이스 외란이 차지하는 비중

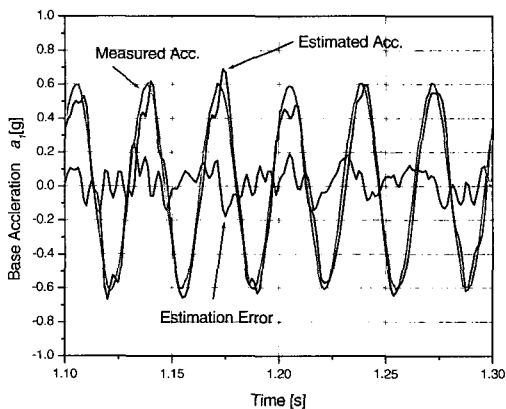


Fig. 9 Measured acceleration, estimated disturbance, and estimation error under 30Hz harmonic base motion

이 매우 높다. 따라서 총체적 외란을 베이스 가속도 외란으로 간주하여 외란 추정 오차를 측정 가속도와 추정 외란의 차로 보았다. 추정오차의 표준편차는 측정 외란의 표준편차의 22%로 나타났다.

Fig. 10 (a)는 Fig. 7과 Fig. 8의 선형제어시 응답  $y_1(t)$ 와  $y_2(t)$ 를  $x-y$  좌표로 나타낸 것으로 궤적이 거의  $45^\circ$  기울기를 갖고 있으므로, 원추운동은 작고 주로 병진운동이 일어나고 있음을 확인할 수 있다. Fig. 10 (b)와 (c)는 각각 SMC 제어, 외란관측기 기반 SMC 제어를 적용한 경우를 보인다. 결론적으로 원추운동에 대한 제어 가중치 효과에 의해 선형제어시 원추운동은 병진운동에 비해 작으며, 병진운동과 원추 운동 모두 제어에 비선형항, 외란 관측항을 추가함에 따라 감소됨을 알 수 있다.

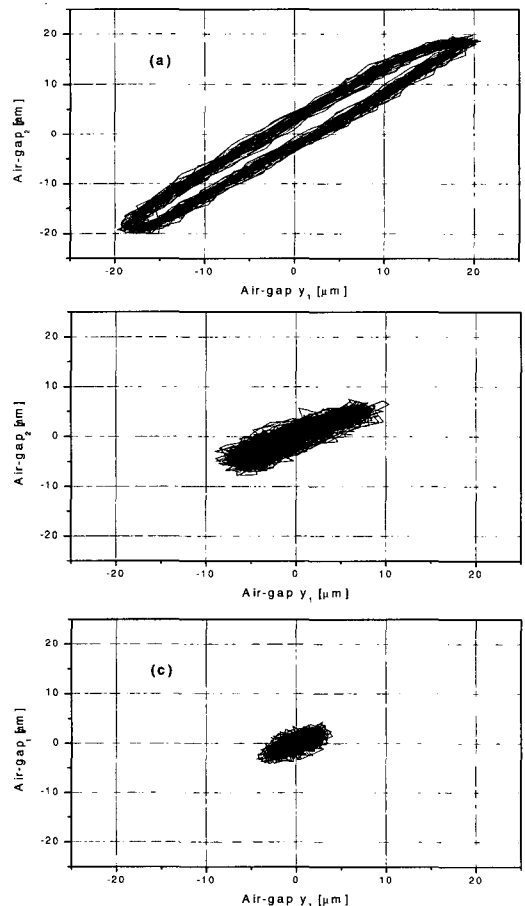


Fig. 10  $y_1 - y_2$  trajectories by (a) linear control, (b) SMC, and (c) observer based SMC under 30 Hz harmonic base motion



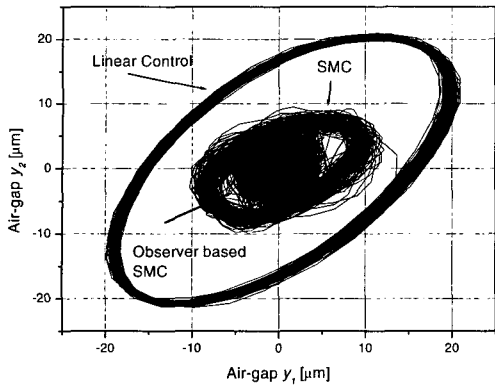


Fig. 11  $y_1 - y_2$  trajectories by three controls under 30hz harmonic base motion

