

## 공기베어링으로 지지된 캐리지 구조물의 동특성 해석

Dynamic Characteristics Analysis of the Carriage Structure Supported by Air Bearing

정 순 철\* · 김 덕 수\*\* · 유 충 준\*\*\* · 장 승 환\*\*\*\* · 이 재 응†

Soon Chul Jung, Dug Soo Kim, Chung Jun You, Seung Hwan Chang and Jae Eung Lee

(2004년 2월 5일 접수 : 2004년 10월 15일 심사완료)

**Key Words :** Air Bearing(공기베어링), Carriage Structure(캐리지 구조물), Darcy's Law(Darcy의 법칙), Modal Analysis(모드 해석)

### ABSTRACT

In this paper, the dynamic characteristic analysis of carriage structure supported by air bearings were performed. Toward this end, the characteristics of air bearing were numerically analyzed to estimate the stiffness of the air bearing and the clearance between air bearing and guide surface. The modal analysis of the carriage structure was performed by using finite element method, and the experimental modal analysis was also performed to validate the finite element model, where rigid body modes were compared to validate the stiffness of the air bearings. From the results, the air spring stiffness can be estimated within the range of acceptable accuracy under any pressure and clearance condition.

### 1. 서 론

각종산업의 기계는 대량 생산과 성능향상 등의 목적으로 위해서 대용량화, 소형경량화(미세화), 고속화를 위한 개발이 추진되고 있다. 특히 반도체 제조장치에 있어서는 반도체의 발전과 함께 개발 속도도 요구되고 있으며, 저발진(clean), 긴 수명에 대한 성능이 강하게 요구됨에 따라 에어베어링의 도입이 점차 늘고 있는 추세이다.

공기베어링은 접촉이 없고, 점도가 낮으며, 높은 강성과 감쇠를 갖는 등 많은 장점을 가진다. 따라서 마

찰과 마모가 없으며, 높은 속도의 구동이 가능하며, 조용하고 부드럽게 구동한다. 또한 정밀도가 높고, 오일을 사용하지 않기 때문에 오염이 없다. 초창기의 공기베어링은 주로 저널베어링으로 많이 사용되었으며, 연구는 주로 저널베어링에 집중되었다. 대표적 예로 Robinson과 Sterry<sup>(1)</sup>의 실험에 의한 접근, Constantinescu<sup>(2)</sup>의 이론적 해석은 Sneed<sup>(3, 4)</sup>의 해석에 밀바탕이 되었다.

공기베어링은 주입공기의 압력과 간극에 따라서 그 강성이 정해진다. 그런데 현재 공기베어링을 장착한 캐리지 구조물을 제작할 경우 다음과 같은 문제점을 가지고 있다. 첫 번째 문제는 정밀제어나 조립과정상의 어려움 등으로 인하여 완성된 시스템에서 공기 베어링 간극이 실제 얼마인지를 알 수가 없다는 것이다. 두 번째는 베어링 공급사에서는 공기의 압력이 특정한 경우(0.41 MPa)에만 간극에 따른 강성 값들을 제공해 주고 있다는 것이다. 그런데 현장에서 사용하는 공기의 압력은 대부분 강성을 알 수 있는 특

\* 책임저자 : 정희원, 중앙대학교 기계공학부  
E-mail : jelee@cau.ac.kr

Tel : 02) 820-5284, Fax : 02) 824-8130

\* 정희원, 중앙대학교 기계공학부

\*\* 중앙대학교 기계공학부

\*\*\* 경기대학교 기계시스템 디자인공학부

\*\*\*\* 중앙대학교 기계공학부

정 압력이 아닌 다른 압력의 공기를 제공하면서 사용하고 있으므로 따라서 사용하는 압력 변화에 따른 강성을 알 필요가 있다.

이 연구에서는 이 문제를 극복하기 위하여 먼저 일반적인 공급압력에서 강성을 계산할 수 있는 프로그램을 먼저 개발하였으며 또한 현재 조립된 구조물의 간극이 얼마나지를 동특성 해석을 통해서 베어링의 강성을 구하고 이로부터 개발된 프로그램을 이용하여 간극의 크기를 구하였다.

이 결과를 이용한 시스템 모델은 실제 제작된 시스템의 동특성을 가진다고 볼 수 있으며 따라서 이 모델을 이용하면 다른 압력의 공기가 공급되는 경우에서도 캐리지 구조물의 동특성을 예측할 수 있으리라 사료된다.

