

주기적 변형 경계조건을 적용한 면내 유효 탄성 물성치의 계산

정 일 섭*

(2004년 7월 3일 접수, 2004년 10월 28일 심사완료)

Evaluation of Effective In-Plane Elastic Properties by Imposing Periodic Displacement Boundary Conditions

Chung, Ilsup

Key Words : FEM(유한요소법), Unit Cell(단위 격자), Periodic Displacement Boundary Condition(주기적 변형 경계 조건), Effective Elastic Property(유효 탄성 물성치), Skewed Array(경사 배열)

Abstract

Analysis for structures composed of materials containing regularly spaced in-homogeneities is usually executed by using averaged material properties. In order to evaluate the effective properties, a unit cell is defined and loaded somehow, and its response is investigated. The imposed loading, however, should accord to the status of unit cells immersed in the macroscopic structure to secure the accuracy of the properties. In this study, mathematical description for the periodicity of the displacement field is derived and its direct implementation into FE models of unit cell is attempted. Conventional finite element code needs no modification, and only the boundary of unit cell should be constrained in a way that the periodicity is preserved. The proposed method is applicable to skew arrayed in-homogeneity problems. Homogenized in-plane elastic properties are evaluated for a few representative cases and the accuracy is examined.

1. 서 론

구성 재질 혹은 구조적 불균질성(in-homogeneity)이 규칙적으로 배열된 각종 재료가 다양한 공학 분야에 적용되고 있으며, 이들 재료의 성질을 구하기 위한 많은 연구가 진행되어 왔다. 불균질성이 내재된 재료의 예로는, 원자 단위의 금속 결정 구조, 섬유나 입자 형태의 보강재를 함유한 첨단 복합재료, 수십만 개의 구멍이 가공되어 있는 CRT의 새도우 마스크, 열교환기의 관판(tube sheet), 적층된 벽돌 구조물, 또는 규칙 배열된 강심 보강 콘크리트 등을 들 수 있는데, 이들 불균질성 개재물(inclusion)은 재료의 거시적 거동에 크게 영향을 미친다.

보통, 이들 개재물의 크기는 거시적 구조물에

비하여 미세할 뿐 아니라 그 개수 또한 무수히 많아서, 이론적 혹은 수치적 해석에서 모든 개재물을 실제 형상 그대로 고려하는 것은 효율적이지 못하며 대부분의 경우 가능하지 않다. 따라서, 이와 같은 구조물의 해석에서는 흔히 유효 물성치를 구하고, 거시적 구조물은 유효 물성치를 가지는 균질한 재료로 구성된 것으로 이상화하게 된다.

일정한 개재물이 규칙적으로 배열된 경우에는, 재료의 특성을 대표할 수 있어서 이를 적층함으로써 전체 재료를 재구성할 수 있는 단위 격자(unit cell)가 정의될 수 있으며, 이의 성질을 규명함으로써 재료의 유효 물성치를 계산할 수 있다. 따라서, 단위 격자에 대한 경계치 문제를 풀으로써 유효 물성치를 구하고자 하는 노력이 있어 왔다. 그러나, 많은 경우, 다양한 형태의 개재물에 대한 엄밀한 수학적 접근이 용이하지 않아 대부분의 연구자들은 수치적 방법에 의존하여 왔다.

O'Donnell^(1,2) 등은 구멍 사이 간극(ligament)에

* 회원, 영남대학교 기계공학부

E-mail : ilchung@yu.ac.kr

TEL : (053)810-3525 FAX : (053)810-4627

서의 응력이 일정하다고 가정하여 원형 다공 평판의 탄성 물성치와 항복곡면을 제시하였다. Baik^(3,4) 등은 다공 평판의 2 차원 및 3 차원 유한 요소 해석을 수행하여 탄소성 거동을 구하였으며, 다축 하중에 대한 항복 조건식을 제안하였다. 원형 또는 타원형 단면 형상의 섬유로 보강된 복합 재료에 대한 해석을 통해 Theocaris⁽⁵⁾ 등은 탄성 계수를 계산하였으며, Park⁽⁶⁾ 등은 CRT 새도우 마스크의 면내 탄성 계수를 수치적으로 구하여 열탄성 해석을 수행하였다.

단위 격자에 대한 해석의 문제점은 그 경계 조건을 해석 이전에 정확히 알 수 없다는 것이다. 가장 간단한 방법으로 균일 변위 또는 응력을 경계 절점에 가하고 단위 격자의 거동을 평균함으로써 유효 물성치를 구할 수 있지만, 이는 실제와는 상이한 경계 조건이므로 구해진 물성치에는 오차가 있을 수 밖에 없다. 여러 개의 단위 격자 모델을 사용함으로써 그 영향을 감소시킬 수 있으나, 이론적으로는 무한대 개의 격자 모델링을 하여야 정확한 결과를 얻을 수 있다.