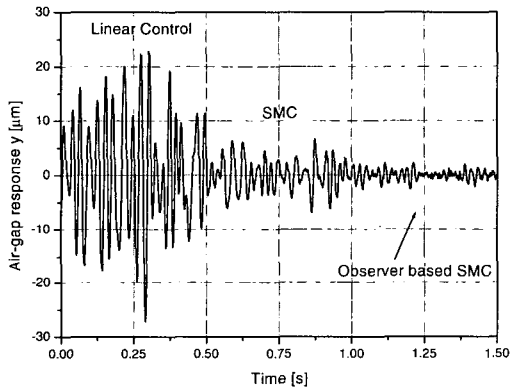


Fig. 12 Translational air-gap responses under random base motion

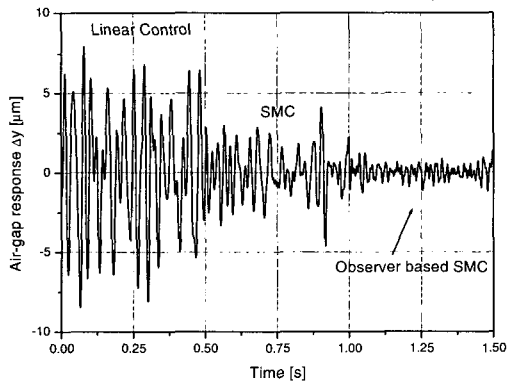


Fig. 13 Rotational air-gap responses under random base motion

행렬  $S$ 와  $\Phi$ 를  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.71$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 70 \text{ Hz}$ ,  $\phi_1 = \phi_2 = 100$ 으로 선정하여 원추운동에 대한 폐회로 대역폭을 낮춘 경우 응답은 Fig. 11과 같다. Fig. 10과 비교 원추운동이 커졌음을 알 수 있으며, 비선형항, 외란 관측항을 추가함에 감소 폭은 증가함을 알 수 있다.

이상과 같은 실험을 베이스 가진 주파수를 변경하면서 수행하였으며, 30 Hz 가진 시와 유사한 결과를 얻을 수 있었다.

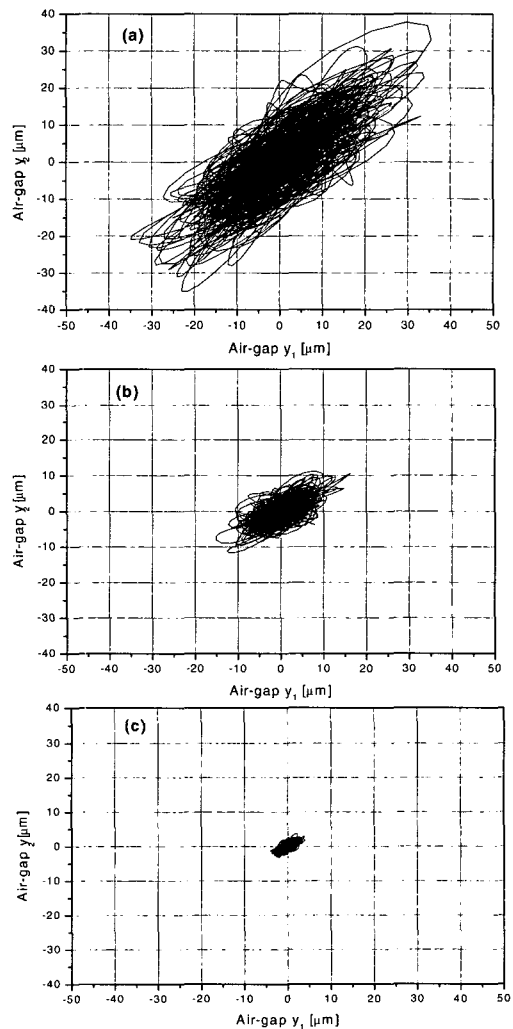


Fig. 14  $y_1 - y_2$  trajectories by (a) linear control, (b) SMC, and (c) observer based SMC under random base motion

조준경이 차량에 장착되어 사용되는 경우 장착되는 부위의 운동은 50 Hz 주파수 대역을 갖는 랜덤신호로 규정할 수 있다. 이 상황을 모사하기 위해 베이스를 8~50 Hz의 대역폭을 갖는 랜덤신호로 가진하였다. 가진기의 저주파 성능을 고려하여 8 Hz 미만의 주파수는 제외하였다. 두 가진기에는 서로 독립적인 랜덤신호를 제공하였다.