## 2. 공기베어링에 대한 이론적 해석

### 2.1 공기베어링 형상 및 사양

해석한 공기베어링의 형상은 Fig. 1과 같고, 지름이 다른 2가지 종류(40 mm, 50 mm)의 공기베어링이 캐리지 구조물에 부착되어 있으며, z방향의 투과성  $k_z$ 는  $1.85 \times 10^{-15} \text{ m}^2$ 이다.

### 2.2 지배방정식

다공질 재질과 윤활막 내에서의 유동 해석을 위하여 몇 가지의 가정을 설정하였다.

(1) 다공질 재질 내에서의 유동은 점성이 있고, Darcy's law<sup>(5)</sup>를 따른다. Darcy's law란 다공질 재질을 통과한 유량은 압력의 변화에 비례하며 재질내 각 점에서의 유속은 다음과 같은 식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= -\frac{k_r}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \\ v &= -\frac{k_\theta}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ w &= -\frac{k_z}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned} \quad (1)$$

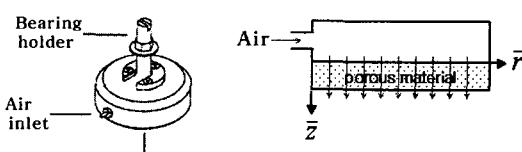


Fig. 1 The shape of air bearing

여기에서  $u, v, w$ 는 각 방향으로의 유속을 의미하고,  $k_r, k_\theta, k_z$ 는 각 방향으로의 투과성(permeability),  $\mu$ 는 점성,  $P$ 는 압력,  $r, \theta, z$ 는 좌표계의 방향을 뜻한다.

(2) 유동은 등온이며, 이상기체방정식을 만족하는 압축성 기체이다.

$$P = \rho RT \quad (2)$$

(3) 다공질 재질 내에서의 유동은 질량 보존 법칙<sup>(6)</sup>의 지배를 받는다. 따라서 다음과 같은 연속방정식을 만족한다.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad (3)$$

위 식에 식 (1)과 식 (2)을 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{rk_r P}{\mu RT} \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{k_\theta P}{\mu RT} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k_z P}{\mu RT} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$P \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P^2}{\partial x}$ 이며, 공기베어링은 축대칭이기 때문에  $\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$ 이므로 이를 위 식에 대입하면 다음과 같은 지배방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{k_r}{k_z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial P^2}{\partial r}) + \frac{\partial^2 P^2}{\partial z^2} = 0 \quad (5)$$

### 2.3 유막 경계조건

유막 경계조건( $z = H$ )은 수정된 Reynolds식<sup>(7)</sup>으로 표현될 수 있다. 여기서  $\theta$ 미분항은 축대칭이므로 무시하고, 정상상태라 하면 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\rho r h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial r} = -(\rho w)_{z=H} \quad (6)$$

여기에서  $h$ 는 유막 두께이고,  $H$ 는 다공질 재질의 두께이다. 그리고 우변은 다공질 재질과 공극이 맞닿는 부분에서의 유량 흐름을 표현한다. 위의 식에 식 (1)과 식 (2)를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial P^2}{\partial r} = \frac{12k_z}{c^3} \left( \frac{\partial P^2}{\partial z} \right)_{z=H} \quad (7)$$

여기에서  $c$ 는 간극이다. 지배방정식과 유막경계조건을 무차원화하면 다음과 같다. 먼저 지배방정식 식(5)를 무차원화하면,

$$S^2 K \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial Q}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 0 \quad (8)$$

이며, 유막경계조건 식(7)을 무차원화하면,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial Q}{\partial r} \right) = A \left( \frac{\partial Q}{\partial z} \right)_{z=1} \quad (9)$$

이다. 여기에서

$$S = \frac{H}{R_0}, \quad \bar{r} = \frac{r}{R_0}, \quad \bar{z} = \frac{z}{H}$$

$$Q = \overline{P^2} = \left( \frac{P}{P_a} \right)^2, \quad K = \frac{k_r}{k_z}, \quad A = \frac{12R_0^2 k_z}{H c^3} \quad (10)$$

이고,  $S$ 는 연속비,  $K$ 는 투과성비,  $A$ 는 베어링 수이다.

## 2.4 경계 조건

이 논문에서 다루는 경계조건은 다음과 같다.