실제 단위 격자내의 응력과 변형률의 분포는 균일하지 않으며, 수많은 단위 격자가 반복되어 있을 경우 이들이 주기적으로 반복된다는 점에 착안한 점근적 균질화(asymptotic homogenization) 기법은 거시적 평균 응력 및 변형률과 아울러, 단위 격자 내에서 발생하는 짧은 주기의 변동을 함께 고려할 수 있어 단위 격자에 대한 정확한 해를 구할 수 있는 적절한 방법이다. Meguid⁽⁷⁾ 등은 이를 탄성론과 결합하여 원형 다공 평판의 물성치를 구하였다. Kalamkarov⁽⁸⁾는 그 수학적 배경과 여러 가지 적용을 예시하였으며, 이러한 방법을 이용하여 Lee⁽⁹⁾는 다공질 평판의 유효 탄성계수를 계산하였고, Ghosh⁽¹⁰⁾ 등은 임의적으로 배열된 보로노이(Voronoi) 격자에 대한 해석을 수행하였다. Jang⁽¹¹⁾ 등은 이를 직물 복합재료의 물성치 계산에 응용하였으며, Ohno⁽¹²⁾ 등은 복합재료의 탄성 및 점소성 거동을 계산하였다. 또한 Yun⁽¹³⁾은 이종 재료의 적층판의 해석에 이 방법을 사용하였으며, Hassani와 Hinton⁽¹⁴⁾는 점근적 균질화 기법에 입각한 유한요소해석 프로그램을 코우딩하여 몇 가지 예에 적용하였다.

이들의 연구를 보면, 점근적 균질화법은 그 정확성에도 불구하고 역시 미시적 구조의 복잡성에 기인한 수학적 어려움을 해결하기 위하여는 수치적 방법을 이용할 수 밖에 없음을 알 수 있으며, 이 때 개재물에 의한 단위 격자내의 미시적 변동에 따른 새로운 변수를 정의하여 구하게 되므로, 이를 포함한 새로운 해석 프로그램의 개발과 유효

물성치 계산을 위한 후처리 과정이 필수적이다.

한편, Anthoine⁽¹⁵⁾은 단위 격자의 주기적 경계 조건을 직관적으로 제시하였고, 라그랑주(Lagrange) 승수법을 이용하여 변형률의 주기성을 단위 격자 모델에 부과할 수 있도록 하였다. 역시 해석 코우드의 수정이 필요하였으나, 계산된 변위와 하중으로부터 물성치를 간단히 구할 수 있었다.

본 연구에서는 반복적으로 배열된 단위 격자의 변형장이 주기적이라는 점을 수학적으로 표현하고, 이로부터 격자의 경계 절점들이 만족하여야 하는 변위의 운동 구속(kinematical constraint) 조건을 유도한다. 이는 직교 좌표계에서는 Anthoine의 경계 조건과 동일하지만, 텐서식을 사용하여 보다 일반화함으로써 평행 사변형이나 평행 육면체와 같이 경사진 단위 격자에도 쉽게 적용할 수 있도록 하였다. 또한, 해석에 필요한 경계 조건과 하중 부과 방법을 제시한 뒤, 이를 몇 가지 예에 적용하여 유효 물성치를 구함으로써 그 유용성을 검증한다. 제시된 방법은 기존의 일반적 유한 요소 프로그램을 수정 없이 사용할 수 있으며, 유효 물성치의 계산 또한 매우 간단하고 정확하다는 장점을 가진다.

2. 이론적 배경

주기적 불균질 재료의 물성치를 계산하기 위하여 통상적으로 사용되어 온 방법은, 불균질성을 대표할 수 있는 단위 격자를 정의하여 이를 모델링하고, 경계 모서리 혹은 면 전체의 절점에 균일한 거시적 응력 혹은 변형을 경계 조건으로 가한 뒤, 그 평균적 반응을 구하는 것이다. 이들의

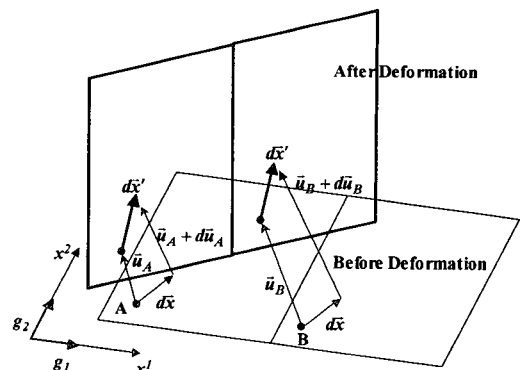


Fig. 1 Schematic diagram for the periodic deformation of unit cells

관계로부터 유효 물성치를 계산하게 되는데, 이때, 가해지는 경계 조건은 실제 재료의 그것과는 상이한 것이어서 오차의 원인이 된다.

거시적 균일 응력장에서 주기적 불균질 재료의 변형은 Fig. 1에 나타낸 것과 같은 주기성을 가진다. 즉, 인접한 단위 격자내의 동일 지점 A와 B에 위치한 같은 미소 길이 벡터 $d\mathbf{x}$ 는 변형 후 역시 동일한 벡터 $d\mathbf{x}'$ 으로 변화한다. 그러므로, 두 식

$$\bar{\mathbf{u}}_A + d\mathbf{x}' = d\mathbf{x} + \bar{\mathbf{u}}_A + d\bar{\mathbf{u}}_A$$

$$\bar{\mathbf{u}}_B + d\mathbf{x}' = d\mathbf{x} + \bar{\mathbf{u}}_B + d\bar{\mathbf{u}}_B$$

로부터, 다음의 관계가 성립함을 알 수 있다.

$$d\bar{\mathbf{u}}_A = d\bar{\mathbf{u}}_B \quad (1)$$

여기서 기준 축으로 $\bar{\mathbf{g}}_i$ 를 기저(base) 벡터로 하는 경사 좌표계를 사용하면, $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{g}}_i u^i$ 이므로

$$d\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{g}}_i u^i |_{,j} dx^j \quad (2)$$