이 가진 상황에서 선형제어, SMC, 외란 관측기 기반 SMC를 적용한 결과 응답은 Fig. 12, 13과 같다. Fig. 12는 병진운동으로 앞의 30 Hz 가진 상태에서의 결과와 같이 선형제어보다는 SMC가, SMC 보다는 외란 관측기 기반 SMC의 성능이 우수함을 보인다. 각각의 표준편차는 10.09  $\mu\text{m}$ , 2.85  $\mu\text{m}$ , 0.95  $\mu\text{m}$ 로 나타났다. Fig. 13은 원추운동의 경우로 각 제어기 적용 시 표준편차는 3.72  $\mu\text{m}$ , 1.46  $\mu\text{m}$ , 0.45  $\mu\text{m}$ 로 나타났다.

Fig. 14는 Fig. 12와 13의 응답을  $x-y$  좌표로 나타낸 것으로, 병진운동과 원추운동의 크기를 쉽게 비교할 수 있다.

Fig. 15는 Fig. 12의 병진운동 응답의 스펙트럼이다. 가진주파수대역 8~50 Hz에서 응답이 나타남을 확인할 수 있으며, 가진주파수 대역 전체에서 스펙트럼의 크기는 선형제어, SMC, 관측기 기반 SMC 순으로 나타나, 앞의 결과와 일치함을 알 수 있다. 원추운동 응답의 스펙트럼도 유사한 결과를 보였으며, 단, 스펙트럼 크기의 차이가 병진운동에 비해 작게 나타났다.

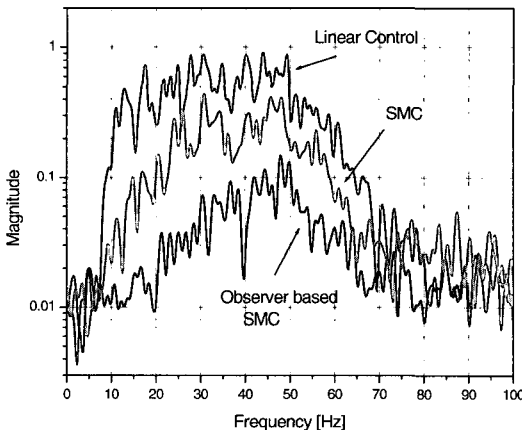


Fig. 15 Spectra of translational air-gap response under random disturbance

#### 4. 결론

조준경 고각축을 능동자기베어링으로 지지하는 경우 안정화 저해 요인인 마찰 문제는 해결할 수 있지만 베어링 설치면의 가속도에 의한 축의 진동 문제는 수신 영상의 떨림을 야기한다. 이 연구에서는 베이스 가속도에서 야기되는 축의 진동을 감소시키기 위해 외란 관측 기반 슬라이딩모드 제어를 제안하였다. 이 제어방법은 관측기 동력학과 슬라이딩모드 동력학을 분리시켜 독립적으로 동적 특성을 설계할 수 있는 장점을 제공한다. 또한 수신 영상의 떨림을 최소화할 수 있도록 슬라이딩 평면 설계 방법을 제시하였다. 제안된 제어기는 2-자유도 능동자기베어링계에 적용하였으며, 실험 결과 제안된 제어기가 베이스 외란에 의한 축의 진동을 감소 및 수신 영상의 떨림을 감소 시키는데 효과적임이 입증되었다.

#### 참 고 문 헌

- (1) 강윤식, 1994, 조준경 안정화 장치의 마찰특성규명 및 성능향상에의 응용 가능성에 대한 연구, 한국과학기술원 기계공학과 박사학위 논문.
- (2) Armstrong, B., Dupont, P. and C. Canudas De Wit, 1994, "A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for Control of Machines with Friction", Automatica, Vol. 30, No. 7, pp. 1083~1138.
- (3) Cole, M. O. T., Keogh, P. S. and Burrows, C. R., 1998, "Control and Non-linear Compensation of a Rotor/Magnetic Bearing System Subject to base Motion", 6th Int. Symposium on Magnetic Bearings, Cambridge, MA, pp. 618~627.
- (4) Kasada, M. E., Clements, J., Wicks, A. L., Hall, C. D. and Kirk, R. G., 2000, "Effect of Sinusoidal Base Motion on a Magnetic Bearing", Proc. IEEE International Conference on Control Applications, pp. 144~149.
- (5) Suzuki, Y., 1998, "Acceleration Feedforward Control for Active Magnetic Bearing Excited by Ground Motion", IEEE Proc. Control Theory Appl., Vol. 145, No. 2, pp. 113~118.