(1) 유막 경계조건( $\bar{z}=1$ )에서는 식(9)와 같다.

(2)  $0 \leq \bar{r} \leq 1$  and  $\bar{z} = 0 \rightarrow \overline{P^2} = \overline{P_s^2}$

(3)  $\bar{r} = 0$  and  $0 < \bar{z} \leq 1 \rightarrow \frac{\partial \overline{P^2}}{\partial r} = 0$

(4)  $\bar{r} = 1$  and  $0 < \bar{z} \leq 1 \rightarrow \frac{\partial \overline{P^2}}{\partial r} = 0$

경계조건 2에서  $\overline{P_s^2}$ 는 무차원화 된 공기 주입 압력이다. 첫 번째 경계조건은 식(9)를 ADI법으로 풀어주면 된다. 그리고 세 번째와 네 번째 경계조건은 미분으로 표현되는데 이는  $Q_{1,i} = Q_{2,i}$ 로 간단히 표현될 수 있으며, 두 번째 경계조건은 해당 격자점에 해당하는 값들을 대입하여 주면 된다.

## 2.5 수치 해석

### (1) 하중 능력( $W$ )과 강성( $K$ )

공기 베어링의 하중 능력( $W$ )은 베어링면에 수직으로 작용하는 유막 경계에서의 압력에 의한 힘의 합으로 정의될 수 있고, 이는 식(12)로 표현이 가능하다.

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} (P - P_a) \Big|_{z=1} r dr d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{R_0} (P - P_a) r dr \quad (12)$$

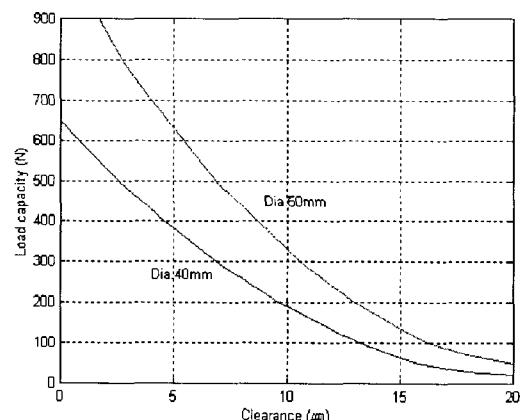
즉, 하중 능력을 구하려면 식(12)에서  $P$ 를 알아야 하고,  $P$ 는 지배방정식 식(8)을 푼 결과인  $Q$ 를 이용하여 구할 수 있다.

베어링의 강성은 간극에 따른 하중의 변화율로 정의되며, 식(13)으로 표현이 가능하다.

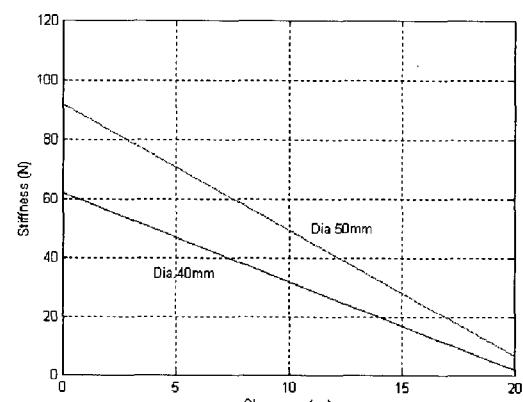
$$K = -\frac{dW}{dc} \quad (13)$$

**Table 1** Stiffness comparison between company value and theory value

Bearing diameter (mm)	Stiffness from manufacturer (MN/m)	Stiffness from analysis (MN/m)	Error
40	28.4	30.0	5.6 %
50	58.6	56.3	3.9 %



**Fig. 2** Load capacity versus clearance



**Fig. 3** Stiffness versus clearance

공기베어링 제작사에서 제공한 강성은 공기 주입 압력 0.41 MPa, 간극 5  $\mu\text{m}$ 에서의 값으로 수치해석으로 구한 값과 비교하면 Table 1과 같다.

이 결과에서 공기베어링 제작사에서 제공한 강성과 이론적으로 해석한 강성은 약 5 % 정도의 오차를 보이고 있어 어느 정도 타당하다고 볼 수 있다.

(2) 실제 공기 주입 압력에서의 하중 능력과 강성  
실제 실험에서 사용한 공기 주입 압력은 0.54 MPa  
이므로, 이 때의 간극과 하중 능력의 관계를 살펴보면  
Fig. 2와 같고, 간극과 강성의 관계는 Fig. 3과 같다.