가 된다. 이 때, 직교 좌표계나 경사 좌표계에서의 크리스토펠 기호는 모두 0이 되므로 식 (2)는

$$d\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{g}}_i \frac{\partial u^i}{\partial x^j} dx^j \quad (2')$$

로 단순화할 수 있다. 따라서, 식 (1)과 (2')로부터 인접 단위 격자의 변형의 주기성은 다음 식으로 표시될 수 있음을 알 수 있다.

$$\bar{\mathbf{g}}_i \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} dx^j \right)_A = \bar{\mathbf{g}}_i \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} dx^j \right)_B$$

여기에 반변(contra-variant) 기저 벡터를 내적하여 위 식의 기저 벡터를 소거 시킨 뒤, dx^j 의 성분별 비교를 통하여 다음의 관계식을 구할 수 있다.

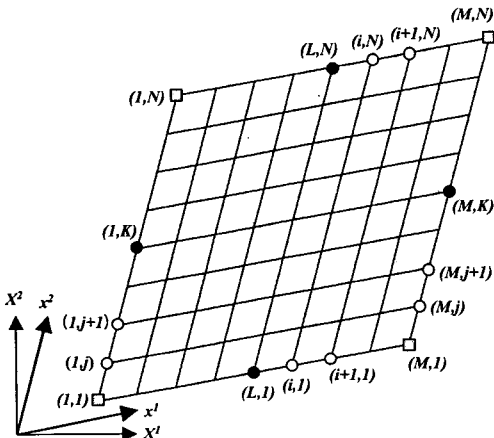


Fig. 2 An example of FE model for a unit cell in the shape of parallelogram

$$\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right)_A = \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right)_B \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3)$$

만약, 점 A가 단위 격자의 경계선 상에 위치한다면, 이에 따라 점 B는 인접한 단위 격자의 동일한 경계선, 즉 점 A가 위치한 경계선의 대변에 위치하여야 한다. 따라서 식 (3)은 단일 단위 격자의 해석에서 대변에 놓인 상응하는 재료 점(material point)들이 만족하여야 하는 주기적 변형 경계 조건을 의미한다.

위의 과정은 재료의 성질이나 변형의 크기 등에 관한 아무런 가정을 포함하지 않으며, 단지 재료 점들의 운동만을 고려하고 있으므로, 식 (3)은 비선형성 재료 혹은 대변형 문제에서도 동일하게 성립되어야 하는 조건이다. 또한, 이는 2차원 뿐만 아니라 3차원 단위 격자에서도 만족되어야 한다.

3. 유한요소 해석에의 적용

3.1 주기적 변형 경계 조건

불균질성이 일정한 간격과 방향으로 배열된 문제에 대한 단위 격자는 2차원 평면 문제에서는 평행사변형, 3차원 문제의 경우에는 평행 육면체로 항상 정의될 수 있다. 앞 절에서 유도한 식 (3)은 3차원 문제에도 성립하지만, 본 연구는 2차원 문제만을 다루고자 한다.

Fig. 2는 평면 문제에 대한 단위 격자 유한 요소 모델의 한 예를 보인다. 여기서, 상, 하측 모서리와 좌, 우측 모서리의 절점 수를 각각 M 개와 N 개라 하고, 경계 절점의 위치를 순서쌍 (i, j) 로 표시하였다. 먼저, 상, 하 모서리에서 동일한 x^1 좌표값을 가지는 $(i, 1)$ 절점과 (i, N) 절점에 대하여 식 (3) 가운데

$$\frac{\partial u^k_{(i,1)}}{\partial x^1} = \frac{\partial u^k_{(i,N)}}{\partial x^1} \quad (3a)$$

을 적용하고, 이를 유한 차분 형태로 표시하면,

$$\frac{u^k_{(i+1,1)} - u^k_{(i,1)}}{x^1_{(i+1,1)} - x^1_{(i,1)}} = \frac{u^k_{(i+1,N)} - u^k_{(i,N)}}{x^1_{(i+1,N)} - x^1_{(i,N)}}$$

가 되며, 평면 문제의 경우, $k=1, 2$ 이다. 요소 분할 시 상, 하 모서리의 절점 간격이 균일할 필요는 없으나, 대변의 같은 위치에 놓인 상응 절점에서 그 인접 절점과의 간격을 동일하게 한다면, 위 식의 분모는 서로 상쇄되어 다음과 같은 $(M-1)$ 개의 식을 얻게 된다.

$$u^k_{(i+1,1)} - u^k_{(i,1)} = u^k_{(i+1,N)} - u^k_{(i,N)}$$

이들 식은 서로 더하거나 감함으로써 임의의 경

계 절점 사이의 식으로 표현할 수 있는데, Fig. 2에 (L,1)과 (L,N)으로 표시한 기준 절점의 변위를 포함하는 식으로 변환하면 다음과 같다.

$$u_{(i,1)}^k - u_{(L,1)}^k = u_{(i,N)}^k - u_{(L,N)}^k \quad (4)$$

위의 식 (3) 가운데 적용하지 않은 식

$$\frac{\partial u_{(i,1)}^k}{\partial x^2} = \frac{\partial u_{(i,N)}^k}{\partial x^2} \quad (3b)$$

은 x^2 에 대한 적분을 통해

$$u_{(i,1)}^k = u_{(i,N)}^k + f^k(x^1)$$

으로 표시할 수 있고, 이를 x^1 으로 미분한 뒤, 식 (3a)를 적용하면 결국 함수 $f^k(x^1)$ 은 상수이어야 함을 알 수 있다. 따라서, 위 식은

$$u_{(i,1)}^k = u_{(i,N)}^k + C^k \quad (5)$$

가 되며, 이는 단위 격자의 대변에 놓인 상응 절점의 변위값의 차이가 모든 절점쌍에서 동일하다는 식 (4)의 결과와 일치하는 것이다.