(6) 강민식 등, 2004, "MFXLMS 알고리즘을 이용한 전자기베어링계의 외란보상 제어기-이론", 한국정밀공학회, 제 21 권, 제 2 호, pp. 74~82.

(7) 강민식 등, 2004, "MFXLMS 알고리즘을 이용한 전자기베어링계의 외란보상 제어기-실험", 한국정밀공학회, 제 21 권, 제 2 호, pp. 83~91.

(8) 강민식, 2004, "능동자기베어링계의 슬라이딩 모드제어", 한국소음진동공학회논문집, 제 14 권, 제 5 호, pp. 439~448.

(9) Utkin, V. I. Sliding Modes in Control Optimization, 1992, New York : Springer-Verlag.

(10) Young, D. K., Utkin, V. I. and Ozguner, 1999, "A control engineer's guide to sliding mode control", IEEE Transaction on Control Technology, Vol. 7, No. 3.

(11) Yeh, T. J. and Chung, Y. J., 2000, "Sliding Control of Megnetic Bearing Systems," Proc. of the American Control Conference, pp. 1622~1626.

(12) Shan, X. and Menq, C. H., 2002, "Robust Disturbance Rejection for Improved Dynamic Stiffness of Magnetic Suspension Stage", IEEE/ASME Trans. on Mechatronics, Vol. 7, No. 3, pp. 289~295.

(13) Hassan, I. M. M. and Mohamed, A. M., 2001, "Variable Structure Control of a Magnetic Levitation System", Proc. of the American Control Conference, pp. 3725~3730.

(14) Lee, J. H., Allaire, P. E., Tao, G. and Zhang, X., 2001, "Integral Sliding-mode Control of a Magnetically Suspended Balance Beam: Analysis, Simulation, and Experiment", IEEE/ASME Trans. on Mechatronics, Vol. 6, No. 3, pp. 338~346.

(15) Utkin, V. I., Guldner, J. and Shi, J., 1999, Sliding Mode Control in Electromechanical Systems, New-York : Taylor & Francis.

(16) Shan, X. and Menq, C. H., 2002, "Robust Disturbance Rejection for Improved Dynamic Stiffness of a Magnetic Suspension Stage," IEEE/ASME Trans. on Mechatronics, Vol. 7, No. 3, pp. 289~295.

(17) Kawamura, A., Itoh, H. and Sakamoto, K., 1994, "Chattering Reduction of Disturbance Obser-

ver Based Sliding Mode Control," IEEE Trans. Ind. Application, Vol. 30, pp. 456~461.

(18) Utkin, V. I., 1992, Sliding Modes in Control and Optimization, Springer-Verlag.

(19) Rundell, A. E., Drakunov, S. V. and Decarlo, R. A., 1996, "A Sliding Mode Observer and Controller for Stabilization of Rotational Motion of a Vertical Shaft Magnetic Bearing," IEEE Trans. on Control Systems Technology, Vol. N, no. 5, pp. 598~608.

(20) Brown, M. D. J. and Shtessel, Y. B., 2001, "Disturbance Cancellation Techniques for Finite Reaching Time Continuous Sliding Mode Control," Proc. of the American Control Conference, Arlington, VA, pp. 4998~5003.

(21) 강민식, 2004, "자기베어링계에서 외란관측기를 갖는 슬라이딩모드 제어," 대한전기학회논문집, 제 53D 권, 제 6 호, pp. 408~414.

## 부 록

이 부록의 내용은 참고문헌 (20)의 외란 관측기에 설계 방법을 2-자유도 전자기베어링계에 적합토록 수정한 내용에 해당한다.

### A.1 외란관측기 기반 슬라이딩제어

식 (12)의 시스템에 슬라이딩모드 제어를 적용하기 위해 슬라이딩 평면  $\sigma(t)$ 를 다음과 같이 정의하면,

$$\sigma(t) = \begin{Bmatrix} \sigma_1(t) \\ \sigma_2(t) \end{Bmatrix} = Sx(t) \quad (A-1)$$

여기서  $\sigma \in R^{2 \times 1}$ ,  $S \in R^{2 \times 2}$ 이다.