일반적으로 공기베어링의 간극은 15  $\mu\text{m}$ 를 많이 사용하며, 실제 공기 주입 압력인 0.54 MPa에서의 강성을 보면 베어링 지름 40 mm일 때 17.2 MN/m이고,  
지름 50 mm일 때 27.2 MN/m임을 알 수 있다.

### 3. 캐리지 구조물의 모드(mode) 해석

#### 3.1 캐리지 구조물의 ANSYS 유한요소 모델링

이 논문에서는 캐리지 구조물과 다공질(porous) 재질로 된 공기베어링을 ANSYS를 이용하여 모델링

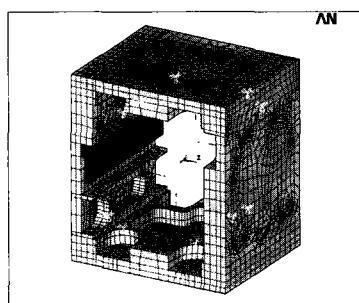


Fig. 4 Finite element modeling in concentrated spring

Table 2 Natural frequency of ANSYS model

Mode	Natural frequency(Hz)	Mode	Natural frequency(Hz)
1	0.0000287	6	311.62
2	128.23	7	613.99
3	170.30	8	619.96
4	208.12	9	704.84
5	217.97		

하였다. 공기베어링은 캐리지의 앞과 뒤에 지름이 40 mm인 것이 3개씩, 상하에 지름 50 mm인 것이 4개 쌍 부착되어 있으며, 캐리지 구조물의 재질은 알루미늄이다. 공기베어링 강성은 실제 공기 주입 압력인 0.54 MPa, 간극 15  $\mu\text{m}$ 에서 이론적으로 계산한 값인 베어링 지름 40 mm일 때 17.2 MN/m, 지름 50 mm 일 때 27.2 MN/m을 적용하였다. 캐리지 구조물의 모드 해석을 위하여 사용된 ANSYS 유한요소 모델은 Fig. 4와 같다.

#### 3.2 ANSYS를 이용한 모드 해석 결과

Fig. 4의 모델을 이용하여 캐리지 구조물의 모드 해석을 수행한 결과는 Table 2와 같다. 여기서 1~6 차 모드는 강체 모드를, 7~9차 모드는 유연 모드를 나타낸다.

Table 2의 모드 해석 결과의 신뢰성을 검증하기 위하여 모드 실험을 수행하였다.

### 4. 캐리지 구조물의 모드 실험

#### 4.1 모드 실험 방법

실험 대상인 캐리지 구조물에 측정점을 표시한 후 이를 격자구조로 모델링한 형상은 Fig. 5와 같다.

이 때 가속도계 센서는 각 노드(node)에서 X, Y 방향 모두 부착할 수는 없으므로 모드 해석 전용 프로그램인 STAR System의 기능을 이용하였다. 그리고 해석을 간단히 하기 위해 해당 노드에서의 운동과 참조할 노드에서의 운동은 서로 선형적으로 같다고 가정하였다.

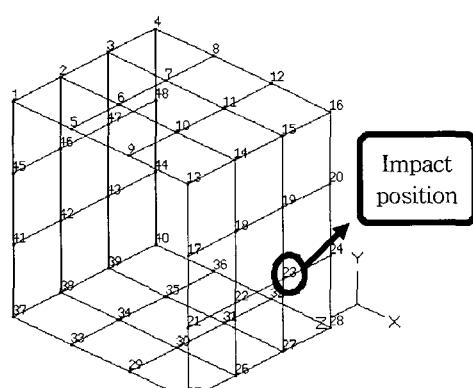


Fig. 5 STAR system modeling

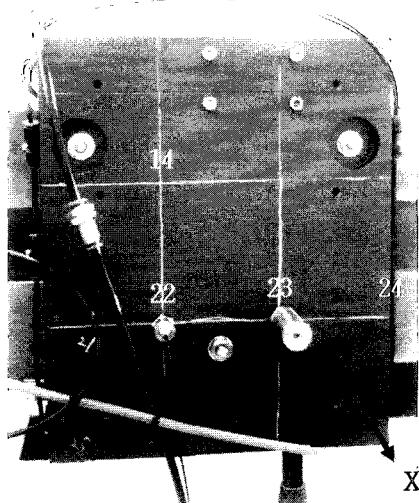


Fig. 6 Modal testing of carriage structure  
node 22 : sensor, node 23 : Impact hammer