유사한 방법으로 좌, 우 모서리에 놓인 절점 (1,j)와 절점 (M,j)에 대하여 식 (3)을 적용하고, 이를 Fig. 2의 (1,K)와 (M,K) 절점의 변위를 포함한 식으로 변환하면 아래와 같은 (N-1)개의 식을 구할 수 있다.

$$u_{(1,j)}^k - u_{(1,K)}^k = u_{(M,j)}^k - u_{(M,K)}^k \quad (6)$$

이 경우에도 대변의 상응 절점간의 변위의 차이는 일정하여

$$u_{(1,j)}^k = u_{(M,j)}^k + D^k \quad (7)$$

가 된다.

위의 식 (4)와 (6)은 주기적 변형 조건을 만족하기 위하여 경계 절점에 부과할 일종의 구속 조건이며, 본 연구에서 사용한 ABAQUS에서는 명령어 *EQUATION을 사용하여 해석에 반영할 수 있다. 한편, 단위 격자의 모퉁이에 위치한 절점에 대한 주기적 변형 경계 조건은 식 (4)와 (6)에 중복되어 있으며, 이는 동일한 절점의 자유도가 2번에 걸쳐 종속 변수로 정의되거나, 또는 이미 종속 변수로 정의된 자유도가 다른 구속 조건에서는 독립 변수가 됨으로써 해석 에러를 유발시킨다. 이를 방지하기 위하여는 모퉁이 절점의 조건식을 조합하여 잉여식을 없애야 한다. 먼저, 식 (4)의 i 와 식 (5)의 j 를 각각 1과 N으로 하여

$$\begin{aligned} u_{(1,1)}^k - u_{(L,1)}^k &= u_{(1,N)}^k - u_{(L,N)}^k \\ u_{(1,N)}^k - u_{(1,K)}^k &= u_{(M,N)}^k - u_{(M,K)}^k \end{aligned}$$

를 구하고, 위 두 식을 더하여 $u_{(1,N)}^k$ 을 소거하면

$$u_{(1,1)}^k - (u_{(L,1)}^k + u_{(1,K)}^k) = u_{(M,N)}^k - (u_{(L,N)}^k + u_{(M,K)}^k) \quad (8)$$

가 얻어진다. 또한, 식 (4)의 i 와 식 (5)의 j 를 각각 M과 1로 하여 구한 두 식

$$\begin{aligned} u_{(M,1)}^k - u_{(L,1)}^k &= u_{(M,N)}^k - u_{(L,N)}^k \\ u_{(1,N)}^k - u_{(1,K)}^k &= u_{(M,N)}^k - u_{(M,K)}^k \end{aligned}$$

의 차이를 정리하면

$$u_{(M,1)}^k - (u_{(L,1)}^k + u_{(M,K)}^k) = u_{(1,N)}^k - (u_{(1,K)}^k + u_{(L,N)}^k) \quad (9)$$

가 된다. 식 (8)과 (9)는 모퉁이 절점과 기준 절점들 간의 구속 조건을 나타내는 식으로서 이를 적용할 경우, 위에서 언급한 문제점은 발생하지 않는다.

식 (4), (6), (8) 및 (9)의 구속 조건은 모두 변위 벡터의 반변 성분들로 표현되어 있다. 해석을 위한 전처리기에서 경사 좌표계의 지정이 가능하다면 이를 기준으로 구속 조건을 입력하면 되며, 그렇지 않은 경우이라도 위 식의 변위 성분을 전체 직교 좌표계의 변위로 간주하여 입력하여도 무방하다. 이는 위의 식들을 직교 좌표계로 변환하면 동일한 형태의 구속 조건식을 얻을 수 있기 때문이다.

평면 문제에 있어서 단위 격자의 경계에 가해지는 구속 조건은 모퉁이 절점에 대한 식을 제외하여 식 (4)로부터 (2M-6)개, 식 (6)으로부터 (2N-6)개, 모퉁이 절점에 대한 식 (8)과 (9)로부터 4개가 되어 총 구속 조건의 수는 (2M+2N-8)개가 된다. 경계 절점의 수가 많아지면, 그에 따라 이들 구속 조건을 부여하기 위한 극히 지루한 작업이 필요하므로, 본 연구에서는 경계 절점의 좌표로부터 대변의 상응 절점을 찾아 구속 조건에 대한 입력 파일을 생성할 수 있는 간단한 프로그램을 만들어 사용하였다.

3.2 하중 부과 및 강체 운동의 구속

요소 분할 후 3.1절의 구속 조건을 부여하고 나면 모델의 경계 절점에 하중을 가하여야 하는데, 이미 경계 절점들은 주기적 변형 조건을 만족하고 있으므로, 하중은 단지 기준 절점에만 가해지면 된다. Fig. 2에서 검은 원형 기호로 표시된 기준 절점은 반드시 모서리 중앙에 위치할 필요는 없다. 다만, 상,하의 기준 절점들은 서로 동일한 x^1 좌표값을, 좌,우의 기준 절점들은 서로 동일한 x^2 좌표값을 가지도록 하여야 한다.