슬라이딩 제어입력  $u(t)$ 는 다음과 같이 두 부분으로 구성된다.

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_n(t) \quad (A-2)$$

여기서  $u_{eq}(t)$ 은 등가제어입력(equivalent control input)으로 슬라이딩 평면의 미분을 영으로 하여 구

한다. 즉,

$$\dot{\sigma}(t) = S\dot{x}(t) = S\{A_o x(t) + B_o u(t)\} = 0 \quad (A-3)$$

따라서 등가제어입력은

$$u_{eq}(t) = -(SB_o)^{-1} SA_o x(t) \quad (A-4)$$

여기서  $SB_o$ 는 비특이(nonsingular) 행렬로 가정한다.

도달제어입력(reaching control input)  $u_n(t)$ 은  $v(t) \neq 0$ 인 경우 계의 상태를 슬라이딩 평면에 도달시키는 입력으로 다음과 같이 불연속제어입력, 슬라이딩 함수 및 외란관측을 포함시킨다.

$$u_n(t) = -(SB_o)^{-1} \Phi \sigma(t) - (SB_o)^{-1} k \operatorname{sgn}[\sigma(t)] - \hat{v}(t) \quad (A-5)$$

여기서  $\Phi \in R^{2 \times 2}$ ,  $\operatorname{sgn}[h(t)]$ 는 함수  $h(t)$ 의 부호를 나타낸다.  $\hat{v}(t)$ 는 총체적 외란의 추정치로 다음의 외란관측기에 의해 추정한다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{v}}(t) = & -G(SB_o)^{-1} \sigma(t) - G(SB_o)^{-1} \Phi \int \sigma(t) dt \\ & - G(SB_o)^{-1} k \int \operatorname{sgn}[\sigma(t)] dt \end{aligned} \quad (A-6)$$

여기서  $G \in R^{2 \times 2}$ 이다.

식 (A-4)와 (A-5)의 합으로 나타나는 제어기를 적용한 경우 슬라이딩 함수의 동력학 식은 다음과 같다.

$$\dot{\sigma}(t) = -\Phi \sigma(t) - k \operatorname{sgn}[\sigma(t)] - SB_o \hat{v}(t) \quad (A-7)$$

식 (A-7)에서  $\hat{v}(t)$ 는 추정오차로  $\tilde{v}(t) = \hat{v}(t) - v(t)$ 이다.

식 (A-6)과 (A-7)에서 외란관측 동력학은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{v}}(t) = & -G(SB_o)^{-1} \sigma(t) - G(SB_o)^{-1} \Phi \sigma(t) \\ & - G(SB_o)^{-1} k \operatorname{sgn}[\sigma(t)] \end{aligned} \quad (A-8)$$

식 (A-7)을 (A-8)에 대입하고 정리하면

$$\dot{\tilde{v}}(t) = -G\tilde{v}(t) + \dot{v}(t) \quad (A-9)$$

따라서 식 (A-7)과 (A-9)를 다음과 같이 정리할

수 있다.

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) \\ \dot{\tilde{v}}(t) \end{cases} = - \begin{bmatrix} \Phi & SB_o \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma(t) \\ \tilde{v}(t) \end{cases} + \begin{cases} -k \operatorname{sgn}[\sigma(t)] \\ \dot{v}(t) \end{cases} \quad (A-10)$$

따라서 슬라이딩모드 동력학과 외란관측오차 동력학은 서로 비연성이므로 독립적으로 설계할 수 있다.

만일 총체적 외란의 도함수의 범위가 한정되어 있고,  $\dot{v}(t) \leq \delta$ ,  $\delta \geq 0$ , 행렬  $\Phi$ 와  $G$ 가 안정하면, 즉  $\lambda(\Phi) > 0$ ,  $\lambda(G) > 0$ , 식 (A-10)의 동력학 방정식은 안정하며, 다음을 만족하는  $k$ 가 존재한다.

$$\|SB_o \tilde{v}(t)\| < k, k \geq 0 \quad (A-11)$$

제어입력의 슬라이딩평면 도달법칙 만족성을 평가하기 위해 다음의 Lyapunov 함수를 정의하면

$$V(t) = \frac{1}{2} \sigma(t)^T \sigma(t) \quad (A-12)$$

식 (A-12)의 도함수는 다음과 같으며,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \sigma(t)^T \dot{\sigma}(t) \\ = & \sigma(t)^T [-\Phi \sigma(t) - k \operatorname{sgn}[\sigma(t)] - SB_o \tilde{v}(t)] \\ < & -\sigma(t)^T \Phi \sigma(t) \end{aligned} \quad (A-13)$$

따라서 행렬  $\Phi$ 가 안정하므로 이 도함수는 음이 되어 도달법칙을 만족한다.