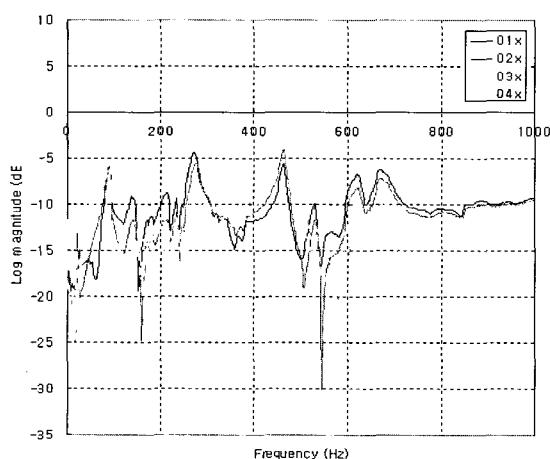


Fig. 7 FRF of x-axis node 14

Table 3 Natural frequency of carriage structure

Mode	Natural frequency (Hz)	Damping coefficient ( $\zeta$ )	Mode	Natural frequency (Hz)	Damping coefficient ( $\zeta$ )
1	89.79	0.0348	6	530.84	0.0084
2	143.57	0.0321	7	613.90	0.0121
3	226.38	0.0094	8	673.42	0.0222
4	290.72	0.0110	9	1204	0.0214
5	462.42	0.0121	10	1356	0.0107

#### 4.2 모드 실험 결과

Fig. 7은 14번 노드의 주파수 응답이다.

Fig. 7의 데이터를 이용하여 캐리지 구조물의 고유진 동수를 구해보면 Table 3과 같다. 여기서 1~4차 모드는 강체 모드, 5~11차 모드는 유연 모드를 나타낸다.

Table 3의 실험결과와 ANSYS를 이용한 모드 해석 결과의 모드 형상 일치 여부를 확인하기 위하여 MAC(modal assurance criterions) value를 계산하면 다음과 같다.

#### 4.3 MAC value 계산

MAC value란 해석에서의 모드 형상과 실험에서의 모드 형상이 잘 일치하는지를 비교하는 것으로 값을 구하는 식은 아래와 같다.<sup>(8)</sup>

$$MAC = \frac{\{\phi_a\}^T \{\phi_t\}}{\sqrt{\{\phi_a\}^T \{\phi_a\} \times \{\phi_t\}^T \{\phi_t\}}} \quad (14)$$

이 값이 1에 가까우면 해석과 실험의 모드형상이 잘 일치함을 의미하고, 0에 가까우면 잘 맞지 않음을 의미한다. 강체 모드의 MAC value를 계산하여 보면 Fig. 8과 같다.

Table 4의 결과에서 실험 1차 모드와 ANSYS 해석 3차 모드의 MAC value가 높게 나타났다. 즉, 실

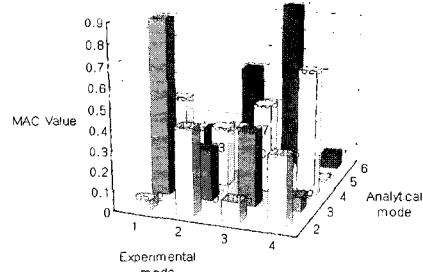


Fig. 8 MAC value of rigid mode

Table 4 MAC value of rigid mode

Mode		Analysis				
		1st	2nd	3rd	4th	5th
Experiment	1st	0.0512	0.8752	0.4322	0.0074	0.1473
	2nd	0.4282	0.2563	0.3024	0.2440	0.5051
	3rd	0.1005	0.3690	0.4381	0.0467	0.8510
	4th	0.3486	0.0722	0.6283	0.0088	0.0816

험에서의 1차 모드 형상과 ANSYS 해석 모델에서의 3차 모드 형상이 잘 일치함을 확인할 수 있다. 실험 1차 모드에서의 모드 형상과 ANSYS 해석 모델 3차 모드에서의 모드 형상은 Fig. 9~10과 같다.