하중의 크기와 방향은 원하는 거시적 응력장에 따라 달라질 수 있으나, 물성치의 계산을 위하여 가장 간편한 방법은 전체 직교 좌표계를 기준으로 하여 다음 식에 따라 정하는 것이다.

$$F_i^{(k)} = \Delta x^{(k)} \sigma_{ij} n_j^{(k)} \quad (10)$$

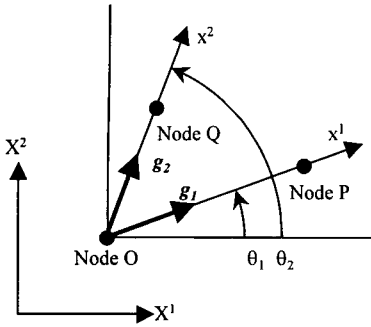


Fig. 3 Nodes to impose constraint against rigid body motion

위 식에서 k 는 단위 격자의 모서리를 표시하며, Δx 는 모서리의 길이, n 은 여기에 수직인 바깥 법선 벡터를 의미한다.

모델의 강체 운동을 구속하기 위하여는 먼저 임의의 절점을 선택하여 평행 이동 자유도를 모두 구속한다. 또한, 강체 회전 운동은 변위 벡터의 회전(curl) 성분을 구속함으로써 방지할 수 있으며, 평면 문제의 경우에는 Fig. 3과 같이 단위 격자내의 임의의 3개 절점을 선택하여 $\omega^3 = 0$ 를 구속 조건으로 부여하면 된다. 경사 좌표계 혹은 직교 좌표계를 기준으로 한 평면 문제의 경우,

$$\omega^3 = u_{j,i} \epsilon^{ij3} = (u_{2,1} - u_{1,2}) \epsilon^{123} = 0$$

를 만족하여야 하며, 공변 변위 벡터 성분을 직교 좌표계의 변위 성분으로 표현하면 위식은 아래와 같이 표현된다.

$$\beta_2^k \frac{\partial U_k}{\partial x^1} - \beta_1^k \frac{\partial U_k}{\partial x^2} = 0$$

Fig. 3의 절점 O가 평행 이동 자유도의 구속이 가해지는 절점이어서 $U_k^{(O)} = 0$ 라면, 위 식에 변환 텐서의 성분을 대입하고 이를 유한 차분 형태로 표시하여 아래의 강체 회전 운동 구속식을 얻을 수 있다.

$$\cos \theta_2 \frac{U_1^{(P)}}{|OP|} + \sin \theta_2 \frac{U_2^{(P)}}{|OP|} = \cos \theta_1 \frac{U_1^{(Q)}}{|OQ|} + \sin \theta_1 \frac{U_2^{(Q)}}{|OQ|}$$

직교 좌표계에서 절점 P 또는 Q와 절점 O 사이의 좌표값의 차이를 ($\Delta X^1, \Delta X^2$)로 나타낸다면 위의 식은 다음과 같이 정리된다.

$$\Delta X_1^{(O)} U_1^{(P)} + \Delta X_2^{(O)} U_2^{(P)} = \Delta X_1^{(P)} U_1^{(Q)} + \Delta X_2^{(P)} U_2^{(Q)} \quad (11)$$

3.3 물성치의 계산

원하는 응력장에 해당하는 외력을 식 (10)에 따라 구하고 이를 기준 절점들에 가하여 단위 격자에 대한 해석을 수행하면 각 절점의 변위가 구

해진다.

단위 격자 내부 절점들의 변위는 당연히 재료의 분포와 기하적 특성 등에 따라 국부적으로 변동하지만, 식 (5)와 (7)에서 볼 수 있는 바와 같이 단위 격자 대변의 상응 절점간의 변위의 차이는 항상 일정하다. 전체 직교 좌표 기준의 변위 성분도 마찬가지이며, 이는 식 (5)와 (7)의 좌표 변환으로부터 확인할 수 있다.

본 연구에서 구하고자 하는 유효 물성은 미시적 변동을 무시한 거시적 거동에 대한 특성을 의미하므로 기준 절점들의 변위의 차이는 곧바로 거시적 변형을 계산에 다음과 같이 이용될 수 있다.

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial U^1}{\partial X^1} \approx \frac{U_{(M,K)}^1 - U_{(L,K)}^1}{X_{(M,K)}^1 - X_{(L,K)}^1} \quad (12a)$$

$$\epsilon_{22} = \frac{\partial U^2}{\partial X^2} \approx \frac{U_{(L,M)}^2 - U_{(L,I)}^2}{X_{(L,M)}^2 - X_{(L,I)}^2} \quad (12b)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial U^2}{\partial X^1} + \frac{\partial U^1}{\partial X^2} \approx \frac{U_{(M,K)}^2 - U_{(L,K)}^2}{X_{(M,K)}^1 - X_{(L,K)}^1} + \frac{U_{(L,M)}^1 - U_{(L,I)}^1}{X_{(L,M)}^2 - X_{(L,I)}^2} \quad (12c)$$

식 (12)는 단지 미소 변형에 대한 변위와 변형률의 관계이며, 대변형을 고려하여야 하는 경우에는 변위의 미분을 위와 동일하게 구하고 이로부터 변형 구배 행렬을 구한 뒤 변형률의 정의식에 대입하면 될 것이다.