## A.2 슬라이딩 평면의 설계

식 (A-4)와 (A-5)의 합으로 나타나는 제어기를 정리하면

$$\begin{aligned} u(t) = & -(SB_o)^{-1} SA_o x(t) - (SB_o)^{-1} \Phi \sigma(t) \\ & - (SB_o)^{-1} k \operatorname{sgn}[\sigma(t)] - \hat{v}(t) \end{aligned} \quad (A-13)$$

식 (A-13)의 제어기에서 선형제어부를  $u_L$ 이라 하면 다음과 같다.

$$u_L(t) = -(SB_o)^{-1} SA_o x(t) - (SB_o)^{-1} \Phi \sigma(t) \quad (A-14)$$

이를 외란과 모델링 오차를 제외한 선형모델에 적용할 경우 슬라이딩 함수는 다음의 특성을 갖게 된다.

$$\dot{\sigma}(t) = -\Phi\sigma(t) \quad (A-15)$$

따라서 슬라이딩 함수는 행렬  $\Phi$ 의 특이값에 따라 안정성과 수렴성이 결정된다.

본 시스템에서 제어 목적은 축의 진동을 억제하는데 있으므로 다음과 같이 슬라이딩 평면을 규정하는 행렬  $S$ 와 행렬  $\Phi$ 를 다음과 같이 설정할 수 있으며,

$$S = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\lambda_{12} & 0 & (\lambda_{11} + \lambda_{12}) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{21}\lambda_{22} & 0 & (\lambda_{21} + \lambda_{22}) & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \quad (A-16)$$

식 (9)와 (14)를 식 (28)에 대입하고 그 결과를 구체적으로 정리하면 다음 관계를 얻는다.

$$\begin{cases} \lambda_{11}\lambda_{12}\dot{x}_1 + (\lambda_{11} + \lambda_{12})\dot{x}_3 + \dot{x}_5 = \\ \quad -\phi_1 \{ \lambda_{11}\lambda_{12}x_1 + (\lambda_{11} + \lambda_{12})x_3 + x_5 \} \\ \lambda_{21}\lambda_{22}\dot{x}_2 + (\lambda_{21} + \lambda_{22})\dot{x}_4 + \dot{x}_6 = \\ \quad -\phi_2 \{ \lambda_{21}\lambda_{22}x_2 + (\lambda_{21} + \lambda_{22})x_4 + x_6 \} \end{cases} \quad (A-17)$$

식 (A-17)을 상태변수의 정의를 적용하여 재정리하면 폐회로의 동력학은 다음으로 주어진다.

$$\begin{cases} (s + \phi_1)(s + \lambda_{11})(s + \lambda_{12}) \frac{Y(s)}{s} = 0 \\ (s + \phi_2)(s + \lambda_{21})(s + \lambda_{22}) \frac{\Delta Y(s)}{s} = 0 \end{cases} \quad (A-18)$$

여기서  $Y(s)$ 와  $\Delta Y(s)$ 는 각각  $y(t)$ 와  $\Delta y(t)$ 의 라플라스 변환이다. 식 (A-18)에서와 같이 슬라이딩 평면을 규정하는 행렬  $S$ 와  $\Phi$ 를 식 (A-16)과 같이 선정할 경우  $y(t)$ 와  $\Delta y(t)$ 의 폐회로 동력학은 서로 비연성화 시킬 수 있다. 구체적으로  $s = -\lambda_{11}$ 과  $s = -\lambda_{12}$ 는  $y(t)$ 의 슬라이딩 동특성을 규정하는 극점이며,  $s = -\lambda_{21}$ 과  $s = -\lambda_{22}$ 는  $\Delta y(t)$ 의 슬라이딩 동특성을 규정하는 극점에 해당된다. 또한 극점  $s = -\phi_1$ 과  $s = -\phi_2$ 는 각각  $y(t)$ 와  $\Delta y(t)$ 에 관해 정의된 슬라이딩 평면 도달 특성을 규정한다. 좌변의 적분기에 의해 임의의 상수항으로 나타나는 외란이나 모델링 오차에 의한 정상상태 오차가 제거됨을 알 수 있다.