Fig. 9~10 그림 모두 z축을 중심축으로 하여 좌우로 흔들리는 거동을 보인다. 이 때의 고유진동수를 살펴보면 실험에서의 1차 고유진동수가 89.79 Hz이고, ANSYS 해석 모델의 3차 고유진동수가 170.30 Hz로 실험 결과와 해석 결과의 고유진동수와 해석 결과의 고유진동수가 약 2배 가량의 차이를 보인다.

즉 해석 모델에 적용된 강성으로는 실제 모델의 동특성을 제대로 표현할 수 없으므로 해석 모델의 강성을 변화시켜 실험 결과에 일치하도록 동특성을 개선 시킬 필요가 있다.

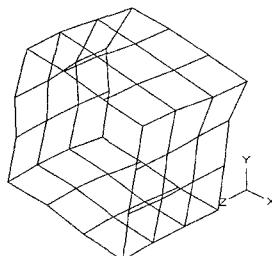


Fig. 9 1st mode shape of carriage structure

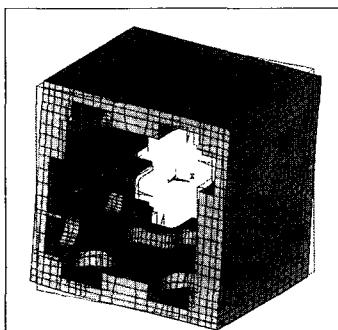


Fig. 10 3rd mode shape of ANSYS model

Table 5 Natural frequency of updated ANSYS model

Mode	Natural frequency(Hz)	Mode	Natural frequency(Hz)
1	0.00019921	6	169.25
2	60.637	7	568.38
3	89.102	8	591.33
4	102.54	9	639.08
5	113.55	10	1295.1

#### 4.4 강성 수정을 통한 동특성 변경

강성 수정은 trial & error법을 이용하였으며, 그 결과를 적용하여 고유진동수를 구해보면 Table 5와 같다. 이 때의 MAC value를 살펴보면 Fig. 11과 같다.

위 결과를 보면 강성 수정 후에도 실험 1차 모드와 ANSYS 모델 3차 모드의 MAC value가 높게 나타났다. 즉, 실험에서의 1차 모드 형상과 ANSYS 해석 모델에서의 3차 모드 형상이 잘 일치함을 알 수 있으며, 이 때의 강성값은 Table 7과 같다.

#### 4.5 간극 추정을 통한 강성의 신뢰성 확인

수정된 강성의 신뢰성을 확인하기 위하여 간극을 계산하였다. 이는 이론적 해석에서 구한 간극과 강성과의 그래프인 Fig. 3에서 구할 수 있다. 수정된 강성을 이 그래프에 적용하면 Fig. 12와 같다.

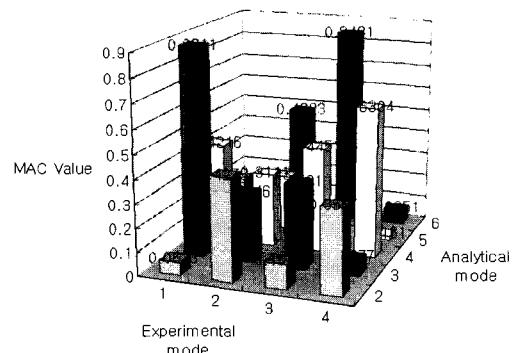


Fig. 11 MAC value of updated model

Table 6 MAC value of updated model

Mode	Analysis					
	1st	2nd	3rd	4rd	5th	
Experiment	1st	0.0533	0.8811	0.4216	0.0044	0.1367
	2nd	0.4273	0.2946	0.3110	0.2385	0.4823
	3rd	0.1040	0.3591	0.4451	0.0449	0.8481
	4th	0.3567	0.0677	0.6304	0.0161	0.0651

Table 7 Stiffness of updated ANSYS model

Diameter	40 mm	50 mm
Stiffness(MN/m)	3.7	7.6

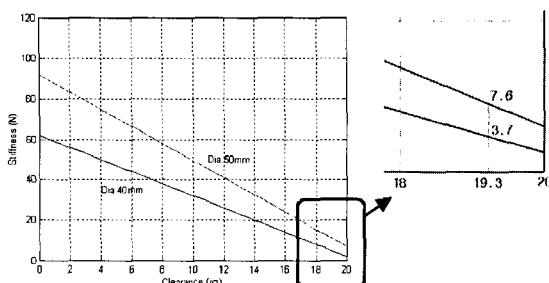


Fig. 12 Clearance identification

Fig. 12의 그림과 같이 간극은  $19.3 \mu\text{m}$ 로 구해진다. 이 값은 보통 공기베어링의 간극  $520 \mu\text{m}$ 에 속하므로 강성의 신뢰성을 확인할 수 있다.