평면 문제에서는 3가지의 거시적 응력 상태, 즉

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

에 대한 해석을 수행한 뒤, 각각의 경우에 식(12)을 이용하여 구한 변형률 $[\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \gamma_{12}]^T$ 을 각 열로 하는 행렬을 구성하면 이것이 바로

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{26} \\ S_{61} & S_{62} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (14)$$

의 유연성 행렬이 되며, S_{ij} 와 기계적 물성치의 관계를 이용하면 유효 물성치를 계산할 수 있다.

4. 결과 및 고찰

앞에서 제안한 주기적 구속 조건과 물성치 계산 법 등을 적용하여 몇 가지 예에 대한 해석을

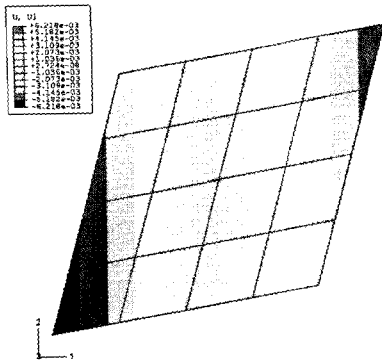


Fig. 4 Distribution of displacement in 1-dir. under σ_{11} loading in a skewed unit cell for homogeneous isotropic material

Table 1 Comparison of evaluated properties with the given ones for homogeneous isotropic sheet

Property	Given	Evaluated
E_{11}	100.000000	99.9999749
E_{22}	100.000000	99.9999820
ν	0.300000000	0.300000186
G	38.4615385	38.4615175

수행함으로써 제안된 방법을 검증하고자 한다.

4.1 등방성 균질 재료

등방성 균질 재료에 대하여 단위 격자를 정의하고 물성치를 구한다는 것은 실용적으로 불필요한 일이나, 본 연구에서 제시한 방법의 유효성을 검증하기 위하여 Fig. 4와 같이 16개의 4절점 사각형 요소로 구성된 단위 격자의 모델에 대한 해석을 수행하였다. 상,하 및 좌,우 모서리는 그림의 축1에 대하여 각각 10° 와 75° 만큼 경사지도록 하였으며, 모서리의 길이는 모두 1이다. 모델의 중앙부에 위치한 절점과 그 인접 절점에 대하여 강제 운동 구속 조건을 가하고, 각 모서리의 중앙에 위치한 기준 절점에 식 (10)과 (13)에 따른 하중을 가하였다. Fig. 4의 등고선은 식 (13)의 첫번째 경우의 해석 결과 중 U_1 의 분포를 보인다. 등방성 재료에 균일 응력이 가해질 때 당연히 나타나야 하는 수직 등고선이 재연되어 있음을 볼 수 있다. 기준 절점들의 변위로부터 식 (12)와 (14)를 사용하여 구한 물성치는 Table 1과 같다.

4.2 직교 배열된 직사각형 구멍

Hassani와 Hinton은 균질화 기법에 의거하여 유한 요소 식을 유도하고 이를 코우딩하여, 직사각

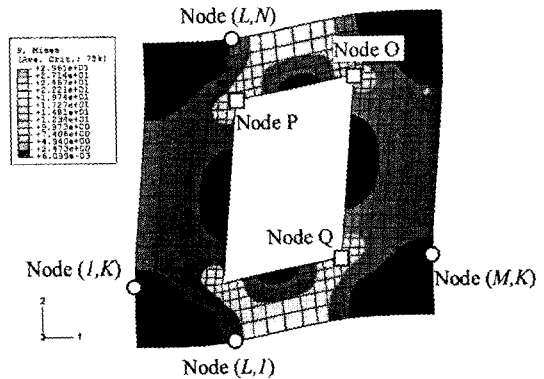


Fig. 5 Deformed shape and the distribution of von Mises stress in a unit cell with rectangular type of perforation under shear loading. (Reference nodes on edges and nodes for constraints against rigid body motion are indicated.)

Table 2 Comparison of evaluated stiffness matrix components with those by Hassani⁽¹⁴⁾ for a thin sheet with rectangular hole

Property	Hassani	Evaluated
Q_{11}	12.839	12.840
Q_{12}	3.139	3.140
Q_{22}	17.422	17.423
Q_{66}	2.648	2.648

형 구멍이 주기적으로 배열된 박판의 단위 격자에 대하여 강성을 구하였다.⁽¹⁴⁾ 모서리의 길이는 모두 1이고, 구멍은 가로 0.4 세로 0.6이다. 이들은 재료의 성질을 평면 응력의 강성 행렬로 부여하였는데, 이를 물리적 물성치로 환산하면 탄성계수는 26.6667, 푸아송비는 1/3에 해당한다. 이들이 사용한 모델과 동일하게 총 436개의 8절점 4각형 요소를 사용하여 해석을 수행하였으며, Fig. 5는 식 (13)의 3번째에 해당하는 하중을 가하였을 때 나타난 단위 격자의 변형과 von Mises 응력의 분포를 보인다. 변형된 모양은 중앙에 대하여 점대칭이며, von Mises 응력은 단위 격자의 수평 및 수직 중심선에 대하여 대칭이다. 여기서 기준 절점들은 그림에 표시한 것과 같이 모서리의 가운데가 아닌 임의의 위치로 정하였다. 또한, 강제 운동을 구속하기 위한 조건도 그림에 표시된 절점 O, P, Q에 가하였다.

계산된 기준 절점의 변위로부터 식 (14)의 $[S_{ij}]$ 행렬을 구하였으며, 이의 역행렬인 $[Q_{ij}]$, 즉 강성행렬 성분의 비교는 Table 2와 같다.

4.3 경사 배열된 원형 구멍

같은 방법의 해석을 원형 구멍이 뚫린 박판에 적용하여 물성치를 구하였다. 먼저 구멍이 경사

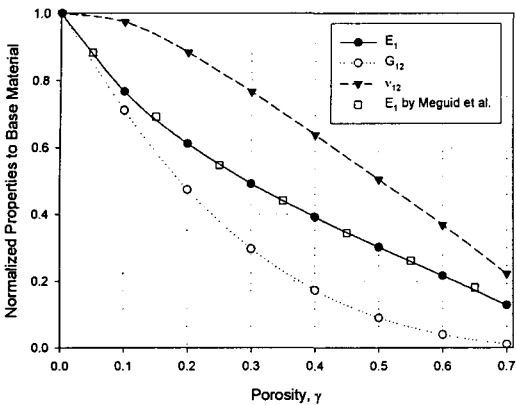


Fig. 6 Normalized elastic properties of perforated sheet with square arrayed circular hole

각형 배열(square array)된 경우, 단위 격자 역시 정사각형으로 설정될 수 있는데, 기공비(γ) 즉 단위 격자의 면적 대비 구멍의 넓이의 비를 변화시키며 물성치를 구하고 이를 원재료의 물성치로 정규화한 결과는 Fig. 6과 같다. 그림에서 아래 첨자는 구멍의 배열 방향을 의미한다. Meguid⁽⁷⁾ 등이 점근적 근질화법으로 구한 탄성 계수 E_1 과 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

또한, Fig. 7과 같이 원형 구멍이 일정한 수평 방향 간격 L 을 가지되, 역시 L 의 간격을 가지는 인접 행은 서로 d 만큼 엇갈림으로써 경사 배열된 다공질 박판의 유효 물성치를 계산하였다. 그림은 기공비가 0.3이며, d/L 은 0.5인 경우, 식 (13)의 첫 번째 하중이 주어질 때의 변형 전·후 모양을 보인다. d/L 을 변화시키며 물성치를 구하고 이를 원재료에 대하여 정규화한 결과는 Fig. 8과 같다.

정사각형 배열이 직교 이방성을 보이는 반면 경사 배열의 경우에는 일반적인 이방성을 보이게 된다. 그러나, 엇갈림이 증가하여 d/L 이 0.5가 되면 이등변 삼각형 형태의 배열(staggered array)이 되어 다시 직교 이방성을 가지게 된다. 이는 Fig. 8의 상호 간섭 계수(mutual influence coeff.) η 가 모두 0이 됨을 통해 확인할 수 있다.

5. 결론

다양한 형태의 불균질성이 내재된 재료로 구성된 구조물의 거동 예측을 위하여, 이들 재료의 거시적 특성을 나타낼 수 있는 물성치가 필요하다. 이를 위해 재료의 미시적 특성을 반영한 단위 격자를 정의하고 이에 대한 해석하게 되는데, 이 때 적절한 경계 조건을 부여하는 것이 필수적이다.

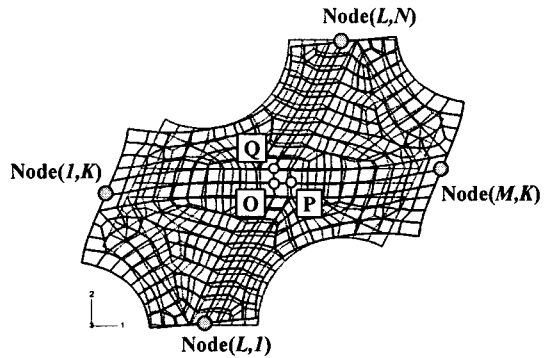


Fig. 7 Meshed unit cell for perforated sheet with skew arrayed circular holes, under 1-dir. loading, before (dotted) and after (solid) deformation

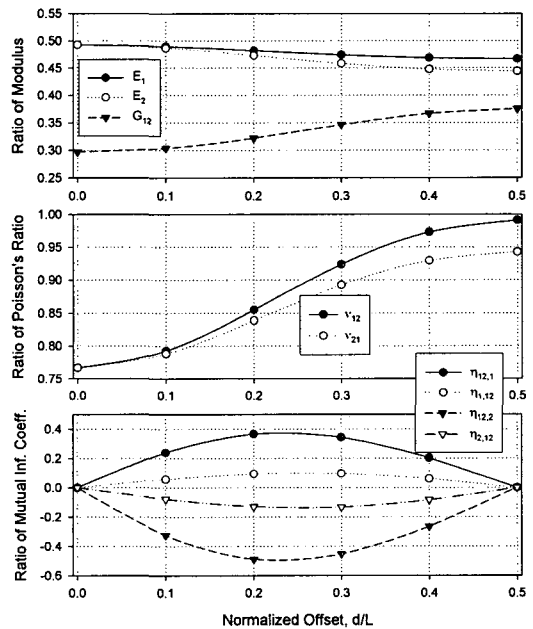


Fig. 8 Normalized elastic properties of perforated sheet with skew arrayed circular hole

본 연구에서는 규칙적으로 배열된 불균질성 재료가 거시적 균일 응력장에서 주기적 변형을 함에 착안하여 단위 격자의 경계 절점에 가해져야 할 구속 조건식을 유도하였다. 이 구속 조건은 불균질성이 규칙적으로 배열되어 그 단위 격자를 하나의 평행 사변형이나 평행 육면체로 정의할 수 있는 모든 재료의 유효 물성치를 구하는데 적용할 수 있으며, 비선형 재료나 대변형시에도 만족되어야 하는 것이다. 구속식을 유한 요소 해석에 적절히 적용하기 위하여는 단위 격자 대변의 절점들이 서로 동일하게 배열되도록 요소 분할을 해야 하며, 이는 전처리기에서 어려움 없이 수행될 수 있다.