## 5. 결 론

이 논문에서는 공기베어링으로 지지된 캐리지 구조물의 동특성 해석을 수행하기 위하여 유한 요소 모델을 개발하였다. 이 모델이 실제로 제작된 시스템의 동특성을 가지기 위해서는 제작된 시스템이 가지고 있는 문제점인 실제 간극을 알 수 없다는 점과 실제 사용 압력에서의 강성을 알 수 없다는 점을 극복하여야 한다. 이를 위하여 먼저 공기베어링의 특성을 이론적으로 규명하였으며, 캐리지 구조물을 유한요소법을 이용하여 모드 해석을 수행하였다. 또한 실제 캐리지 구조물의 모드 실험, 유한 요소 모델의 구조 변경 및 에어베어링의 간극 추정을 수행하여 수정된 모델이 실제 제작된 시스템의 동특성을 잘 반영할 수 있게 하였다. 따라서 이 모델을 이용하면 다른 압력의 공기가 공급되는 경우에서도 캐리지 구조물의 동특성을 예측할 수 있으리라 사료된다. 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 수치해석을 이용하여 공기베어링의 특성을 규명하였고, 신뢰성을 확인하였다. 공기베어링 제작사에서 제공한 강성과 비교하였을 때 베어링 지름 40 mm 인 경우 오차가 5.6 %, 지름 50 mm인 경우 오차가 3.9 %로 이론적 해석 결과와 신뢰성을 입증하였다.

(2) 공기베어링과 캐리지 구조물을 유한요소 해석 프로그램을 이용하여 모델링하여 각각의 모델에 대해 모드 해석을 수행하였고, 신뢰성을 확인하기 위하여 실험을 수행하였다. 그리고 모드 해석 결과와 실험 결과의 비교를 통하여 강성을 수정하였으며, 수정된 강성은 베어링 지름 40 mm일 때  $3.7 \text{ MN/m}$ , 지름

$50 \text{ mm}$ 일 때  $7.6 \text{ MN/m}$ 였다.

(3) 수정된 강성의 간극을 수치해석으로 구한 간극과 강성과의 관계를 나타내는 그래프에서 구할 수 있었고, 그 값인  $19.3 \mu\text{m}$ 는 보통 공기베어링의 간극인  $5\sim20 \mu\text{m}$  사이에 있으므로 강성의 신뢰성을 확인할 수 있었다.

## 참 고 문 헌

- Robinson, C. H. and Sterry, R., 1957, "The Static Strength of Pressure Fed Gas Journal Bearings, Porous Bearings", Atomic Energy Research Establishment.
- Constantinescu, V. N., 1962, "Some Considerations Regarding the Design of Bearings Fed Under Pressure Through a Large Number of Holes or Through Porous Surfaces", Studii si Cercetari in Mechanica Applicata, Academia Republicii Populare Romane, Vol. 13, No. 1, pp. 175~191.
- Sneek, H. J. and Yen, K. T., 1964, "The Externally Pressurized, Porous Wall, Gas-Lubricated Journal Bearing- I", Transactions of the American Society of Lubrication Engineers, Vol. 7, pp. 288~298.
- Sneek, H. J. and Elwell, R. C. 1965, "The Externally Pressurized, Porous Wall, Gas-Lubricated Journal Bearing- II", Transactions of the American Society of Lubrication Engineers, Vol. 3, pp. 339~345.
- Donald A. Nield and Adrian Bejan, "Convection in Porous Media", Springer-Verlag, pp. 5~20.
- Bruce R. Munson, Donald F. Young, Theodore H. Okiishi, "Fundamentals of fluid mechanics", JOHN WILEY & SONS, Inc., pp. 309~320.
- Rouleau, W. T., 1963, "Hydrodynamic Lubrication of Narrow Press-Fitted Porous Metal Bearings", Journal of Basic Engineering, Trans. ASME, Vol. 85, Series D, No. 1, pp. 123~128.
- Ko, J. M., Wong, C. W., and Lam, H., 1994, "Damage Detection in Steel Framed Structures by Vibration Measurement Approach", IMAC 12th, pp. 280~286.