또한, 거시적 응력장에 따라 단위 격자의 모서리에서 선택한 기준 절점에 부과해야 할 하중을 결정하는 방법과 해석 모델의 강체 운동을 구속하기 위한 방법을 고찰하였다.

제안한 방법을 균질한 등방성 재료, 사각형 구멍 또는 원형 구멍이 뚫린 다공질 재료 등의 단위 격자에 적용하여 탄성 물성치를 구하고 가용한 선행 결과들과 비교함으로써 그 정확성을 확인하였다.

주기적 변형 조건에 상응하는 구속식 만을 부여함으로써 일반적인 유한요소 프로그램을 수정 없이 사용할 수 있다는 것은 매우 큰 장점이라 생각된다. 또한, 물성치의 계산이 간편할 뿐 아니라 그 결과가 정확한 것으로 보여, 본 연구의 결과는 다양한 재료의 유효 물성치를 계산하는데 유용하게 사용될 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

- (1) Slot, T. and O'Donnell, W. J., 1971, "Effective Elastic Constants for Thick Perforated Plates with Square and Triangular Penetration Patterns," *J. of Engineering for Industry, Tran. ASME*, Vol. 93, No. 4, pp. 935~942.
- (2) O'Donnell, W. J. and Porowski, J., 1973, "Yield Surfaces for Perforated Materials," *J. of Applied Mechanics, Tran. ASME*, Vol. 40, No. 3, pp. 263~270.
- (3) Baik, S. C., Oh, K. H. and Lee, D. N., 1996, "Analysis of the Deformation of a Perforated Sheet under Uniaxial Tension," *J. of Materials Processing Technology*, Vol. 58, No. 2, pp. 139~144.
- (4) Baik, S. C., Han, H. N., Lee, S. H., Oh, K. H. and Lee, D. N., 1997, "Plastic Behavior of Perforated Sheets under Biaxial Stress State," *Int. J. of Mechanical Sciences*, Vol. 39, No. 7, pp. 781~793.
- (5) Theocaris, P. S., Stavroulakis, G. E. and Panagiotopoulos, P. D., 1997, "Calculation of Effective Transverse Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Composites by Numerical Homogenization," *Composites Sciences and Technology*, Vol. 57, No. 5, pp. 573~586.
- (6) Park, S. K., Kim, J., Chang, Y. C. and Kang, B. S., 2001, "Analysis of the Deformation of a Perforated Sheet under Thermal and Tension Load Using Finite Element Method," *J. of Materials Processing Technology*, Vol. 113, No. 1, pp. 761~765.
- (7) Meguid, S. A., Kalamkarov, A. L., Yao, J. and Zougas, A., 1996, "Analytical, Numerical and Experimental Studies of Effective Elastic Properties of Periodically Perforated Materials," *J. of Engineering Materials and Technology, Tran. ASME*, Vol. 118, No. 1, pp. 43~48.
- (8) Kalamkarov, A. L., 1997, "Analysis, Design, and Optimization of composite structures," J. Wiley & Sons, New York.
- (9) Lee, J. H., 1995, "Simplified Stress Analysis of Perforated Plates Using Homogenization Technique," *J. of the Computational Structural Engineering Institute of Korea*, Vol. 8, No. 3, pp. 51~58.
- (10) Ghosh, S., Lee, K. and Moorthy S., 1996, "Two Scale Analysis of Heterogeneous Elastic-Plastic Materials with Asymptotic Homogenization and Voronoi Cell Finite Element Model," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 132, No. 1, pp. 63~116.
- (11) Jang, J., Yoon, M. and Lee, J., 1998, "Computation of Equivalent Material Properties of Woven Fabric Composites Using Homogenization Technique," *Tran. of KSME A*, Vol. 22, No. 3, pp. 588~594.
- (12) Ohno, N., Wu, X. and Matsuda, T., 2000, "Homogenized properties of Elastic-Viscoplastic Composites with Periodic Internal Structures," *Int. J. of Mechanical Sciences*, Vol. 42, No. 8, pp. 1519~1536.
- (13) Yun, S. H., 2000, "The Finite Element Analysis for Calculation of Equivalent Elastic Constants Using the Homogenization Method," *J. of the Computational Structural Engineering Institute of Korea*, Vol. 13, No. 1, pp. 51~61.
- (14) Hassani, B. and Hinton, E., 1998, "A Review of Homogenization and Topology Optimization II - Analytical and Numerical Solution of Homogenization Equations," *Computers and Structures*, Vol. 69, pp. 719~738.
- (15) Anthoine, A., 1995, "Derivation of the In-Plane Elastic Characteristics of Masonry through Homogenization Theory," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 32, No. 2, pp. 137~163.